

2015학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가
수학영역 A형 정답 및 풀이

01. ④ 02. ① 03. ⑤ 04. ② 05. ③
 06. ① 07. ⑤ 08. ④ 09. ② 10. ④
 11. ⑤ 12. ① 13. ⑤ 14. ② 15. ③
 16. ② 17. ① 18. ④ 19. ③ 20. ③
 21. ① 22. 27 23. 8 24. 88 25. 11
 26. 304 27. 5 28. 4 29. 10 30. 196

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} & 4^{\frac{3}{2}} \times 2 \\ &= (2^2)^{\frac{3}{2}} \times 2 \\ &= 2^3 \times 2 \\ &= 8 \times 2 = 16 \end{aligned}$$

정답 ④

2. 출제의도 : 행렬의 실수배의 정의를 이용하여 행렬의 모든 성분의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} 3A &= 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

따라서 행렬 3A의 모든 성분의 합은 12이다.

정답 ①

3. 출제의도 : 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 + 1}{n^3 + 3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{3}{n^3}} \\ &= \frac{5 + 0}{1 + 0} = 5 \end{aligned}$$

정답 ⑤

4. 출제의도 : 그래프의 연결 관계를 행렬로 표현하였을 때 행렬의 모든 성분의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

그래프의 연결 관계를 나타내는 행렬의 성분 중 1의 개수는 그래프의 변의 개수의 2배이므로

$$4 \times 2 = 8$$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은 8이다.

정답 ②

5. 출제의도 : 등비수열의 정의를 이용하여 등비수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} a_5 &= a_3 \times 2^2 \\ &= 12 \times 4 = 48 \end{aligned}$$

정답 ③

6. 출제의도 : 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\int_0^1 3x^2 dx = [x^3]_0^1$$

$$= 1 - 0 = 1$$

정답 ①

7. 출제의도 : 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 사건 A 와 B 는 서로 배반사건이므로

$$P(A \cap B) = 0$$

따라서,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 4P(B)$$

이므로

$$P(A) = 3P(B) = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

정답 ⑤

8. 출제의도 : 함수의 그래프로부터 극한 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2 + 2 = 4$$

정답 ④

9. 출제의도 : 조건부확률을 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

임의로 선택한 1명이 여학생인 사건을

A , 2학년 학생인 사건을 B 라 하면 구하고자 하는 확률은 $P(B|A)$ 이고

$$P(A) = \frac{130}{300}, P(A \cap B) = \frac{70}{300}$$

이므로

$$P(B|A) = \frac{\frac{70}{300}}{\frac{130}{300}} = \frac{7}{13}$$

정답 ②

10. 출제의도 : 실생활에서 로그로 나타내어진 수식에서 로그의 성질을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$V = 2C, t = \frac{7}{2}t_0 \text{ 이므로}$$

$$\log\left(\frac{t}{t_0} - 1\right) = k + 4\log\frac{V}{C} \text{ 에서}$$

$$\log\left(\frac{\frac{7}{2}t_0}{t_0} - 1\right) = k + 4\log\frac{2C}{C}$$

$$\log\frac{5}{2} = k + 4\log 2$$

$$1 - 2\log 2 = k + 4\log 2$$

$$(\because \log\frac{5}{2} = \log\frac{10}{4} = \log 10 - \log 2^2$$

$$= 1 - 2\log 2)$$

$$\therefore k = 1 - 6\log 2$$

정답 ④

11. 출제의도 : 지수함수와 로그함수의 그래프를 이해하고 사각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$A(0,1), B(0,-1)$ 이므로 점 C 의 x 좌표

는

$$\log_2(x+1)-1=1, \log_2(x+1)=2$$

$$x+1=4$$

$$\therefore x=3$$

또한, 점 D 의 x 좌표는

$$3^{x+1}-2=-1, 3^{x+1}=1$$

$$x+1=0$$

$$\therefore x=-1$$

따라서, 사각형 $ADBC$ 의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2}(\overline{AC} + \overline{BD}) \times \overline{AB}$$

$$= \frac{1}{2}(3+1) \times 2 = 4$$

정답 ⑤

12. 출제의도 : 자연수의 양의 약수의 개수를 이용하여 무한급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$3^n \cdot 5^{n+1}$ 의 양의 약수의 개수 a_n 은

$$a_n = (n+1)(n+2)$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right\}$$

$$+ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$= \frac{1}{2}$$

정답 ①

13. 출제의도 : 이항분포를 이용하여 기댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(1) > 0, f(2) > 0$ 이므로

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

따라서, 확률변수 X 는 이항분포

$B(15, \frac{1}{3})$ 을 따르므로

$$E(X) = 15 \times \frac{1}{3} = 5$$

정답 ⑤

14. 출제의도 : 무한급수와 정적분의 관계를 이해하고 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주어진 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서

$$f(x) = ax(x-3)$$

$$= a(x^2 - 3x) \quad (a < 0)$$

라 하자.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$$

$$= \int_0^1 a(x^2 - 3x) dx$$

$$\begin{aligned}
&= a \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_0^1 \\
&= a \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} \right) \\
&= -\frac{7}{6}a = \frac{7}{6}
\end{aligned}$$

$\therefore a = -1$

$\therefore f(x) = -x^2 + 3x$

따라서 $f'(x) = -2x + 3$ 이므로

$f'(0) = 3$

정답 ②

15. 출제의도 : 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

네 개의 자연수 중에서 중복을 허락하여 세 수를 선택하는 경우의 수는

$$\begin{aligned}
&{}_{4+3-1}C_3 = {}_6C_3 \\
&= \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20 \cdots \textcircled{1}
\end{aligned}$$

이때, 네 개의 자연수 1, 2, 4, 8은 각각 2^0 , 2^1 , 2^2 , 2^3 으로 나타낼 수 있고, $2^6 = 64$, $2^7 = 128$ 이므로 $\textcircled{1}$ 중에서

$(2^3, 2^3, 2^3)$, $(2^3, 2^3, 2^2)$, $(2^3, 2^3, 2)$, $(2^3, 2^2, 2^2)$ 인 경우는 제외해야 하므로 구하고자 하는 경우의 수는

$20 - 4 = 16$

정답 ③

16. 출제의도 : 수열의 일반항을 구하는 과정에서 수식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\frac{S_{n+1}}{n+1} = \sum_{k=1}^n S_k \quad (n \geq 1) \cdots \cdots (*)$$

에 의하여

$$\frac{S_n}{n} = \sum_{k=1}^{n-1} S_k \quad (n \geq 2) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(*)에서 $\textcircled{1}$ 을 빼면

$$\frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} = \sum_{k=1}^n S_k - \sum_{k=1}^{n-1} S_k$$

$$\frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} = S_n$$

$$\frac{S_{n+1}}{n+1} = \frac{S_n}{n} + S_n = \frac{(n+1)S_n}{n}$$

$$\therefore \frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{(n+1)^2}{n} \quad (n \geq 2)$$

$\textcircled{1}$ 으로부터 $S_2 = 2$ 이고,

$$S_n = \frac{S_n}{S_{n-1}} \times \frac{S_{n-1}}{S_{n-2}} \times \cdots \times \frac{S_3}{S_2} \times S_2 \quad (n \geq 3)$$

이므로

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{n^2}{n-1} \times \frac{(n-1)^2}{n-2} \times \cdots \times \frac{3^2}{2} \times 2 \\
&= n \cdot n! \times \frac{1}{2 \times 1} \\
&= n! \times \left[\frac{n}{2} \right] \quad (n \geq 3)
\end{aligned}$$

이다. 그러므로 a_n 은

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=1, 2) \\ \frac{n^2 - n + 1}{2} \times (n-1)! & (n \geq 3) \end{cases}$$

이다.

$$\therefore f(n) = (n+1)^2, \quad g(n) = \frac{n}{2}$$

$$\begin{aligned}
\therefore f(4) \times g(20) &= 5^2 \times \frac{20}{2} \\
&= 250
\end{aligned}$$

정답 ②

17. 출제의도 : 다항함수의 극값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + a \text{ 에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

이므로 $f'(x) = 0$ 에서

$$x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서, 모든 극값의 곱이 -4 이므로

$$f(0) \times f(2) = a(a-4) = -4$$

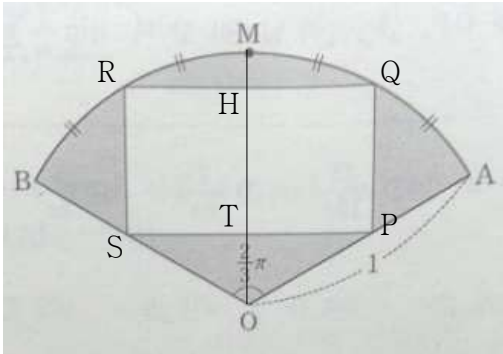
$$a^2 - 4a + 4 = 0, (a-2)^2 = 0$$

$$\therefore a = 2$$

정답 ①

18. 출제의도 : 도형에 활용된 무한등비 급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :



위의 그림 R_1 에서 직사각형의 꼭짓점을 각각 P, Q, R, S라 하자. 선분 OM과 두 선분 QR, PS의 교점을 각각 H, T라 하자.

$$\angle POQ = \angle QOM = \frac{\pi}{6} \text{ 이므로}$$

$$\overline{RQ} = 2\overline{HQ} = 2 \times \overline{OQ} \times \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$\overline{OH} = \overline{OQ} \times \cos \frac{\pi}{6}$$

$$= 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

한편, 삼각형 OPT에서

$$\angle POT = \frac{\pi}{3} \text{ 이고 } \overline{PT} = \frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

$$\overline{OT} = \frac{\overline{PT}}{\tan \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

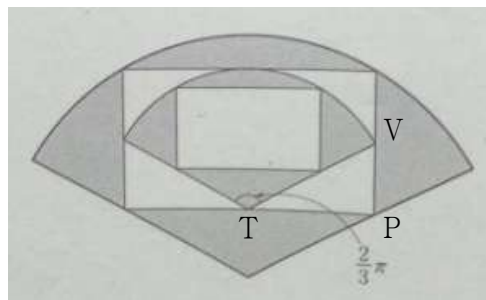
$$\therefore \overline{HT} = \overline{OH} - \overline{OT} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

따라서 직사각형 PQRS의 넓이는

$$1 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

이므로 그림 R_1 에서 색칠한 부분의 넓이 S_1 은

$$S_1 = \frac{1}{2} \times 1^2 \times \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{3} \\ = \frac{\pi - \sqrt{3}}{3}$$



위의 그림 R_2 에서 그림 R_1 의 직사각형과 그 내부에 있는 부채꼴이 만나는 한 점을 그림과 같이 점 V라 하자.

삼각형 TPV에서

$$\angle VTP = \frac{\pi}{6} \text{ 이고 } \overline{TP} = \frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

$$\overline{TV} = \frac{\overline{TP}}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

즉, 그림 R_1 에서 부채꼴의 반지름의 길이는 $\overline{OA}=1$ 이고 그림 R_2 에서 작은 부채꼴의 반지름의 길이는 $\overline{TV} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

이므로

$$S_2 = S_1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 S_1$$

.....

따라서,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S_1 + \frac{1}{3} S_1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 S_1 + \dots$$

$$= \frac{S_1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} S_1$$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{\pi - \sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{\pi - \sqrt{3}}{2}$$

정답 ④

19. 출제의도 : 행렬의 관계식을 이용하여 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\neg. AB + A + B = 2E \text{ 에서}$$

$$(A + E)(B + E) = 3E$$

$$(A + E) \left\{ \frac{1}{3}(B + E) \right\} = E$$

$$\therefore (A + E)^{-1} = \frac{1}{3}(B + E)$$

따라서, 행렬 $A + E$ 의 역행렬이 존재한다. (참)

$$\neg. (A + E)(B + E) = 3E \text{ 에서}$$

$$(B + E)(A + E) = 3E \text{ 이므로}$$

$$(A + E)(B + E) = (B + E)(A + E)$$

$$AB + A + B + E = BA + A + B + E$$

$$\therefore AB = BA \text{ (참)}$$

$$\square. A^3 + E = O \text{ 에서}$$

$$(A + E)(A^2 - A + E) = O$$

이때, \neg 에 의하여 존재하므로

$$(A + E)^{-1}(A + E)(A^2 - A + E) = O$$

$$A^2 - A + E = O$$

$$\therefore A^2 = A - E$$

$$AB + A + B = 2E \text{의 양변의 왼쪽에 행렬}$$

A 를 곱하면

$$A^2B + A^2 + AB = 2A$$

$$(A - E)B + (A - E) + AB = 2A$$

$$2AB = A + B + E$$

그런데, $AB = 2E - A - B$ 이므로

$$2(2E - A - B) = A + B + E$$

$$4E - 2A - 2B = A + B + E$$

$$3A + 3B = 3E$$

$$\therefore A + B = E \text{ (거짓)}$$

정답 ③

20. 출제의도 : 모평균의 신뢰구간을 이용하여 모집단의 확률분포를 파악하고, 정규분포에서의 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

어느 나라에서 작년에 운행된 택시의 주행거리를 확률변수 X 라 하면 X 는 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따른다.

이 나라에서 작년에 운행된 택시 중에서

16개를 임의추출하여 구한 연간 주행거리의 표본평균이 \bar{x} 이고, 이 결과를 이용하여 신뢰도 95%로 추정된 m 에 대한 신뢰구간은

$$\left[\bar{x} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{16}}, \bar{x} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{16}} \right]$$

즉, $[\bar{x} - 0.49\sigma, \bar{x} + 0.49\sigma]$

$\therefore c = 0.49\sigma$

$$\therefore P(X \leq m + c) = P\left(Z \leq \frac{0.49\sigma}{\sigma}\right)$$

$$= P(Z \leq 0.49)$$

$$= 0.5 + P(0 \leq Z \leq 0.49)$$

$$= 0.5 + 0.1879 = 0.6879$$

정답 ③

21. 출제의도 : 함수의 그래프와 접선의 관계를 이용하여 함수를 정할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (나)에 $x=1$ 을 대입하면

$$0 \leq f(1) \leq 0$$

$$\therefore f(1) = 0 \cdots \textcircled{A}$$

또한, 조건 (나)에서 $x \neq 1$ 일 때, 즉

(i) $x > 1$

$$\frac{6x-6}{x-1} \leq \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \leq \frac{2x^3-2}{x-1}$$

그런데,

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{6x-6}{x-1} = 6,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{2x^3-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} 2(x^2+x+1) = 6$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 6$$

$x < 1$ 일 때도 같은 방법으로 생각하면

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 6$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = 6 \cdots \textcircled{B}$$

따라서, 다항함수 $f(x)$ 가 조건 (나)를 만족시키기 위해서는 삼차이하의 다항함수이어야 한다.

(i) $f(x)$ 가 일차함수인 경우

최고차항의 계수가 1이면서 \textcircled{B} 을 만족시킬 수는 없다. 따라서, 조건을 만족시키는 일차함수 $f(x)$ 는 존재하지 않는다.

(ii) $f(x)$ 가 이차함수인 경우

$f(x) = x^2 + ax - 3$ (\because (가))라 하면 \textcircled{B} 에서

$$f(1) = a - 2 = 0 \quad \therefore a = 2$$

그런데, $f'(x) = 2x + 2$ 이므로 \textcircled{B} 을 만족시킬 수는 없다. 따라서, 조건을 만족시키는 이차함수 $f(x)$ 는 존재하지 않는다.

(iii) $f(x)$ 가 삼차함수인 경우

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 3$ (\because (가))라 하면

\textcircled{A} 에서

$$f(1) = a + b - 2 = 0 \quad \therefore a + b = 2 \cdots \textcircled{C}$$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ 라 하면 \textcircled{B} 에서

$$f'(1) = 2a + b + 3 = 6 \quad \therefore 2a + b = 3 \cdots \textcircled{D}$$

\textcircled{C} , \textcircled{D} 에서 $a = 1$, $b = 1$ 이므로

$$f(x) = x^3 + x^2 + x - 3$$

$$\therefore f(3) = 3^3 + 3^2 + 3 - 3 = 36$$

정답 ①

22. 출제의도 : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3}{x-2} = \frac{3^3}{3-2} = 27$$

정답 27

23. 출제의도 : 행렬로 표현된 연립일차 방정식 해가 주어졌을 때, 행렬을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ b \end{pmatrix} \text{의 해가 } x = -1, y = 2 \text{이}$$

므로

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -a+2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ b \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$-a+2 = -2, 4 = b$$

즉, $a = 4, b = 4$ 이므로

$$a+b = 8$$

정답 8

24. 출제의도 : 등차수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_1 + a_{10} = a + (a+9d)$$

$$= 2a + 9d = 22$$

이므로

$$\sum_{k=2}^9 a_k = a_2 + a_3 + \dots + a_9$$

$$\begin{aligned} &= \frac{8(a_2 + a_9)}{2} \\ &= \frac{8(a+d+a+8d)}{2} \\ &= 4(2a+9d) \\ &= 4 \times 22 = 88 \end{aligned}$$

정답 88

25. 출제의도 : 함수가 연속일 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속 이기 위해서는 $x = 3$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$$

이 성립해야 한다.

$$\begin{aligned} \therefore a &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3x+2)(x-3)}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (3x+2) \\ &= 3 \times 3 + 2 = 11 \end{aligned}$$

정답 11

26. 출제의도 : 정적분과 미분의 관계를 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\int_0^x f(x) dx = x^3 + 4x$$

의 양변을 x 에 관하여 미분하면

$$f(x) = 3x^2 + 4$$

$$\therefore f(10) = 3 \times 10^2 + 4 = 304$$

정답 304

27. 출제의도 : 접선을 활용하여 점과 직선 사이의 거리가 최소가 될 접점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{11}{3} (x > 0) \text{ 에서 } y' = x^2$$

또한, 직선 $y = x - 10$ 은 기울기가 1이므로 $x^2 = 1$ 에서 $x = 1$

따라서, $y = \frac{1}{3} + \frac{11}{3} = 4$ 이므로 점 P의

좌표는 (1,4)이다.

$$\therefore a + b = 5$$

정답 5

28. 출제의도 : 도형과 관련된 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

자연수 n 에 대하여 점 $(3n, 4n)$ 을 중심으로 하고 y 축에 접하는 원 O_n 의 방정식은

$$(x - 3n)^2 + (y - 4n)^2 = (3n)^2$$

이다.

점 $(3n, 4n)$ 과 점 $(0, -1)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{(3n)^2 + (4n + 1)^2} = \sqrt{25n^2 + 8n + 1}$$

이므로

$$a_n = \sqrt{25n^2 + 8n + 1} + 3n$$

$$b_n = \sqrt{25n^2 + 8n + 1} - 3n$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{25n^2 + 8n + 1} + 3n}{\sqrt{25n^2 + 8n + 1} - 3n}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{25 + \frac{8}{n} + \frac{1}{n^2}} + 3}{\sqrt{25 + \frac{8}{n} + \frac{1}{n^2}} - 3} \\ &= \frac{5 + 3}{5 - 3} = 4 \end{aligned}$$

정답 4

29. 출제의도 : 연속확률변수 X 을 이해하고 확률의 성질을 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$P(0 \leq X \leq 3) = 1$ 이어야 하므로

$$P(0 \leq X \leq 3) = 3a = 1$$

$$\therefore a = \frac{1}{3}$$

$$\therefore P(0 \leq X < a)$$

$$= P(0 \leq X < \frac{1}{3})$$

$$= P(0 \leq X \leq 3) - P(\frac{1}{3} \leq X \leq 3)$$

$$= 1 - \frac{1}{3}(3 - \frac{1}{3})$$

$$= 1 - \frac{1}{3} \times \frac{8}{3} = \frac{1}{9}$$

$$\therefore p + q = 10$$

정답 10

30. 출제의도 : 지수함수의 그래프와 관련된 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = 1 = 2^0 \dots \textcircled{1}$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = 4 = 2^2 \dots \textcircled{C}$$

곡선 $y=2^x$ 이 원 \textcircled{C} 과는 만나지 않고

원 \textcircled{C} 과 적어도 한 점에서 만나므로

$$a=1 \text{ 일 때, } 2^2 < b \leq 2^3$$

$$a=2 \text{ 일 때, } 2^0 \leq b < 2^1 \text{ 또는 } 2^3 < b \leq 2^4$$

$$a=3 \text{ 일 때, } 2^1 \leq b < 2^2 \text{ 또는 } 2^4 < b \leq 2^5$$

$$a=4 \text{ 일 때, } 2^2 \leq b < 2^3 \text{ 또는 } 2^5 < b \leq 2^6$$

$a=5$ 일 때,

$$2^3 \leq b < 2^4 \text{ 또는 } 2^6 < b \leq 100$$

$$a=6 \text{ 일 때, } 2^4 \leq b < 2^5$$

$$a=7 \text{ 일 때, } 2^5 \leq b < 2^6$$

$$a=8 \text{ 일 때, } 2^6 \leq b \leq 100$$

이어야 한다.

따라서 구하는 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$2^2 + (2^0 + 2^3) + (2^1 + 2^4) + (2^2 + 2^5)$$

$$+ (2^3 + 36) + 2^4 + 2^5 + 37$$

$$= (2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^5) + 37$$

$$+ (2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) + 36$$

$$= \frac{1(2^6 - 1)}{2 - 1} + \frac{2^2(2^4 - 1)}{2 - 1} + 73$$

$$= 63 + 60 + 73$$

$$= 196$$

정답 196