2014학년도 7월 고3 전국연합학력평가
정답 및 해설[수학 영역]

수학 영역

A형 정답

1	④	2	③	3	④	4	③	5	④
6	⑤	7	①	8	①	9	②	10	①
11	⑤	12	③	13	②	14	③	15	⑤
16	①	17	⑤	18	②	19	②	20	④
21	④	22	7	23	160	24	11	25	16
26	32	27	31	28	49	29	40	30	5

수학 영역

A형 해설

1. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 계산하기

$\sqrt{8}\times\sqrt[4]{4}=2^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}=2^2=4$

2. [출제의도] 행렬 계산하기

$AB-2B=(A-2E)B$

$=\begin{pmatrix}-1&2\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\1&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-6\\5&-14\end{pmatrix}$

따라서 행렬 $AB-2B$의 모든 성분의 합은 -14

3. [출제의도] 함수의 극한값 계산하기

$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^3-a}{x-2}=b$이므로

$f(x)=x^3-a$라 하면 $f(2)=0$이므로 $a=8$

$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to2}(x^2+2x+4)=12=b$

따라서 $a+b=20$

4. [출제의도] 행렬과 그래프 이해하기

그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬의 모든 성분의 개수는 16이므로 $p+q=16$

$q=$(주어진 그래프의 변의 개수)$\times2=8$, $p=8$

따라서 $p-q=0$

(예시) $\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$

5. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\displaystyle\lim_{x\to-1+0}f(x)+\lim_{x\to1-0}f(x)=0+1=1$

6. [출제의도] 조건부확률 이해하기

두 사건 A와 B는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(B\mid A)=\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$

따라서

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$=\frac{3}{8}+\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{19}{24}$

7. [출제의도] 함수의 최대, 최소 이해하기

$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$a+20$	↘	a	↗	$a+4$

$x=0$일 때, 최솟값을 가지므로 $a=-4$

따라서 $x=-2$일 때, 최댓값은 16

8. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 수학 내적 문제해결하기

함수 $y=3^{x+1}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동하면 함수 $y=3^{x-2}$의 그래프이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=3$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$이므로 $\overline{\mathrm{AC}}=3$

점 A의 좌표를 $(a, 3^{a+1})$이라 하면

점 C의 좌표는 $(a, 3^{a-2})$이므로

$\overline{\mathrm{AC}}=3^{a+1}-3^{a-2}=3\cdot3^a-\frac{1}{9}\cdot3^a=\frac{26}{9}\cdot3^a=3$

따라서 점 A의 y좌표 $3^{a+1}=\frac{81}{26}$

9. [출제의도] 연립일차방정식과 행렬의 관계를 이용하여 수학내적 문제해결하기

x, y에 대한 연립일차방정식

$\begin{pmatrix}t+5&2\\t-1&t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix}t+5&1\\t&t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$이 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 가지려면 이차정사각행렬 $\begin{pmatrix}t+5&1\\t&t\end{pmatrix}$의 역행렬은 존재하지 않아야 한다.

$t(t+5)-t=t^2+4t=0$

따라서 모든 실수 t의 값의 합은 -4

10. [출제의도] 접선의 방정식 이해하기

곡선이 $(1, 1)$을 지나므로 $a+b=-1$

$f'(x)=6x^2+a$이고 $f'(1)=2$ 이므로

$6+a=2$

$a=-4$, $b=3$

따라서 $a^2+b^2=25$

11. [출제의도] 역행렬의 성질 추론하기

ㄱ. $A*O=A^2=O$이면 $A=O$ (거짓)

반례) $A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$

ㄴ. $A*B=A*(-B)$이므로 $AB=BA$이다.

$(AB)^2=A^2B^2$ (참)

ㄷ. $A*E=A$ 이므로 $A^2-A-E=O$

$A^2-A-E=(A+E)(A-2E)+E=O$

$(A+E)(2E-A)=E$이므로

$(A+E)^{-1}=2E-A$ (참)

따라서 ㄴ, ㄷ

12. [출제의도] 무한수열의 극한을 이용하여 수학 내적 문제해결하기

사다리꼴 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{P}_{n+1}$의 꼭짓점의 좌표는

$\mathrm{P}_n(n,\ 2^n)$, $\mathrm{Q}_n\left(n,\ \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$,

$\mathrm{Q}_{n+1}\left(n+1,\ \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$, $\mathrm{P}_{n+1}(n+1,\ 2^{n+1})$

이므로 사다리꼴 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{P}_{n+1}$의 넓이

$A_n=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\left\{\left(2^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)+\left(2^{n+1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)\right\}$

따라서

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{2^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\left\{1-\left(\frac{1}{6}\right)^n+2-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}=3$

13. [출제의도] 독립시행의 정리 이해하기

시행을 5번 한 후 앞면이 나온 횟수를 k라 하면

점 P의 좌표는 $(k,\ 5-k)$

점 P가 직선 $x-y=3$ 위에 있으려면

$k-(5-k)=3$이므로 $k=4$

따라서 $k=4$일 확률은

${}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{5}{32}$

14. [출제의도] 여러 가지 수열을 이용하여 수학 내적 문제해결하기

1번 시행 : $\mathrm{P}_1(0,1)$, $\mathrm{P}_2(1,0)$

2번 시행 : $\mathrm{P}_3(0,2)$, $\mathrm{P}_4(1,1)$, $\mathrm{P}_5(2,0)$

$\vdots$

n번 시행 : $\mathrm{P}_{\frac{n(n+1)}{2}}(0,n)$, $\cdots$, $\mathrm{P}_{\frac{n(n+3)}{2}}(n,0)$

$\frac{13\times14}{2}<100<\frac{13\times16}{2}$

그러므로 $\mathrm{P}_{100}(a,\ b)$는 시행을 13번 한 후 위치할 수 있는 점이다.

$\mathrm{P}_{91}(0,\ 13)$, $\cdots$, $\mathrm{P}_{104}(13,\ 0)$

이므로 $\mathrm{P}_{100}(9,\ 4)$

따라서 $a-b=5$

15. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 추론하기

주어진 식에 의하여

$$(n+1)a_{n+1}=2na_n+n\cdot 2^{n+1}$$

이다. $b_n=\dfrac{n}{2^n}a_n$ 이라 하면

$$b_{n+1}=b_n+\boxed{n}\ \ (n\ge 1)$$

이고 $b_1=\boxed{6}$ 이므로

$$b_n=\boxed{\dfrac{n^2-n+12}{2}}\ (n\ge 1)$$

이다. 그러므로

$$a_n=\frac{2^n}{n}\times\boxed{\dfrac{n^2-n+12}{2}}\ \ (n\ge 1)$$

이다.

$f(n)=n$, $p=6$,

$$g(n)=b_n=6+\sum_{k=1}^{n-1}k\ \ (n\ge 2)$$

$$g(n)=6+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n^2-n+12}{2}$$

따라서 $f(p)+g(p)=f(6)+g(6)=6+21=27$

16. [출제의도] 무한급수와 정적분의 관계 이해하기

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k^2+2nk}{n^3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)\left\{\left(\frac{k}{n}\right)^2+2\left(\frac{k}{n}\right)+1-1\right\}\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)\left\{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2-1\right\}\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2+1\right\}\left\{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2-1\right\}\frac{1}{n}$$

$$=\int_1^2(x^2+1)(x^2-1)\,dx=\frac{26}{5}$$

17. [출제의도] 로그와 시그마의 성질을 이용하여 수학내적 문제해결하기

$a^{\log_5 16}=16^{\log_5 a}=2^{4\log_5 a}$ 이므로

$2^{4\log_5 a}=2,\ 2^2,\ 2^3,\ \cdots$

$\log_5 a=\dfrac{1}{4},\ \dfrac{2}{4},\ \dfrac{3}{4},\ \cdots$

$a_1=5^{\frac{1}{4}},\ a_2=5^{\frac{2}{4}},\ a_3=5^{\frac{3}{4}},\ \cdots$

따라서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{40}\log_5 a_k=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}+\ \cdots\ +\frac{40}{4}$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{40(40+1)}{2}=205$$

18. [출제의도] 함수의 연속 이해하기

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=1$ 이므로

$f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1 인 이차함수

$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=k$ 이므로 $f(x)=(x-1)(x-a)$

$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=1-a=k$

$h(x)=f(x)g(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로

$\displaystyle h(2)=\lim_{x\to 2+0}h(x)=\lim_{x\to 2-0}h(x)$

$h(2)=f(2)g(2)=3(2-a)$

$\displaystyle\lim_{x\to 2+0}h(x)=\lim_{x\to 2+0}(x-1)(x-a)(2-x)=0$

$\displaystyle\lim_{x\to 2-0}h(x)=\lim_{x\to 2-0}(x-1)(x-a)(x+1)$

$=3(2-a)$

따라서 $a=2$ 이므로 $k=-1$

19. [출제의도] 정적분으로 정의된 함수를 이용하여 수학내적 문제해결하기

함수 $f'(x)=(x-a)(x-b)$ 이고

(가)에서 $f(x)$ 가 $x=\dfrac{1}{2}$ 에서 극값을 가지므로

$a=\dfrac{1}{2}$ 또는 $b=\dfrac{1}{2}$

$f(a)-f(b)$

$\displaystyle=\int_0^a(t-a)(t-b)dt-\int_0^b(t-a)(t-b)dt$

$\displaystyle=\int_0^a(t-a)(t-b)dt+\int_b^0(t-a)(t-b)dt$

$\displaystyle=\int_b^a(t-a)(t-b)dt=-\frac{(a-b)^3}{6}=\frac{1}{6}$

이므로 $b-a=1$

$b=\dfrac{1}{2}$ 이면 $a=-\dfrac{1}{2}$ 이므로 모순

따라서 $a=\dfrac{1}{2}$ 이고 $b=\dfrac{3}{2}$ 이므로 $a+b=2$

20. [출제의도] 도형과 무한수열의 극한을 이용하여 수학내적 문제해결하기

C_1: $x^2+y^2=1$

C_2: $(x-2)^2+y^2=2^2$

C_3: $\{x-(2+2^2)\}^2+y^2=(2^2)^2$

$\vdots$

C_n: $\{x-(2+2^2+\cdots+2^{n-1})\}^2+y^2=(2^{n-1})^2$

원 C_n 의 중심의 x 좌표

$a_n=2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-2\ \ (n\ge 2)$

원 C_n 의 반지름의 길이 $r_n=2^{n-1}$

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{r_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-2}{2^{n-1}}=2$

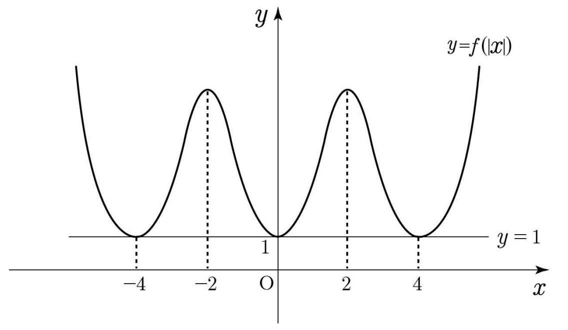
21. [출제의도] 함수의 그래프를 이용하여 수학내적 문제해결하기

사차함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1 이고

함수 $f(x)$ 의 그래프가 직선 $x=2$에 대해 대칭

이므로 $f(x)=(x-2)^4+a(x-2)^2+b$

$f(0)<f(2)$ 이고 방정식 $f(|x|)=1$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3 이려면 $f(x)$ 가 $x=0$, 4 에서 극솟값 1 을 갖고 $x=2$ 에서 극댓값을 가져야 한다.



$f(0)=f(4)=1$에서 $16+4a+b=1$

$f'(x)=4(x-2)^3+2a(x-2)$에서

$f'(0)=f'(4)=0$이므로 $-32-4a=0$

$a=-8$, $b=17$ 이므로

$f(x)=(x-2)^4-8(x-2)^2+17$

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값 $f(2)=17$

22. [출제의도] 무한급수의 성질 이해하기

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-7)$ 이 수렴하므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-7)=0$

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=7$

23. [출제의도] 이항정리 이해하기

$(x+2)^6$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는

${}_6C_3\cdot 2^3=160$

24. [출제의도] 미분계수 계산하기

$f'(x)=3x^2-1$이므로 $f'(2)=11$

25. [출제의도] 등차수열 이해하기

수열 $\{b_n\}$ 은 공차가 3 인 등차수열이므로

$b_n=3n-3+b_1$

주어진 조건에 의하여

$a_n=b_n-2n=n-3+b_1$

$a_{10}=7+b_1=11$

$b_1=4$

따라서 $b_5=4+12=16$

26. [출제의도] 로그방정식을 이용하여 수학외적 문제해결하기

주어진 조건에 의하여

$E_1=300R\log_a 16$, $E_2=240R\log_a x$ 이고,

$E_1=E_2$ 이므로 $300R\log_a 16=240R\log_a x$

$\dfrac{5}{4}\log_a 16=\log_a 32=\log_a x$

따라서 $x=32$

27. [출제의도] 상용로그의 성질 이해하기

$\log x=1+\alpha\ (0<\alpha<1)$ 이라 하자.

$\log\sqrt{x}=\dfrac{1+\alpha}{2}$ 이고 $\log\dfrac{1}{x}=-2+(1-\alpha)$

주어진 조건에 의하여 $\dfrac{1+\alpha}{2}=5(1-\alpha)$

$\alpha=\dfrac{9}{11}$ 이므로 $\log x=1+\dfrac{9}{11}=\dfrac{20}{11}$

따라서 $p+q=31$

28. [출제의도] 확률의 덧셈정리를 이용하여 수학 외적 문제해결하기

[실행 3]까지 할 때, 상자 B 의 흰 공의 개수가 홀수가 되려면

(i) [실행 2]에서 상자 B 에서 검은 공 2개를 상자 A 로 넣고 [실행 3]에서는 상자 A 에서 검은 공 1개, 흰 공 1개를 상자 B 로 넣는 경우

$\dfrac{{}_{10}\mathrm{C}_2}{{}_{12}\mathrm{C}_2}\times\dfrac{{}_8\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\dfrac{8}{33}$

(ii) [실행 2]에서 상자 B 에서 검은 공 1개, 흰 공 1개를 상자 A 로 넣고 [실행 3]에서는 상자 A 에서 흰 공 2개를 상자 B 로 넣는 경우

$\dfrac{{}_{10}\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_{12}\mathrm{C}_2}\times\dfrac{{}_9\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\dfrac{8}{33}$

(i), (ii)에 의하여 $\dfrac{8}{33}+\dfrac{8}{33}=\dfrac{16}{33}$

따라서 $p+q=49$

29. [출제의도] 정적분의 성질 추론하기

(가)에서 함수 $f(x)$의 그래프는 y축 대칭

(다)에서

$$\int_{-1}^{1}(2x+3)f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}3f(x)\,dx=15$$

이므로 $\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=5$

(나)에 의해 $\displaystyle\int_{-6}^{10}f(x)dx=8\int_{-1}^{1}f(x)dx=40$

30. [출제의도] 도형과 무한등비급수 추론하기

$S_1=2\{$(삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$ 의 넓이)

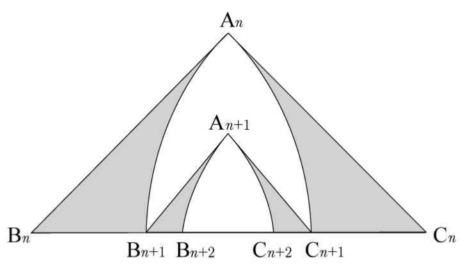
$-$(부채꼴 $\mathrm{B_1A_1C_2}$ 의 넓이)$\}$

$=2\left(4-\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot\dfrac{\pi}{4}\right)=2(4-\pi)$

$S_2=2\{$(삼각형 $\mathrm{A_2B_2C_2}$ 의 넓이)

$-$(부채꼴 $\mathrm{B_2A_2C_3}$ 의 넓이)$\}$

$=2(4-\pi)(\sqrt{2}-1)^2$



$\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}=2l_n$, $\overline{\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}}=2l_{n+1}$이라 하면

$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_{n+1}}=\sqrt{2}\,l_n$ 이고

$\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}+\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}}=\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_{n+1}}$ 이므로

$l_n+l_{n+1}=\sqrt{2}\,l_n$

$l_{n+1}=(\sqrt{2}-1)l_n$

$S_{n+1}=(\sqrt{2}-1)^2S_n$

$\dfrac{1}{4-\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\dfrac{1}{4-\pi}\cdot\dfrac{2(4-\pi)}{1-(\sqrt{2}-1)^2}=1+\sqrt{2}$

$a=1$, $b=2$

따라서 $a^2+b^2=5$