2015학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가

수학영역 B형 정답 및 풀이

01.①	02.③	03.②	04.⑤	05.④
06.④	07.①	08.④	09.③	10.②
11.⑤	12.②	13.④	14.③	15.①
16.⑤	17.②	18.③	19.③	20.⑤
21.①	22.7	23.3	24.17	25.16
26.50	27.35	28.5	29.14	
30.167				

1. **출제의도** : 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\log_3 4+\log_3 \frac{3}{4}=\log_3\left(4\times\frac{3}{4}\right)$$
$$=\log_3 3$$
$$=1$$

정답 ①

2. **출제의도** : 행렬의 연산을 할 수 있는가?

정답풀이 :

$$A+E=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2 & a\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$

이때 행렬 $A+E$의 모든 성분의 합이 9이므로

$2+a+1+3=9$

$\therefore\ a=3$

정답 ③

3. **출제의도** : 삼각함수의 공식을 이용하여 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$$
$$=1-2\left(\frac{2}{3}\right)^2$$
$$=\frac{1}{9}$$

정답 ②

4. **출제의도** : 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=e^{3x}+10x$에서

$f'(x)=3e^{3x}+10$ 이므로

$f'(0)=3+10=13$

정답 ⑤

5. **출제의도** : 삼각함수의 합성을 이용하여 삼각함수의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x)=\sqrt{5}\sin x+2\cos x+a$$
$$=\sqrt{(\sqrt{5})^2+2^2}\sin(x+\alpha)+a$$
$$=3\sin(x+\alpha)+a$$

$\left(\text{단, } \sin\alpha=\frac{2}{3},\ \cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$

에서 $-1\le\sin(x+\alpha)\le 1$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $3+a$

$3+a=7$에서

$a=4$

정답 ④

6. **출제의도** : 치환적분법을 이용하여

정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\ln x = t$라 하면 $x=e$일 때 $t=1$, $x=e^3$일 때 $t=3$ 이고 $\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}=1$ 이므로

$$\int_e^{e^3}\frac{\ln x}{x}dx=\int_1^3 t\,dt$$

$$=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^3=4$$

정답 ④

7. **출제의도** : 연립일차방정식이 $x=0$, $y=0$이외의 해를 가질 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2\\1\end{pmatrix}$에서

$A\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&a+2\\1&1\end{pmatrix}$

$\therefore\ A=\begin{pmatrix}1&a+2\\1&1\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix}1&a+2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

이 연립일차방정식이 $x=0$, $y=0$이외의 해를 가져야 하므로

$1\times1-(a+2)\times1=1-a-2=0$

$\therefore a=-1$

정답 ①

8. **출제의도** : 주어진 수열의 합을 이용하여 수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=2n+1$에서

$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)$

$=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_{n+1}-a_n)$

$=a_{n+1}-a_1$

$=2n+1$

$\therefore\ a_{n+1}=a_1+2n+1$

$n=9$를 대입하면 $a_1=15$이므로

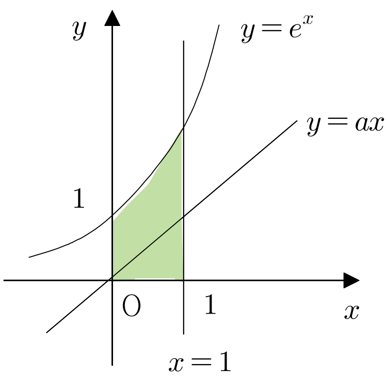
$a_{10}=15+2\times9+1$

$=34$

정답 ④

9. **출제의도** : 곡선과 x축, y축 및 직선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 이등분하는 직선의 기울기를 정적분을 이용하여 구할 수 있는가?

정답풀이 :



위의 그림에서 함수 $y=e^x$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 영역의 넓이 S는

$$S=\int_0^1 e^x dx$$

EBS

$= [e^x]_0^1 = e-1$

S가 직선 $y=ax$에 의하여 이등분되므로

$\frac{1}{2}\times1\times a=\frac{1}{2}(e-1)$

$\therefore\ a=e-1$

정답 ③

10. **출제의도** : 식이 주어진 실생활 문제를 로그의 성질을 이용하여 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

$L_A^2=100\times20^2\times\log_3 R_A \cdots$㉠

$L_B^2=100\times30^2\times\log_3 R_B \cdots$㉡

이고 $\frac{R_A}{R_B}=27$에서

$\log_3\frac{R_A}{R_B}=\log_3 27=3$ 이므로

$\log_3 R_A-\log_3 R_B=3$

$\therefore\ \log_3 R_A=3+\log_3 R_B$

또한, $L_A^2=400^2=100^2\times4^2$이므로 ㉠에 대입하면

$100^2\times4^2=100\times20^2\times(3+\log_3 R_B)$

$4=3+\log_3 R_B$

$\log_3 R_B=1$

따라서 ㉡에 대입하면

$L_B^2=100\times30^2$

$\therefore\ L_B=10\times30=300$

정답 ②

11. **출제의도** : 역변환과 합성변환을 이해하고 이를 이용하여 점을 이동시킬 수 있는가?

정답풀이 :

일차변환 g를 나타내는 행렬 $\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$의 역행렬이 $\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}$이므로

합성변환 $g^{-1}\circ f$를 나타내는 행렬은

$\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&a\\b&1\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6&3a\\2b&2\end{pmatrix}$

이다. 이때 합성변환 $g^{-1}\circ f$에 의하여 점 $(1, 2)$가 점 $(5, 1)$로 옮겨지므로

$\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6&3a\\2b&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6+6a\\2b+4\end{pmatrix}$

따라서

$5=\frac{1}{6}(6+6a),\ 1=\frac{1}{6}(2b+4)$

이므로 $a=4,\ b=1$

$\therefore\ a+b=5$

정답 ⑤

12. **출제의도** : 쌍곡선의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

쌍곡선 $\frac{x^2}{8}-y^2=1$ 위의 점 $A(4,1)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{4x}{8}-y=1,\ y=\frac{1}{2}x-1$

따라서 $B(2,0)$ 이다.

또한, 초점 F의 좌표가 $(3,0)$이므로 삼각형 FAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$

정답 ②

13. **출제의도** : 수열의 일반항과 합의

관계를 이해하고 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 - n = S_n$이라 하면

(i) $n=1$ 일 때,

$a_1 = S_1 = 0$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 - n - (n-1)^2 + (n-1) \\ &= 2n - 2\ (n \geq 2) \end{aligned}$$

(i), (ii)에서

$a_n = 2n - 2\ (n \geq 1)$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{10} k a_{4k+1} &= \sum_{k=1}^{10} k\{2(4k+1)-2\} \\ &= \sum_{k=1}^{10} 8k^2 \\ &= 8 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} \\ &= 3080 \end{aligned}$$

정답 ④

14. 출제의도 : 분수부등식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\frac{x-3}{f(x)} \geq 1$ 에서 $\frac{x-3}{f(x)} - 1 \geq 0$ 이므로

$\frac{x-3-f(x)}{f(x)} \geq 0$

$\{f(x)-(x-3)\}f(x) \leq 0$ (단, $f(x) \neq 0$)

또한,

$$f(x) = \begin{cases} 2x-12 & (x \geq 4) \\ -2x+4 & (x < 4) \end{cases}$$

이므로

(i) $x \geq 4$일 때,

$\{2x-12-(x-3)\}(2x-12) \leq 0$, $x \neq 6$

$(x-9)(x-6) \leq 0$, $x \neq 6$

$\therefore\ 6 < x \leq 9$

따라서, 자연수 x는 7, 8, 9 이다.

(ii) $x < 4$일 때,

$\{-2x+4-(x-3)\}(-2x+4) \leq 0$, $x \neq 2$

$(-3x+7)(-2x+4) \leq 0$, $x \neq 2$

$(3x-7)(x-2) \leq 0$, $x \neq 2$

$\therefore\ 2 < x \leq \frac{7}{3}$

따라서 자연수 x는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 x의 값의 합은

$7+8+9=24$

정답 ③

15. 출제의도 : 도형에 활용된 무한등비급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

R_1에 색칠된 부채꼴은 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$이므로

$S_1 = \frac{1}{2} \times 1^2 \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$

또, 사각형 $A_2B_2C_2D_2$에서 $\overline{A_2B_2} = x$라 하면 $\overline{B_2C_2} = 2x$이므로

$\overline{A_1C_2} = \overline{A_1A_2} + \overline{A_2C_2}$

$2 = 1 + \sqrt{x^2 + (2x)^2}$

$\sqrt{5}x = 1$

$\therefore\ x = \frac{\sqrt{5}}{5}$

이때,

$$\frac{\overline{\mathrm{A_2B_2}}}{\overline{\mathrm{A_1B_1}}}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{5}}{1}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

이므로

$$S_2=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\times\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2$$

…

따라서,

$$\lim_{n\to\infty}S_n$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\times\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2+\frac{\pi}{4}\times\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^4+\cdots$$

$$=\frac{\frac{\pi}{4}}{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}$$

$$=\frac{\frac{\pi}{4}}{1-\frac{1}{5}}$$

$$=\frac{5}{16}\pi$$

정답 ①

16. 출제의도 : 행렬의 관계식을 이용하여 참,거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. $A^2=-A$이므로

$A^3=-A^2=-(-A)=A$ (참)

ㄴ. $B^2=-A^2+A+E$

$=A+A+E$

$=2A+E$

이므로

$AB^2=A(2A+E)=2A^2+A$

$=-2A+A=-A$

$B^2A=(2A+E)A=2A^2+A$

$=-2A+A=-A$

따라서 $AB^2=B^2A$ (참)

ㄷ. ㄴ에서 $B^2=2A+E$이므로

양변을 제곱하면

$B^4=(2A+E)^2=4A^2+4A+E$

$=4(-A)+4A+E$

$=E$

즉, $B\cdot B^3=B^3\cdot B=E$

따라서, 행렬 B의 역행렬은 B^3이다. (참)

그러므로 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

정답 ⑤

17. 출제의도 : 타원의 정의를 이해하고 주어진 조건을 활용하여 타원의 방정식을 구할 수 있는가?

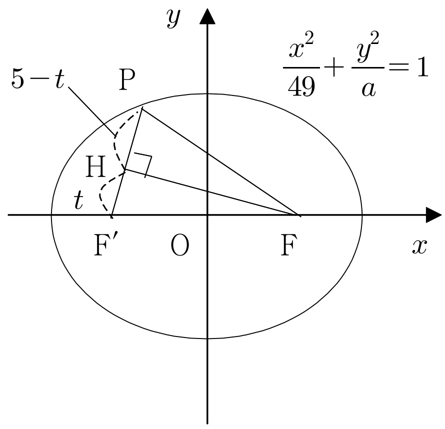
정답풀이 :

타원 $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{a}=1$에서 타원의 정의에 의해

$\overline{\mathrm{FP}}+\overline{\mathrm{PF'}}=2\sqrt{49}=14$

이고 $\overline{\mathrm{FP}}=9$이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}=14-9=5$



위의 그림에서 $\overline{\mathrm{HF'}}=t(0<t<5)$라 하면

$\overline{\mathrm{HP}}=5-t$

직각삼각형 PHF에서

$\overline{\mathrm{HP}}^2+\overline{\mathrm{FH}}^2=\overline{\mathrm{PF}}^2$이므로

$(5-t)^2+(6\sqrt{2})^2=9^2$

$(5-t)^2=9$

$0<t<5$이므로 $t=2$

따라서 직각삼각형 FHF′에서

$\overline{\mathrm{FF'}}=\sqrt{2^2+(6\sqrt{2})^2}=\sqrt{76}$

초점 F의 좌표를 $(c,0)$이라 하면

$c=\frac{\sqrt{76}}{2}$이고 $c^2=49-a$이므로

$a=49-\frac{76}{4}=30$

정답 ②

18. 출제의도 : 함수의 그래프를 보고 극한값과 연속성을 판단할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. $\lim_{x\to1-0}f(x)=0$, $\lim_{x\to1+0}f(x)=1$ 이므로

$\lim_{x\to1-0}f(x)<\lim_{x\to1+0}f(x)$ (참)

ㄴ. $\frac{1}{t}=x$라 하면 $t\to\infty$일 때 $x\to+0$이므로

$\lim_{t\to\infty}f(\frac{1}{t})=\lim_{x\to+0}f(x)=1$ (참)

ㄷ. $\lim_{x\to3+0}f(f(x))=\lim_{t\to2-0}f(t)=1$

$\lim_{x\to3-0}f(f(x))=\lim_{t\to2+0}f(t)=3$

즉, $x=3$에서 함수 $f(f(x))$의 극한값이 존재하지 않으므로 함수 $f(f(x))$는 $x=3$에서 불연속이다. (거짓)

따라서 <보기>에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ 이다.

정답 ③

19. 출제의도 : 로그함수의 평행이동을 이용하여 관계식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $y=f(x)$와 x축과의 교점의 y좌표는 0이므로

$\log_a(bx-1)=0$

$bx-1=1$

$\therefore\ x=\frac{2}{b}$

그러므로 x축과의 교점은 $\left(\frac{2}{b},\ 0\right)$이다.

한편,

$$y=\log_b(ax-1)$$
$$=\log_b a\left(x-\frac{1}{a}\right)$$
$$=\log_b\left(x-\frac{1}{a}\right)+\log_b a$$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 $y=\log_b x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{a}$만큼, y축의 방향으로 $\log_b a$만큼 평행이동한 것이다.

그러므로 곡선 $y=g(x)$의 점근선은

$$x=\frac{1}{a}$$

이다. 이때, 점 $\left(\frac{2}{b},\ 0\right)$이 직선 $x=\frac{1}{a}$위에 있어야 하므로

$$\frac{2}{b}=\frac{1}{a}$$

$\therefore\ b=2a$

한편, $b>1$에서 $a=\frac{1}{2}b$이므로 $a>\frac{1}{2}$이고 조건에서 $a<1$이므로

$$\frac{1}{2}<a<1$$

이다.

정답 ③

20. 출제의도 : 중복조합을 이용하여 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (나)에 의하여

$\frac{b-a}{2-1}\neq\frac{c-b}{3-2}$, $b-a\neq c-b$

$\therefore\ 2b\neq a+c$

따라서 조건 (가)에서 $a+b+c=6$이므로 $b\neq 2$ 이어야 한다.

이때, 조건 (가)를 만족시키는 음이 아닌 정수 a,b,c의 순서쌍 (a,b,c)의 개수는

$${}_3H_6={}_{3+6-1}C_6={}_8C_6$$

$$={}_8C_2=\frac{8\times 7}{2\times 1}=28$$

$b=2$일 때, $a+c=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a,c의 순서쌍 (a,c)의 개수는

$${}_2H_4={}_{2+4-1}C_4={}_5C_4$$

$$={}_5C_1=5$$

따라서 구하고자 하는 순서쌍의 개수는

$28-5=23$

정답 ⑤

21. 출제의도 : 합성함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$g(\theta)=\theta-\frac{1}{2}\times 1^2\times\sin 2\theta$$

$$=\theta-\boxed{\frac{1}{2}\sin 2\theta}\cdots ㉠$$

$t=\tan\theta$이므로

$g(\theta)=f(t)=f(\tan\theta)$

$g'(\theta)=f'(\tan\theta)\sec^2\theta$

$=f'(t)\boxed{\sec^2\theta}$

한편, ㉠에서

$$g'(\theta)=1-\frac{1}{2}\times\cos 2\theta\times 2$$

$$=1-\cos 2\theta$$

이므로

$$f'(t)=\frac{g'(\theta)}{\sec^2\theta}$$

$$=\frac{1-\cos 2\theta}{1+\tan^2\theta}$$

$$=\frac{1-(1-2\sin^2\theta)}{1+\tan^2\theta}$$

$$=\frac{2\sin^2\theta}{1+\tan^2\theta}$$

$t=2$일 때, $\tan\theta=2$이므로

$$\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}\left(\because\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore\ f'(2)=\frac{2\times\frac{4}{5}}{1+4}=\boxed{\frac{8}{25}}$$

$\therefore$ (가) $h_1(\theta)=\dfrac{1}{2}\sin 2\theta$

(나) $h_2(\theta)=\sec^2\theta$

(다) $a=\dfrac{8}{25}$

$\therefore\ a\times h_1\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\times h_2\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=\dfrac{8}{25}\times\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{2}\times\sec^2\dfrac{\pi}{4}$

$=\dfrac{8}{25}\times\dfrac{1}{2}\times 2$

$=\dfrac{8}{25}$

정답 ①

22. **출제의도** : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+7x)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{\ln(1+7x)}{7x}\times 7\right\}$

$=1\times 7=7$

정답 7

23. **출제의도** : 이항정리를 활용하여 항의 계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\left(ax+\dfrac{1}{x}\right)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r\,(ax)^{4-r}\left(\dfrac{1}{x}\right)^r={}_4C_r\,a^{4-r}x^{4-2r}$

이때, 상수항은 $r=2$일 때이므로 상수항은

${}_4C_2\,a^2=6a^2=54$

$a^2=9$

$a>0$이므로 $a=3$

정답 3

24. **출제의도** : 일차변환의 성질을 이용하여 행렬을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(3X_1+X_2)=3f(X_1)+f(X_2)$

$=3\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}11\\6\end{pmatrix}$

따라서 $a=11$, $b=6$ 이므로

$a+b=17$

정답 17

25. **출제의도** : 등비수열의 일반항과 무한등비급수의 합을 이용하여 수열의 첫째항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r $(r>0)$라 하자.

$a_1+a_2=a+ar$

$=a(1+r)=20$

$\therefore\ a=\dfrac{20}{1+r}$ $\cdots$ ㉠

$\sum\limits_{n=3}^{\infty}a_n=\dfrac{a_3}{1-r}=\dfrac{ar^2}{1-r}$

$=\dfrac{20r^2}{(1+r)(1-r)}$

$=\dfrac{20r^2}{1-r^2}$

$$=\frac{4}{3}$$

$60r^2=4-4r^2$, $64r^2=4$

$$r^2=\frac{1}{16}$$

$r>0$이므로 $r=\frac{1}{4}$

따라서 ㉠에서

$$a=\frac{20}{1+\frac{1}{4}}=16$$

정답 16

26. 출제의도 : 두 접선이 수직일 조건을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(e)\times g'(e)=-1\cdots$㉠

$$g'(x)=f'(x)\ln x^4+f(x)\times\frac{1}{x^4}\times 4x^3$$

$$=f'(x)\ln x^4+\frac{4f(x)}{x}$$

$$\therefore\ g'(e)=f'(e)\ln e^4+\frac{4f(e)}{e}$$

$$=4f'(e)+\frac{4(-e)}{e}$$

$$=4f'(e)-4$$

㉠에 대입하면

$f'(e)\{4f'(e)-4\}=-1$

$4\{f'(e)\}^2-4f'(e)+1=0$

$\{2f'(e)-1\}^2=0$

$$\therefore\ f'(e)=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ 100f'(e)=100\times\frac{1}{2}=50$$

정답 50

27. 출제의도 : 무리방정식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sqrt{g(x)}-\sqrt{g(x)-\{f(x)\}^2}=f(x)$에서

$\sqrt{g(x)}-f(x)=\sqrt{g(x)-\{f(x)\}^2}$

양변을 제곱하면

$g(x)-2f(x)\sqrt{g(x)}+\{f(x)\}^2=g(x)-\{f(x)\}^2$

$2f(x)\{f(x)-\sqrt{g(x)}\}=0$

$\therefore\ f(x)=0$ 또는 $f(x)=\sqrt{g(x)}$

(i) $f(x)=0$에서

$-x+2=0$ $\qquad\therefore\ x=2$

(ii) $f(x)=\sqrt{g(x)}\cdots$㉠에서

양변을 제곱하면

$\{f(x)\}^2=g(x)$

$$(-x+2)^2=\frac{1}{2}(x-1)$$

$$x^2-\frac{9}{2}x+\frac{9}{2}=0$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-3)=0$$

$\therefore\ x=\frac{3}{2}$ 또는 $x=3$

한편, ㉠에서 $f(x)\geq 0$이므로

$-x+2\geq 0$

$\therefore\ x\leq 2$

따라서 ㉠을 만족시키는 해는

$$x=\frac{3}{2}$$

따라서 (i), (ii)에서 구하는 모든 실근의 합 a는

$$a=2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$$

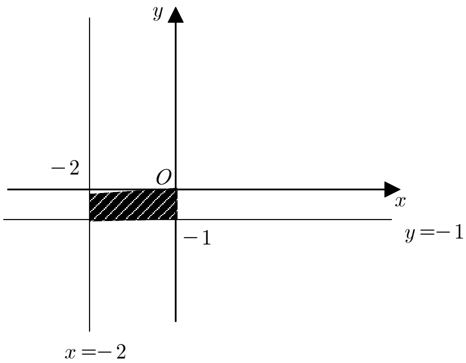
$\therefore\ 10a = 10 \times \frac{7}{2} = 35$

정답 35

28. 출제의도 : 포물선의 정의를 이용하여 선분의 길이의 제곱의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

포물선 C_1 : $x^2 = 4y$의 준선의 방정식은 $y = -1$ 이고 중심이 C_1 위에 있고 초점 F_1을 지나는 원은 준선 $y = -1$과 접하므로 원 C_1은 $y \geq -1$ 인 영역에 존재한다. 포물선 C_2 : $y^2 = 8x$의 준선의 방정식은 $x = -2$ 이고 중심이 C_2 위에 있고 초점 F_2를 지나는 원은 준선 $x = -2$에 접하므로 원 C_2는 $x \geq -2$ 인 영역에 존재한다. 따라서, 두 원 C_1, C_2의 교점 P가 제 3 사분면에서 존재해야 하므로 점 P가 존재하는 영역은 그림의 경계를 포함하는 빗금친 부분이다.



(단, 축은 제외한다)

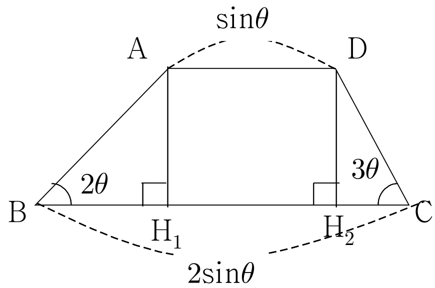
따라서 점 P의 좌표가 $(-2, -1)$일 때 $\overline{OP}^2$이 최대가 되므로 구하고자 하는 최댓값은

$(-2)^2 + (-1)^2 = 5$

정답 5

29. 출제의도 : 도형과 관련된 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :



위의 그림에서 두 점 A, D에서 변 BC에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$라 하면

$\overline{\mathrm{AH_1}} = \overline{\mathrm{BH_1}} \times \tan 2\theta$

$\overline{\mathrm{DH_2}} = \overline{\mathrm{CH_2}} \times \tan 3\theta$

$\therefore\ \overline{\mathrm{BH_1}} = \dfrac{\overline{\mathrm{AH_1}}}{\tan 2\theta}$, $\overline{\mathrm{CH_2}} = \dfrac{\overline{\mathrm{DH_2}}}{\tan 3\theta}$

한편 $\overline{\mathrm{AH_1}} = \overline{\mathrm{DH_2}} = h$라 하면

$$\overline{\mathrm{BH_1}} + \overline{\mathrm{CH_2}} = \frac{h}{\tan 2\theta} + \frac{h}{\tan 3\theta}$$

$$= \overline{\mathrm{BC}} - \overline{\mathrm{AD}}$$

$$= 2\sin\theta - \sin\theta = \sin\theta$$

$$\therefore\ h = \frac{\sin\theta}{\dfrac{1}{\tan 2\theta} + \dfrac{1}{\tan 3\theta}}$$

따라서 사다리꼴 ABCD의 넓이 $S(\theta)$는

$$S(\theta) = \frac{1}{2}(\sin\theta + 2\sin\theta)\left(\frac{\sin\theta}{\dfrac{1}{\tan 2\theta} + \dfrac{1}{\tan 3\theta}}\right)$$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{\sin^2\theta}{\dfrac{1}{\tan 2\theta} + \dfrac{1}{\tan 3\theta}}$$

$$\therefore\ \lim_{\theta \to +0} \frac{S(\theta)}{\theta^3}$$

$$= \lim_{\theta \to +0} \frac{3\sin^2\theta}{2\theta^3\left(\frac{1}{\tan 2\theta}+\frac{1}{\tan 3\theta}\right)}$$

$$= \frac{3}{2}\lim_{\theta \to +0}\left[\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\times\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\times\frac{2\theta}{\tan 2\theta}+\frac{1}{3}\times\frac{3\theta}{\tan 3\theta}\right)}\right]$$

$$= \frac{3}{2}\times 1\times\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = \frac{9}{5}$$

$\therefore\ p=5,\ q=9$

$\therefore\ p+q=14$

정답 14

30. 출제의도 : 함수의 그래프를 추론한 후 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (나)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점

(3, 7), (4, 8), (5, 10), (6, 13)

을 지난다.

이때, 두 점 (3, 7), (4, 8)을 잇는 직선의 기울기는 $\frac{8-7}{4-3}=1$ 이고 조건 (가)에 의하여

$f(x)=x+4\ (3 \le x \le 4)$

두 점 (5, 10), (6, 13)을 잇는 직선의 기울기는 $\frac{13-10}{6-5}=3$이고 조건 (가)에 의하여

$f(x)=3x-5\ (5 \le x \le 6)$

또한, 조건 (다)에 의하여 구간 $[4,5]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 이차함수의 그래프의 일부이므로

$f(x)=px^2+qx+r$라 하면

$f'(x)=2px+q$ 이고 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$f'(4)=8p+q=1\cdots$㉠

$f'(5)=10p+q=3\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 $p=1,\ q=-7$

즉, $f(x)=x^2-7x+r$ 에서 $f(4)=8$이므로 $r=20$ 이다.

$\therefore\ f(x)=x^2-7x+20\ (4 \le x \le 5)$

$\therefore\ a=\int_3^6 f(x)dx$

$=\int_3^4 f(x)dx+\int_4^5 f(x)dx+\int_5^6 f(x)dx$

$=\int_3^4 (x+4)dx+\int_4^5 (x^2-7x+20)dx$

$+\int_5^6 (3x-5)dx$

$=[\frac{1}{2}x^2+4x]_3^4+[\frac{1}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2+20x]_4^5$

$+[\frac{3}{2}x^2-5x]_5^6$

$=\frac{15}{2}+\frac{53}{6}+\frac{23}{2}=\frac{167}{6}$

$\therefore\ 6a=6\times\frac{167}{6}=167$

정답 167