수학영역 A형 정답 및 풀이

01. ①	02. ④	03. ③	04. ②	05. ①
06. ⑤	07. ②	08. ③	09. ③	10. ⑤
11. ④	12. ④	13. ⑤	14. ②	15. ①
16. ②	17. ④	18. ①	19. ⑤	20. ③
21. ⑤	22. 3	23. 21	24. 32	25. 5
26. 34	27. 12	28. 8	29. 10	30. 71

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$3\times 8^{\frac{2}{3}} = 3\times\left(2^3\right)^{\frac{2}{3}}$$
$$= 3\times 2^2$$
$$= 12$$

정답 ①

2. 출제의도 : 행렬의 연산의 정의를 이용하여 행렬을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$2A+B = 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $2A+B$의 모든 성분의 합은 9이다.

정답 ④

3. 출제의도 : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to 2}(x+1)$$
$$= 2+1$$
$$= 3$$

정답 ③

4. 출제의도 : 그래프의 연결 관계를 행렬로 표현하였을 때 행렬의 성분 중 1의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

그래프의 연결 관계를 나타내는 행렬의 성분 중 1의 개수는 그래프의 변의 개수의 2배이므로

$$4\times 2 = 8$$

정답 ②

5. 출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\log_8 2 + \log_8 4$$
$$= \log_8 (2\times 4)$$
$$= \log_8 8$$
$$= 1$$

정답 ①

6. 출제의도 : 등차수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_1 = 2$이므로

$a_3 = a_1 + 2d = 10$

$\therefore\ d = 4$

따라서,

$a_5 = 2+4\times4 = 18$

정답 ⑤

7. **출제의도** : 함수의 연속의 정의를 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1} f(x) = f(1)$

을 만족시킨다.

$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1}(2x+5) = 7$

$f(1) = a$

이므로 $a=7$

정답 ②

8. **출제의도** : 등비수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

첫째항이 3이고 공비가 3이므로 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n = 3\cdot3^{n-1} = 3^n$

따라서,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-7}{3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{7}{3^n}}{1}$$

$$= 3$$

정답 ③

9. **출제의도** : 미분계수의 정의와 도함수를 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x) = x^2+4x$에서

$f'(x) = 2x+4$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{2h}$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\times\frac{1}{2}$$

$$= f'(1)\times\frac{1}{2}$$

$$= 6\times\frac{1}{2}$$

$$= 3$$

정답 ③

10. **출제의도** : 여러 가지 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{k(k+1)}$$

$$= 4\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$= 4\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$= 4\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{4n}{n+1}$$

$$= \frac{15}{4}$$

에서

$16n = 15n+15$

$\therefore\ n = 15$

정답 ⑤

11. **출제의도** : 연립방정식의 해가 무수히 많을 조건을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\left\{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2-k & 0 \\ 0 & 4-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\cdots$ ㉠

연립방정식 ㉠이 무수히 많은 해를 가지므로

$(2-k)(4-k)=0$에서

$k=2$ 또는 $k=4$

따라서 모든 k의 값의 합은 6이다.

정답 ④

12. **출제의도** : 행렬의 거듭제곱을 이용하여 수열의 극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 4^2 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 4^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & 4^3 \end{pmatrix}$

$\cdots$

$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}$ $(n \geq 1)$

그러므로

$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^n \\ 4^n \end{pmatrix}$

$\therefore\ x_n = 3 \cdot 2^n,\ y_n = 4^n$

따라서,

$\lim_{n\to\infty}\frac{(x_n)^2}{y_n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^2 \cdot 4^n}{4^n+1}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{3^2}{1+\left(\frac{1}{4}\right)^n}$

$=9$

정답 ④

13. **출제의도** : 함수의 그래프로부터 우극한과 좌극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim_{x\to -1-0} f(x) = 2$

$\lim_{x\to 1+0} f(x) = 3$이므로

$\lim_{x\to -1-0} f(x) + \lim_{x\to 1+0} f(x) = 2+3=5$

정답 ⑤

14. **출제의도** : 미분법을 이용하여 속도를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

시각 t에서의 위치가 $x=-t^2+4t$이므로 속도를 v라 하면

$v = \frac{dx}{dt}$

$=-2t+4$

$t=a$에서 속도가 0이므로

$-2a+4=0 \quad \therefore\ a=2$

정답 ②

15. 출제의도 : 실생활에서 로그로 나타내어진 수식을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$L^2 = 100D^2 \times \log_3 R$에서

$D=20$, $R=81$이므로

$L^2 = 100 \times 20^2 \times \log_3 81$

$= 100 \times 20^2 \times 4$

$L>0$이므로

$L = 10 \times 20 \times 2 = 400$

정답 ①

16. 출제의도 : 미분을 이용하여 극댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + a$에서

$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$

$= 3(x^2 - 6x + 8)$

$= 3(x-2)(x-4)$

이때, $f'(x)=0$에서 $x=2$, $x=4$이므로 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$20+a$	$\searrow$	$16+a$	$\nearrow$

따라서, $x=2$에서 극댓값 $20+a$를 가지므로

$20+a=10$

$\therefore\ a=-10$

정답 ②

17. 출제의도 : 수열의 일반항을 구하는 과정에서 수식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$2a_{n+1} = 3a_n - \frac{6n+2}{(n+1)!}$$

$$= 3a_n - \frac{6(n+1)-4}{(n+1)!}$$

$$= 3a_n - \frac{6(n+1)}{(n+1)!} + \frac{4}{(n+1)!}$$

$$2a_{n+1} - \frac{4}{(n+1)!} = 3a_n - \frac{6}{n!}$$

$$= 3a_n - 3 \times \boxed{\frac{2}{n!}}$$

$b_n = a_n - \boxed{\frac{2}{n!}}$라 하면

$2a_{n+1} - \frac{4}{(n+1)!} = 2b_{n+1}$,

$3a_n - 3 \times \frac{2}{n!} = 3b_n$이므로

$2b_{n+1} = 3b_n$

이다. $b_{n+1} = \frac{3}{2}b_n$이고

$b_1 = a_1 - 2 = 3 - 2 = 1$이므로

$$b_n = 1 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = \boxed{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}$$

이다. 그러므로

$a_n = b_n + \frac{2}{n!} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + \frac{2}{n!}$이다.

따라서 $f(n) = \frac{2}{n!}$, $g(n) = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

이므로

$$f(3) \times g(3) = \frac{2}{3!} \times \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{9}{4}$$

$$=\frac{3}{4}$$

정답 ④

18. 출제의도 : 도형에 활용된 무한등비급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

R_1에 색칠된 부채꼴은 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$이므로

$$S_1=\frac{1}{2}\times 1^2\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$$

또, 사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$에서 $\overline{\mathrm{A_2B_2}}=x$라 하면 $\overline{\mathrm{A_2D_2}}=2x$이므로

$$\overline{\mathrm{A_1C_2}}=\overline{\mathrm{A_1A_2}}+\overline{\mathrm{A_2C_2}}$$

$$2=1+\sqrt{x^2+(2x)^2}$$

$$\sqrt{5}\,x=1$$

$$\therefore\ x=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

이때,

$$\frac{\overline{\mathrm{A_2B_2}}}{\overline{\mathrm{A_1B_1}}}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{5}}{1}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

이므로

$$S_2=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\times\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2$$

…

따라서,

$$\lim_{n\to\infty}S_n$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\times\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2+\frac{\pi}{4}\times\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^4+\cdots$$

$$=\frac{\frac{\pi}{4}}{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}$$

$$=\frac{\frac{\pi}{4}}{1-\frac{1}{5}}$$

$$=\frac{5}{16}\pi$$

정답 ①

19. 출제의도 : 행렬의 관계식을 이용하여 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. $A^2=-A$이므로

$A^3=-A^2=-(-A)=A$ (참)

ㄴ. $B^2=-A^2+A+E$

$\quad=A+A+E$

$\quad=2A+E$

이므로

$AB^2=A(2A+E)=2A^2+A$

$\quad=-2A+A=-A$

$B^2A=(2A+E)A=2A^2+A$

$\quad=-2A+A=-A$

따라서 $AB^2=B^2A$ (참)

ㄷ. ㄴ에서 $B^2=2A+E$이므로

양변을 제곱하면

$B^4=(2A+E)^2=4A^2+4A+E$

$\quad=4(-A)+4A+E$

$\quad=E$

즉, $B\cdot B^3=B^3\cdot B=E$

따라서, 행렬 B의 역행렬은 B^3이다.

(참)

그러므로 <보기>에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답 ⑤

20. 출제의도 : 로그함수의 그래프의 평행이동을 이용하여 관계식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $y=f(x)$와 x축과의 교점의 y좌표는 0이므로

$\log_a(bx-1)=0$

$bx-1=1$

$\therefore\ x=\frac{2}{b}$

그러므로 x축과의 교점은 $\left(\frac{2}{b},\ 0\right)$이다.

한편,

$$\begin{aligned} y &= \log_b(ax-1) \\ &= \log_b a\left(x-\frac{1}{a}\right) \\ &= \log_b\left(x-\frac{1}{a}\right)+\log_b a \end{aligned}$$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 $y=\log_b x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{a}$만큼, y축의 방향으로 $\log_b a$만큼 평행이동한 것이다.

그러므로 곡선 $y=g(x)$의 점근선은

$x=\frac{1}{a}$

이다. 이때, 점 $\left(\frac{2}{b},\ 0\right)$이 직선 $x=\frac{1}{a}$위에 있어야 하므로

$\frac{2}{b}=\frac{1}{a}$

$\therefore\ b=2a$

한편, $b>1$에서 $a=\frac{1}{2}b$이므로 $a>\frac{1}{2}$이고 조건에서 $a<1$이므로

$\frac{1}{2}<a<1$

이다.

정답 ③

21. 출제의도 : 함수의 극한의 성질을 이용하여 미정계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건(나)에서 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=0$이고,

조건(가) $\lim_{x\to 1}g(x)=g(1)=0$이므로

$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)=0$이다.

또한, $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=0$이므로

$f(x)=(x-1)^2(x+a)$,

$g(x)=(x-1)(x+b)(x+c)$

($a,\ b,\ c$는 상수)로 놓을 수 있다.

조건(나)에서 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}=0$이고,

$f(x)$는 $(x-2)^2$을 인수로 가질 수 없으므로 $\lim_{x\to 2}g(x)=g(2)\neq 0$,

$\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)=0$

따라서 $f(x)=(x-1)^2(x-2)$이다.

조건(나)에서

$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{g(x)}=2$, $\lim_{x\to 4}\frac{f(x)}{g(x)}=6$이고,

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to3}\frac{(x-1)^2(x-2)}{(x-1)(x+b)(x+c)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(x-1)(x-2)}{(x+b)(x+c)}$$

$$=\frac{2}{(3+b)(3+c)}$$

$$\lim_{x\to4}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to4}\frac{(x-1)(x-2)}{(x+b)(x+c)}$$

$$=\frac{6}{(4+b)(4+c)}$$

이므로

$(3+b)(3+c)=1$, $(4+b)(4+c)=1$

즉, $bc+3(b+c)=-8$ ⋯ ㉠

$bc+4(b+c)=-15$ ⋯ ㉡

㉠,㉡에서 $b+c=-7$, $bc=13$

따라서

$g(5)=4(5+b)(5+c)$

$=4\{bc+5(b+c)+25\}$

$=4(13-35+25)$

$=12$

정답 ⑤

22. 출제의도 : 수열의 극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5}{n^2+2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{5}{n^2}}{1+\frac{2}{n}}$$

$=3$

정답 3

23. 출제의도 : 도함수를 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^2+x+3$에서

$f'(x)=2x+1$이므로

$f'(10)=21$

정답 21

24. 출제의도 : 지수함수를 이용하여 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=2^x$에서 밑이 1보다 크므로 최댓값은

$f(3)=2^3=8$

또, $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}=\left(\frac{1}{4}\right)^x$에서 밑이 1보다 작으므로 최댓값은

$g(-1)=\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}=4$

따라서,

$ab=8\times4=32$

정답 32

25. 출제의도 : 무한급수의 수렴조건을 이용하여 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{5n}{n+1}\right)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{5n}{n+1}\right)=0$이다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{n+1}=5$이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(a_n - \frac{5n}{n+1}\right) + \frac{5n}{n+1}\right\}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(a_n - \frac{5n}{n+1}\right) + \lim_{n\to\infty}\frac{5n}{n+1}$$
$$= 0 + 5$$
$$= 5$$

정답 5

26. **출제의도** : 주어진 수열의 합을 이용하여 수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=2n+1$에서

$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)$

$=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_{n+1}-a_n)$

$=a_{n+1}-a_1$

$=2n+1$

$\therefore\ a_{n+1}=a_1+2n+1$

$n=9$를 대입하면 $a_1=15$이므로

$a_{10}=15+2\times 9+1$

$\quad =34$

정답 34

27. **출제의도** : 도함수를 활용하여 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$y=-x^3+2x$ 에서

$y'=-3x^2+2$ 이므로

$x=1$ 일 때 $y'=-1$ 이다.

따라서 점 $(1,1)$ 에서의 접선의 방정식은

$y-1=-(x-1)$ 즉, $y=-x+2$

접선이 점 $(-10, a)$를 지나므로

$a=10+2=12$

정답 12

28. **출제의도** : 귀납적 추론에 의하여 수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건(가)에서

$(x_1, y_1)=(1,1)$

조건(나)를 이용하면

$(x_2, y_2)=\left(x_1, (y_1-3)^2\right)=(1, 4)$

$(x_3, y_3)=\left((x_2-3)^2, y_2\right)=(4, 4)$

$(x_4, y_4)=\left(x_3, (y_3-3)^2\right)=(4,1)$

$(x_5, y_5)=\left((x_4-3)^2, y_4\right)=(1,1)$

$(x_6, y_6)=\left(x_5, (y_5-3)^2\right)=(1,4)$

$\cdots$

그러므로 자연수 k에 대하여

$(x_{4k-3}, y_{4k-3})=(1, 1)$

$(x_{4k-2}, y_{4k-2})=(1, 4)$

$(x_{4k-1}, y_{4k-1})=(4, 4)$

$(x_{4k}, y_{4k})=(4, 1)$

이다.

이때, $2015=4\times 504-1$ 이므로

$(x_{2015}, y_{2015})=(4, 4)$

$\therefore\ x_{2015}+y_{2015}=4+4=8$

정답 8

29. **출제의도** : 함수의 극한의 성질을 이용하여 다항함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2}=-11$ 에서

$f(x)=x^3-11x^2+ax+b$ (a, b는 상수)

로 놓을 수 있다.

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=-9$ 이고,

$\lim_{x\to 1}(x-1)=0$ 이므로

$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)=0$ 이다.

$f(1)=-10+a+b=0$ 에서 $b=-a+10$

$f(x)=x^3-11x^2+ax-a+10$ 이고,

아래의 조립제법에 의하여

$f(x)=(x-1)(x^2-10x+a-10)$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -11 & a & -a+10 \\ & & 1 & -10 & a-10 \\ \hline & 1 & -10 & a-10 & 0 \end{array}$$

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2-10x+a-10)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}(x^2-10x+a-10)$

$=a-19$

따라서 $a-19=-9$ 에서 $a=10$ 이므로

$f(x)=x^3-11x^2+10x$ 이다.

$\frac{1}{x}=t$ 라 하면

$$\lim_{x\to\infty}xf\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to+0}\frac{f(t)}{t}$$

$$=\lim_{t\to+0}\frac{t^3-11t^2+10t}{t}$$

$$=\lim_{t\to+0}(t^2-11t+10)$$

$$=10$$

정답 10

30. 출제의도 : 상용로그를 이용하여 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\log a=n_1+\alpha_1$ (n_1은 정수, $0\le\alpha_1<1$)

$\log b=n_2+\alpha_2$ (n_2는 정수, $0\le\alpha_2<1$)

라 하자.

조건(나)에서

$\log b-\log a\le f(a)-f(b)$

이므로

$(n_2+\alpha_2)-(n_1+\alpha_1)\le\alpha_1-\alpha_2$

$\therefore\ n_2-n_1\le 2(\alpha_1-\alpha_2)$ ---㉠

한편, $0\le\alpha_1<1$, $0\le\alpha_2<1$이므로

$-1<\alpha_1-\alpha_2<1$,

$-2<2(\alpha_1-\alpha_2)<2$

한편, $a\le b$에서 $n_1\le n_2$이고 n_2-n_1은 정수이므로 ㉠에서

$n_2-n_1=0$ 또는 $n_2-n_1=1$

(ⅰ) $n_2-n_1=0$ 즉, $n_2=n_1$일 때,

㉠에서 $\alpha_1\ge\alpha_2$이고 $a\le b$이므로 $a=b$이어야 한다.

그러므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 20이다.

(ⅱ) $n_2-n_1=1$ 즉, $n_2=n_1+1$일 때,

$a\le b\le 20$이므로

$n_1=0$이고 $n_2=1$

㉠에서

$1\le 2(\alpha_1-\alpha_2)$

$\alpha_1-\alpha_2\ge\frac{1}{2}$

한편. $\log a=\alpha_1$, $\log b=1+\alpha_2$이므로

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \log a - (\log b - 1)$$

$$= \log \frac{10a}{b}$$

$$\geq \frac{1}{2}$$

$$\therefore \ \frac{10a}{b} \geq \sqrt{10}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$10a^2 \geq b^2$$

한편 $1 \leq a \leq 9$이고 $10 \leq b \leq 20$이므로 위의 조건을 만족하는 a의 값과 b의 값은 다음과 같다.

$a=4$일 때, $b=10, 11, 12$

$a=5$일 때, $b=10, 11, 12, 13, 14, 15$

$a=6$일 때,

$b=10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18$

$a=7$일 때,

$b=10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20$

$a=8$일 때,

$b=10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20$

$a=9$일 때,

$b=10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20$

그러므로 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$3+6+9+11+11+11$

$=51$

따라서, (ⅰ), (ⅱ)에 의해 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$20+51=71$

이다.

정답 71