

5지 선다형(1 ~ 21)

1. $9^{\frac{1}{2}} \times 3^{-1}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

2. 행렬 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ 에 대하여 $A - B = E$ 를 만족시키는 행렬 A 는?
(단, E 는 단위행렬이다.) [2점]

- ① $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
 ④ $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

3. 이차정사각행렬 A 의 (i, j) 성분 a_{ij} 를

$$a_{ij} = i + 3j \quad (i = 1, 2, j = 1, 2)$$

라 하자. 행렬 A 의 $(2, 1)$ 성분은? [2점]

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

4. 이차정사각행렬 A, B 가

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

을 만족시킬 때, 행렬 $AB + BA$ 는? [3점]

- ① $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$
 ④ $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$

5. 부등식 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} \leq \left(\frac{1}{8}\right)^{x-1}$ 을 만족시키는 모든 자연수 x 의 값의 합은? [3점]

- ① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

6. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ 에 대하여 행렬 $A^2 + A^3$ 의 모든 성분의 합은? [3점]

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

7. 자연수 $n (n \geq 2)$ 에 대하여 실수 a 의 n 제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 $f_n(a)$ 라 할 때, $f_2(-3) + f_3(-2) + f_4(5)$ 의 값은?

[3점]

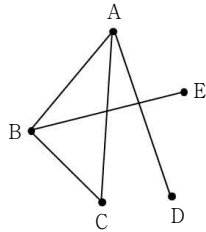
- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

8. 이차정사각행렬 A 에 대하여 $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 이다.

$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ 일 때, $p+q$ 의 값은? [3점]

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

9. 다음 [그래프 G]는 5개의 꼭짓점을 갖는 그래프이다.



[그래프 G]

[그래프 G]에 한 변을 추가하여 만든 그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬이 [행렬 M]이 되도록 할 때, [그래프 G]에 추가해야 할 변은? [3점]

$$\begin{array}{c}
 \begin{matrix} & A & B & C & D & E \\
 A & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 B & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 C & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 D & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 E & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
 \end{matrix}
 \end{array}$$

[행렬 M]

- ① AE ② BD ③ CD ④ CE ⑤ DE

10. 이차정사각행렬 A, B 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $BA - 3A = E$
 (나) 행렬 A^{-1} 의 모든 성분의 합은 15이다.

행렬 B 의 모든 성분의 합은? (단, E 는 단위행렬이다.) [3점]

- ① 17 ② 19 ③ 21 ④ 23 ⑤ 25

11. 이차정사각행렬 A, B 가

$$A+B=E, (E-A)(E-B)=E$$

를 만족시킬 때, A^6+B^6 의 모든 성분의 합은? (단, E 는 단위행렬이다.) [3점]

- ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

12. 단원자 이상기체의 단열 과정에서 단열 팽창 전 온도와 부피를 각각 T_i, V_i 라 하고 단열 팽창 후 온도와 부피를 각각 T_f, V_f 라 하자. 단열 팽창 전과 단열 팽창 후의 온도와 부피 사이에는 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

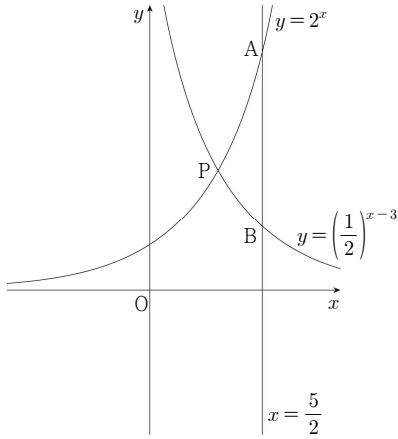
$$T_i V_i^{\gamma-1} = T_f V_f^{\gamma-1}$$

(단, 기체물 열용량의 비 $\gamma = \frac{5}{3}$ 이고, 온도의 단위는 K, 부피의 단위는 m^3 이다.)

단열 팽창 전 온도가 480(K)이고 부피가 $5(\text{m}^3)$ 인 단원자 이상기체가 있다. 이 기체가 단열 팽창하여 기체의 온도가 270(K)가 되었을 때, 기체의 부피(m^3)는? [3점]

- ① $\frac{308}{27}$ ② $\frac{311}{27}$ ③ $\frac{314}{27}$ ④ $\frac{317}{27}$ ⑤ $\frac{320}{27}$

[13 ~ 14] 그림과 같이 두 곡선 $y=2^x$ 과 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$ 이 만나는 점을 P라 하고, 직선 $x=\frac{5}{2}$ 가 두 곡선 $y=2^x$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$ 과 만나는 점을 각각 A, B라 하자.
13번과 14번의 두 물음에 답하시오.



13. 선분 AB의 길이는? [3점]

- ① $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{2}}{2}$

14. 점 P의 x좌표를 k라 하자. 좌표평면 위의 점 Q(x, y)에 대하여 행렬 $M=\begin{pmatrix} x+k & y \\ y & -x-k \end{pmatrix}$ 가 $M^2=E$ 를 만족시킨다. 점 Q가 나타내는 도형을 C라 할 때, 도형 C위의 한 점에서 원점 O까지의 거리의 최댓값은? (단, E는 단위행렬이다.)

[4점]

- ① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

15. 두 개의 그릇 A , B 에 각각 $a(\text{ml})$, $b(\text{ml})$ 의 물이 들어 있다.

그릇 A 에 들어 있는 물의 양의 $\frac{1}{2}$ 을 그릇 B 에 부은 후, 그릇

B 에 들어 있는 물의 양의 $\frac{1}{3}$ 을 그릇 A 에 부었더니 두 그릇

A , B 에 들어 있는 물의 양이 각각 $200(\text{ml})$, $300(\text{ml})$ 가 되었다.

두 상수 s , t 에 대하여 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & t \\ t & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix}$ 이 성립할 때,

$10s+t$ 의 값은? (단, 두 그릇 A , B 에 들어 있는 물의 양의 합은 항상 일정하다.) [4점]

- ① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

16. 이차정사각행렬 A , B 가

$$B^2 - A = E, \quad B^4 = A + 2E$$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E 는 단위행렬이다.) [4점]

————— < 보 기 > —————

ㄱ. $A^2 + A = E$

ㄴ. $AB = BA$

ㄷ. AB 의 역행렬이 존재한다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

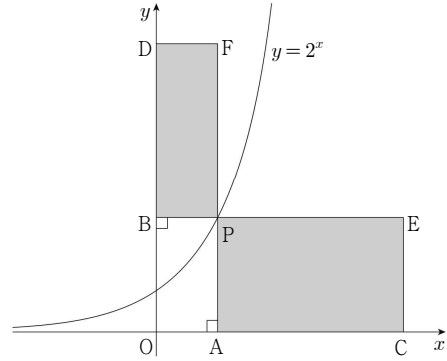
17. 다음은 $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ 를 $p+q\sqrt{5}$ (p, q 는 유리수) 꼴로 나타내는 과정이다.

$\alpha = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}, \beta = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ 라 두면 $\alpha\beta = \square$ (가) 이다.
 $\alpha + \beta = x$ 라 하면
 $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$ 을 이용하여
삼차방정식 $x^3 + 3x - 4 = 0$ 을 얻을 수 있다.
이 방정식의 실근은 $x = 1$ 뿐이므로 $\alpha + \beta = 1$ 이다.
따라서 $\alpha + \beta = 1$ 과 $\alpha\beta = \square$ (가) 인 실수 α, β 를 두 근
으로 하는 이차방정식은 \square 이다.
이 이차방정식의 두 근 α, β 가 $\beta < 0 < \alpha$ 이므로
 $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} = \square$ (나) 이다.

위의 과정에서 (가), (나)에 들어갈 수를 각각 a, b 라 할 때,
 $a+10b$ 의 값은? [4점]

- ① $1+2\sqrt{5}$ ② $2+3\sqrt{5}$ ③ $3+4\sqrt{5}$
 ④ $4+5\sqrt{5}$ ⑤ $5+6\sqrt{5}$

18. 곡선 $y=2^x$ 위의 한 점 P에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을
 각각 A, B 라 하자. 그림과 같이 x 축 위의 점 C와 y 축 위의
 점 D에 대하여 두 사각형 PACE와 PFDB가 각각 직사각형이
 되도록 점 E와 점 F를 잡는다.
 (단, 세 점 P, E, F는 제1사분면 위의 점이다.)



두 직사각형 PACE, PFDB가 다음 조건을 만족시킨다.

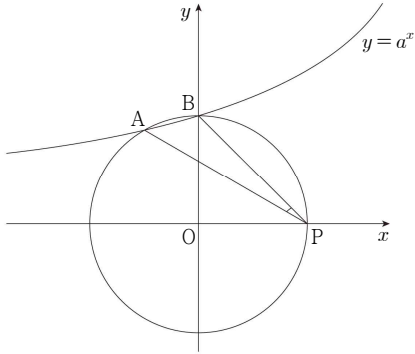
(가) $\overline{BP} : \overline{PE} = 1 : 3$ 이고, $\overline{PF} = 3\sqrt{2}$ 이다.
 (나) 직사각형 PACE의 넓이는 직사각형 PFDB의 넓이의
 2배이다.

점 E의 x 좌표는? [4점]

- ① 5 ② $\frac{11}{2}$ ③ 6 ④ $\frac{13}{2}$ ⑤ 7

19. 그림과 같이 원점 O 를 중심으로 하고 점 $P(1, 0)$ 을 지나는 원과 곡선 $y = a^x$ ($a > 1$) 이 만나는 두 점을 각각 A, B 라 하자.

$\angle APB = \frac{\pi}{12}$ 일 때, a 의 값은? [4점]



- ① $\frac{7}{6}$
- ② $\frac{4}{3}$
- ③ $\frac{3}{2}$
- ④ $\frac{5}{3}$
- ⑤ $\frac{11}{6}$

20. 세 양수 a, b, c 에 대하여 $3^a = 5, 7^b = 29, 8^c = 27$ 일 때, a, b, c 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은? [4점]

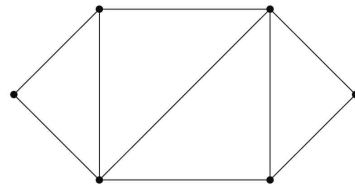
- ① $a < c < b$
- ② $b < a < c$
- ③ $b < c < a$
- ④ $c < a < b$
- ⑤ $c < b < a$

21. 모든 실수 t 에 대하여 행렬 $\begin{pmatrix} 2+2t-bt & t+1 \\ at-a & 2 \end{pmatrix}$ 가 역행렬을 갖도록 하는 두 정수 a, b 의 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수는? [4점]
- ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

단답형(22 ~ 30)

22. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ 과 두 상수 a, b 에 대하여 $A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ 가 성립할 때, $a+b$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 다음 그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬의 성분 중 1의 개수를 구하시오. [3점]



24. x, y 에 대한 연립일차방정식

$$\begin{pmatrix} a & 2 \\ 22 & a-7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

이 $x=0, y=0$ 이외의 해를 갖도록 하는 양수 a 의 값을 구하시오.

[3점]

26. x 에 대한 방정식 $9^x - 4 \cdot 3^{x+1} + k = 0$ 의 두 근의 합이 3일 때, 상수 k 의 값을 구하시오. [4점]

25. 정의역이 $\{x \mid -1 \leq x \leq 4\}$ 인 함수 $y = 5^{x^2 - 4x - 2}$ 의 최댓값을 구하시오. [3점]

27. 이차정사각행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ 에 대하여

행렬 $B^4 A^8$ 의 모든 성분의 합을 구하시오. [4점]

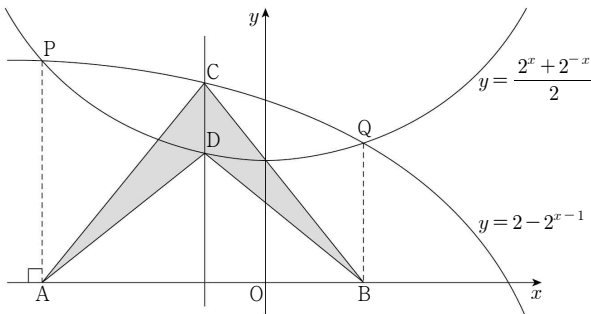
28. 다음 조건을 만족시키는 행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ 의 개수를 구하시오.

[4점]

(가) 세 수 a, b, c 는 집합 $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ 의 서로 다른 원소이다.

(나) 행렬 A^2 의 모든 성분은 양수이다.

29. 그림과 같이 두 곡선 $y=2-2^{x-1}$ 과 $y=\frac{2^x+2^{-x}}{2}$ 이 만나는 두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A(a, 0), B(b, 0)이라 하자. 곡선 $y=2-2^{x-1}$ 위의 점 C(t, $2-2^{t-1}$)을 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\frac{2^x+2^{-x}}{2}$ 과 만나는 점을 D라 하자. 네 선분 AC, CB, BD, DA로 둘러싸인 도형의 넓이의 최댓값이 $k(b-a)$ 일 때, $70(k-1)^2$ 의 값을 구하시오. (단, $a < t < b$ 이다.) [4점]



30. 지수함수 $f(x)=a^x$, $g(x)=b^x$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오. (단, a, b는 1보다 큰 자연수이다.) [4점]

- (가) $f(2) \times g(11) = 2^{2015}$
- (나) $f(2) < g(4)$

※ 확인 사항
 ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.