2014학년도 3월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

수학 B형 정답

1	①	2	②	3	④	4	①	5	②
6	⑤	7	②	8	④	9	⑤	10	③
11	④	12	③	13	①	14	④	15	①
16	⑤	17	⑤	18	③	19	②	20	③
21	④	22	12	23	90	24	6	25	160
26	35	27	61	28	37	29	200	30	25

해 설

1. [출제의도] 행렬의 연산을 이해하고 행렬의 뺄셈을 계산한다.

$B=\begin{pmatrix}5&2\\3&-1\end{pmatrix}-2A$

$=\begin{pmatrix}5&2\\3&-1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}5&2\\3&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&0\\0&-2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix}$

2. [출제의도] 로그의 성질을 이해하고 식의 값을 계산한다.

$\log_2 4\times\log_4 2^{-2}$

$=\log_2 2^2\times\log_4 4^{-1}$

$=2\times(-1)=-2$

[다른 풀이]

$\log_2 4\times\log_4 2^{-2}$

$=\log_2 4\times(-2\log_4 2)$

$=-2\times\log_2 4\times\log_4 2$

$=-2\left(\log_2 4\times\dfrac{1}{\log_2 4}\right)$

$=-2$

3. [출제의도] 극한의 성질을 이용하여 극한값을 계산한다.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+\tan x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3x}{x}+\dfrac{\tan x}{x}\right)$

$=3+1=4$

4. [출제의도] 지수함수의 성질을 이용하여 지수부등식의 해를 구한다.

$\left(2^x-\dfrac{1}{4}\right)(2^x-1)<0$

$\dfrac{1}{4}<2^x<1$

$2^{-2}<2^x<2^0$

$\therefore\ -2<x<0$

따라서 부등식 $\left(2^x-\dfrac{1}{4}\right)(2^x-1)<0$을 만족시키는 정수 x의 개수는 1이다.

5. [출제의도] 삼각함수의 배각공식을 이용하여 삼각함수의 값을 구한다.

$\tan\theta=\dfrac{1}{4}$ 이므로

$\sec^2\theta=1+\tan^2\theta=1+\dfrac{1}{16}=\dfrac{17}{16}$

$\cos^2\theta=\dfrac{1}{\sec^2\theta}=\dfrac{16}{17}$, $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=\dfrac{1}{17}$

$\sin^2 2\theta=4\sin^2\theta\cos^2\theta$

$=4\times\dfrac{1}{17}\times\dfrac{16}{17}$

$=\left(\dfrac{8}{17}\right)^2$

$\tan\theta=\dfrac{1}{4}>0$이므로 $\sin\theta\cos\theta>0$

$\therefore\ \sin 2\theta=\dfrac{8}{17}$

6. [출제의도] 연립일차방정식의 해가 무수히 많을 조건을 이해한다.

$\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}(1\ 2)=\begin{pmatrix}3&6\\5&10\end{pmatrix}$이므로 주어진 연립일차방정식은

$\begin{pmatrix}3&6\\5&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\a\end{pmatrix}$

행렬 $\begin{pmatrix}3&6\\5&10\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않으므로 위의 연립일차방정식이 해를 가지려면

연립일차방정식 $\begin{cases}3x+6y=6\\5x+10y=a\end{cases}$

즉, $\begin{cases}x+2y=2\\x+2y=\dfrac{a}{5}\end{cases}$ 가 무수히 많은 해를 가져야 한다.

따라서 $2=\dfrac{a}{5}$ 이어야 하므로

$a=10$

7. [출제의도] 그래프와 행렬의 성질을 이해하여 실생활과 관련된 문제를 해결한다.

그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬에서 각 성분은 0 또는 1이다. 각 행의 성분은 6개이므로 행의 성분으로 0을 4개 포함하는 행은 1을 2개 포함한다. 행의 성분에서 1인 것의 개수는 각 꼭짓점에 연결된 변의 개수와 같으므로 연결된 변의 개수가 2인 꼭짓점의 개수를 찾으면 된다.

따라서 행의 성분으로 0을 4개 포함하는 행의 개수는 2이다.

8. [출제의도] 상용로그의 지표와 가수의 성질을 이해하고 극한값을 구한다.

$10\le x<100$이면 $\log x$의 지표는 1이고,

$1000\le x^2<10000$이면 $\log x^2$의 지표는 3이므로

$\lim\limits_{x\to 100-0}f(x)=1$이고 $\lim\limits_{x\to 100-0}f(x^2)=3$이다.

$\therefore\ \lim\limits_{x\to 100-0}\{f(x)+f(x^2)\}$

$=\lim\limits_{x\to 100-0}f(x)+\lim\limits_{x\to 100-0}f(x^2)$

$=1+3$

$=4$

9. [출제의도] 삼각함수의 합성을 이해하고 함수의 최댓값을 구한다.

$f(x)=4\sin x+6\cos^2\dfrac{x}{2}+1$

$=4\sin x+6\times\dfrac{1+\cos x}{2}+1$

$=4\sin x+3\cos x+4$

$=5\left(\sin x\times\dfrac{4}{5}+\cos x\times\dfrac{3}{5}\right)+4$

$=5\sin(x+\alpha)+4$ $\left(\text{단, }\sin\alpha=\dfrac{3}{5},\ \cos\alpha=\dfrac{4}{5}\right)$

$5\sin(x+\alpha)$의 최댓값이 5이므로 $f(x)$의 최댓값은 9이다.

10. [출제의도] 미분법과 중간값의 정리를 이용하여 극값이 존재하는 구간을 구한다.

미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지므로 $f'(a)=0$이어야 한다.

$f(x)=e^{-x}(\ln x-2)$이므로

$f'(x)=-e^{-x}(\ln x-2)+e^{-x}\times\dfrac{1}{x}$

$=e^{-x}\left(\dfrac{1}{x}-\ln x+2\right)$

모든 실수 x에 대하여 $e^{-x}>0$이므로

$g(x)=\dfrac{1}{x}-\ln x+2$라 하면 $g(a)=0$이어야 한다.

$g'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}=-\dfrac{1+x}{x^2}<0$ ($\because\ x>0$)

이므로 함수 $g(x)$는 $x>0$에서 연속이고 감소한다.

$g(1)=1-\ln 1+2=3>0$

$g(e)=\dfrac{1}{e}-\ln e+2=\dfrac{1}{e}+1>0$

$g(e^2)=\dfrac{1}{e^2}-\ln e^2+2=\dfrac{1}{e^2}>0$

$g(e^3)=\dfrac{1}{e^3}-\ln e^3+2=\dfrac{1}{e^3}-1<0$

그러므로 중간값의 정리에 의하여 $g(c)=0$인 실수 c가 열린 구간 $(e^2,\ e^3)$에 오직 하나 존재한다.

따라서 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가질 때, a가 속하는 구간은 $(e^2,\ e^3)$이다.

11. A형 17번과 동일

12. [출제의도] 수열의 극한의 성질을 이용하여 극한값을 구한다.

$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}<a_n<2^n$ 에서

$\dfrac{1\times(2^n-1)}{2-1}<a_n<2^n$

$2^n-1<a_n<2^n$

$1-\dfrac{1}{2^n}<\dfrac{a_n}{2^n}<1$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}1=1$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{2^n}=1$

$\dfrac{3n-1}{n+1}<\sum\limits_{k=1}^{n}b_k<\dfrac{3n+1}{n}$ 에서

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-1}{n+1}=3$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{n}=3$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}b_k=3$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8^n-1}{4^{n-1}a_n+8^{n+1}b_n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{8^n}}{\dfrac{1}{4}\times\dfrac{a_n}{2^n}+8\times b_n}$

$=\dfrac{1-0}{\dfrac{1}{4}\times 1+8\times 0}=4$

13. [출제의도] 지수함수의 성질을 이용하여 삼각형의 넓이를 구한다.

곡선 $y=2^x$이 y축과 만나는 점은

$A(0,1)$

곡선 $y=-2^x+a$가 y축과 만나는 점은

$B(0,a-1)$

두 곡선 $y=2^x$과 $y=-2^x+a$가 만나는 점은

$2^x=-2^x+a$, $2^{x+1}=a$

$x=\log_2 a-1=\log_2\dfrac{a}{2}$, $y=2^{\log_2\frac{a}{2}}=\dfrac{a}{2}$

$C\left(\log_2\dfrac{a}{2},\ \dfrac{a}{2}\right)$

$a=6$일 때, $B(0,5)$, $C(\log_2 3,\ 3)$이므로 삼각형 ACB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times 4\times\log_2 3=2\log_2 3$

14. [출제의도] 로그함수의 극한의 성질을 이용하여 극한값을 구한다.

$A(0,1)$, $C\left(\log_2\dfrac{a}{2},\ \dfrac{a}{2}\right)$이므로 직선 AC의 기울기는

$f(a)=\dfrac{\dfrac{a}{2}-1}{\log_2\dfrac{a}{2}-0}=\dfrac{\dfrac{a}{2}-1}{\log_2\dfrac{a}{2}}$

$\mathrm{B}(0,\ a-1)$, $\mathrm{C}\left(\log_2\dfrac{a}{2},\ \dfrac{a}{2}\right)$이므로 직선 BC의 기울기는

$g(a)=\dfrac{\dfrac{a}{2}-(a-1)}{\log_2\dfrac{a}{2}-0}=-\dfrac{\dfrac{a}{2}-1}{\log_2\dfrac{a}{2}}$

$\therefore\ f(a)-g(a)=2\times\dfrac{\dfrac{a}{2}-1}{\log_2\dfrac{a}{2}}$

$\dfrac{a}{2}-1=t$ 라 하면 $a\to2+0$일 때 $t\to+0$이므로

$\lim\limits_{a\to2+0}\{f(a)-g(a)\}=2\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{t}{\log_2(t+1)}$

$=2\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{1}{\dfrac{\log_2(t+1)}{t}}$

$=2\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{1}{\log_2(t+1)^{\frac{1}{t}}}$

$=2\times\dfrac{1}{\log_2 e}=2\ln2$

[다른 풀이]

$a\to2+0$이면 점 C는 곡선 $y=2^x$을 따라 점 A에 한없이 가까워진다. 따라서 직선 AC의 기울기는 곡선 $y=2^x$ 위의 점 A에서의 접선의 기울기에 한없이 가까워진다.

$y'=2^x\times\ln2$이므로

$\lim\limits_{a\to2+0}f(a)=2^0\times\ln2=\ln2$

한편, 점 C를 지나고 x축에 평행한 직선을 l이라 하면 곡선 $y=-2^x+a$와 곡선 $y=2^x$은 항상 직선 l에 대하여 대칭이다.

따라서 직선 BC와 직선 AC도 항상 직선 l에 대하여 대칭이다.

$\lim\limits_{a\to2+0}g(a)=-\lim\limits_{a\to2+0}f(a)=-\ln2$

$\therefore\ \lim\limits_{a\to2+0}\{f(a)-g(a)\}$

$=\lim\limits_{a\to2+0}f(a)-\lim\limits_{a\to2+0}g(a)$

$=\ln2-(-\ln2)=2\ln2$

15. A형 16번과 동일

16. [출제의도] 합성함수의 연속성을 이해하고 문제를 해결한다.

합성함수 $(g\circ f)(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면

$\lim\limits_{x\to1+0}(g\circ f)(x)=\lim\limits_{x\to1-0}(g\circ f)(x)=(g\circ f)(1)$

이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to1+0}f(x)=1^2-1+2a=2a$이고, $g(x)$는 연속함수이므로

$\lim\limits_{x\to1+0}(g\circ f)(x)=(2a)^2+a\times2a+3=6a^2+3$

$\lim\limits_{x\to1+0}f(x)=3+a$이므로

$\lim\limits_{x\to1-0}(g\circ f)(x)=(3+a)^2+a\times(3+a)+3=2a^2+9a+12$

$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(2a)=6a^2+3$

따라서 $6a^2+3=2a^2+9a+12$이어야 하므로

$4a^2-9a-9=0$

$(a-3)(4a+3)=0$

$\therefore\ a=3$ 또는 $a=-\dfrac{3}{4}$

따라서 구하는 모든 상수 a의 값의 합은 $\dfrac{9}{4}$이다.

[다른 풀이]

이차함수 $g(x)$는 모든 실수에서 연속이고 곡선 $y=g(x)$는 직선 $x=-\dfrac{a}{2}$에 대하여 대칭이다.

따라서 함수 $(g\circ f)(x)$가 모든 실수 x에서 연속이 되려면

$\lim\limits_{x\to1+0}f(x)=\lim\limits_{x\to1-0}f(x)=f(1)$ 또는

$\lim\limits_{x\to1+0}f(x)+\lim\limits_{x\to1-0}f(x)=-a$이어야 한다.

$1-1+2a=3+a$에서

$a=3$

$(1-1+2a)+(3+a)=-a$에서

$a=-\dfrac{3}{4}$

따라서 구하는 모든 상수 a의 값의 합은

$3-\dfrac{3}{4}=\dfrac{9}{4}$

17. A형 19번과 동일

18. [출제의도] 무리방정식을 이해하고 함수의 그래프를 이용하여 해를 구한다.

$f(x)-1=\sqrt{g(x)\{f(x)-2\}+1}$ ⋯ ㉠

㉠의 양변을 각각 제곱하면

$\{f(x)\}^2-2f(x)+1=g(x)\{f(x)-2\}+1$

$f(x)\{f(x)-2\}-g(x)\{f(x)-2\}=0$

$\{f(x)-2\}\{f(x)-g(x)\}=0$

$\therefore\ f(x)=2$ 또는 $f(x)=g(x)$

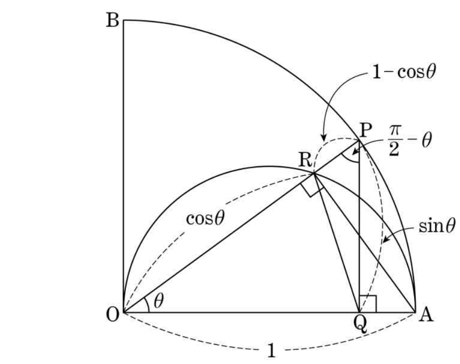
i) $f(x)=2$를 ㉠에 대입하면 (좌변)=(우변)=1

ii) $f(x)=g(x)$를 ㉠에 대입하면

$f(x)-1=\sqrt{\{f(x)-1\}^2}$이므로 $f(x)\ge1$이어야 한다.

따라서 주어진 무리방정식의 실근은 i)에서 2개, ii)에서 1개이므로 구하는 실근의 개수는 3이다.

19. [출제의도] 도형의 성질과 삼각함수의 극한의 성질을 이용하여 극한값을 구한다.



$\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{OP}}-\overline{\mathrm{OR}}=1-\cos\theta$

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sin\theta$

$\angle\mathrm{QPR}=\dfrac{\pi}{2}-\theta$이므로

$S(\theta)=\dfrac{1}{2}\times(1-\cos\theta)\times\sin\theta\times\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=\dfrac{(1-\cos\theta)\sin\theta\cos\theta}{2}$

$\therefore\ \lim\limits_{\theta\to+0}\dfrac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim\limits_{\theta\to+0}\dfrac{(1-\cos\theta)\sin\theta\cos\theta}{2\theta^3}$

$=\lim\limits_{\theta\to+0}\dfrac{\sin^3\theta\cos\theta}{2\theta^3(1+\cos\theta)}=\dfrac{1}{4}$

[다른 풀이]

(삼각형 PRQ의 넓이)

=(삼각형 POQ의 넓이)−(삼각형 ROQ의 넓이)

이므로

$S(\theta)=\dfrac{1}{2}\sin\theta\cos\theta-\dfrac{1}{2}\cos^2\theta\sin\theta$

$=\dfrac{1}{2}\sin\theta\cos\theta(1-\cos\theta)$

$\therefore\ \lim\limits_{\theta\to+0}\dfrac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim\limits_{\theta\to+0}\dfrac{(1-\cos\theta)\sin\theta\cos\theta}{2\theta^3}$

$=\lim\limits_{\theta\to+0}\dfrac{\sin^3\theta\cos\theta}{2\theta^3(1+\cos\theta)}=\dfrac{1}{4}$

20. A형 21번과 동일

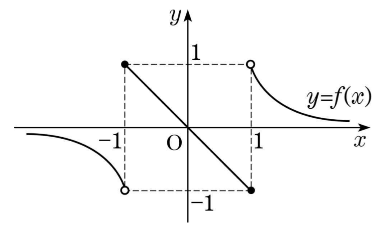
21. [출제의도] 미분법을 이해하여 조건에 맞는 함수의 그래프를 추측한다.

주어진 조건에서 함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고 원점을 지난다.

또, 함수 $f(x)$는 $x\ne-1,\ x\ne1$인 모든 x에서 연속이고, 구간 $(-\infty,\ -1)$, $(-1,\ 1)$, $(1,\ \infty)$에서 각각 감소한다.

ㄱ. 함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$와 원점에서만 만난다.

ㄴ. (반례) 함수 $f(x)=\begin{cases}-x & (|x|\le1)\\ \dfrac{1}{x} & (|x|>1)\end{cases}$은 주어진 조건을 만족시키지만 x축과 원점에서만 만난다.



ㄷ. 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고, 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여

$f'(c_1)=\dfrac{-1-0}{1-0}=-1$

을 만족시키는 실수 c_1이 열린 구간 $(0,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.

마찬가지로 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[-1,\ 0]$에서 연속이고, 열린 구간 $(-1,\ 0)$에서 미분가능하므로

$f'(c_2)=\dfrac{1-0}{-1-0}=-1$

을 만족시키는 실수 c_2가 열린 구간 $(-1,\ 0)$에 적어도 하나 존재한다.

그러므로 $f'(\alpha)=-1$을 만족시키는 실수 α가 적어도 두 개 존재한다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

22. [출제의도] 미분법을 이용하여 문제를 해결한다.

$f'(x)=8-\left(-\dfrac{4}{x^2}\right)=8+\dfrac{4}{x^2}$이므로

$f'(1)=8+\dfrac{4}{1}=12$

23. [출제의도] 분수방정식의 해를 구한다.

양변에 $x^2-1=(x-1)(x+1)$을 곱하면

$3x-7+2(x+1)=2(x^2-1)$

$2x^2-5x+3=0$

$(x-1)(2x-3)=0$

$x=1$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}$

$x=1$은 무연근이고 $x=\dfrac{3}{2}$은 실근이다.

$\therefore\ 60\alpha=60\times\dfrac{3}{2}=90$

24. [출제의도] 수열의 극한의 성질을 이용하여 극한값을 구한다.

$\dfrac{\sqrt{9n^2+n}-n}{a_n}$의 분모, 분자를 각각 n으로 나누면

$\dfrac{\dfrac{\sqrt{9n^2+n}-n}{n}}{\dfrac{a_n}{n}}=\dfrac{\sqrt{9+\dfrac{1}{n}}-1}{\dfrac{a_n}{n}}$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{1}{3}$이고 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{9+\dfrac{1}{n}}-1\right)=2$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{9n^2+n}-n}{a_n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{9+\dfrac{1}{n}}-1}{\dfrac{a_n}{n}}$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{9+\frac{1}{n}}-1\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}}$$

$$=\frac{2}{\frac{1}{3}}=6$$

25. A형 26번과 동일

26. [출제의도] 분수방정식과 분수부등식을 이해하고 문제를 해결한다.

(가)에서 집합 $\left\{x \,\middle|\, \frac{g(x)}{f(x)}=0\right\}$의 원소의 개수는 1이고, $g(x)=(x-1)(x-3)^2$이므로

$f(1)=0$ 또는 $f(3)=0$이다.

따라서 $f(x)=(x-a)(x-5)$에서

$a=1$ 또는 $a=3$

ⅰ) $a=1$이면

$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{(x-1)(x-5)}{(x-1)(x-3)^2}\le 0$

$x-5\le 0$ ($x\ne 1$, $x\ne 3$)

∴ $x<1$ 또는 $1<x<3$ 또는 $3<x\le 5$

이를 만족시키는 자연수 x는 2, 4, 5이므로 3개가 되어 (나) 조건에 모순이다.

ⅱ) $a=3$이면

$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{(x-3)(x-5)}{(x-1)(x-3)^2}\le 0$

$(x-1)(x-3)(x-5)\le 0$ ($x\ne 1$, $x\ne 3$)

∴ $x<1$ 또는 $3<x\le 5$

이를 만족시키는 자연수 x는 4, 5이므로 2개가 되어 (나) 조건을 만족시킨다.

ⅰ), ⅱ)에서 $a=3$이므로

$f(x)=(x-3)(x-5)$

∴ $f(10)=(10-3)(10-5)=7\times 5=35$

27. [출제의도] 삼각형의 닮음비와 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 문제를 해결한다.

점 P가 선분 AB를 4:1로 내분하는 점이므로

$\overline{\mathrm{PR}}=\frac{1}{5}\overline{\mathrm{AC}}=\frac{3}{5}$, $\overline{\mathrm{RC}}=\frac{4}{5}\overline{\mathrm{BC}}=\frac{4}{5}$

삼각형 PRC가 직각삼각형이므로

$\tan\alpha=\frac{\overline{\mathrm{RC}}}{\overline{\mathrm{PR}}}=\frac{4}{3}$

점 Q가 선분 AB를 2:3으로 내분하는 점이므로

$\overline{\mathrm{QS}}=\frac{2}{5}\overline{\mathrm{BC}}=\frac{2}{5}$, $\overline{\mathrm{SC}}=\frac{3}{5}\overline{\mathrm{AC}}=\frac{9}{5}$

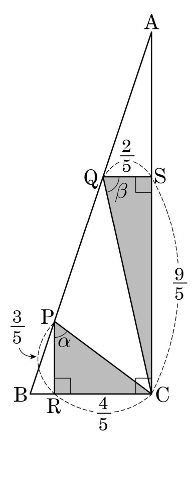
삼각형 QCS가 직각삼각형이므로

$\tan\beta=\frac{\overline{\mathrm{SC}}}{\overline{\mathrm{QS}}}=\frac{9}{2}$

따라서

$$\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{\frac{9}{2}-\frac{4}{3}}{1+\frac{9}{2}\times\frac{4}{3}}=\frac{\frac{27-8}{6}}{\frac{6+36}{6}}=\frac{19}{42}$$

이므로 $p+q=42+19=61$이다.



28. [출제의도] 등차수열의 합을 이해하여 첫째항을 구한다.

첫째항이 a이고 공차가 -4인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n은

$S_n=\frac{n\{2a-4(n-1)\}}{2}=-2n^2+(a+2)n$

모든 자연수 n에 대하여 $S_n<200$이므로

$-2n^2+(a+2)n<200$

$2n^2+200>(a+2)n$

$2n+\frac{200}{n}>a+2$ ⋯ ㉠

이때 $n>0$이므로

$2n+\frac{200}{n}\ge 2\sqrt{2n\times\frac{200}{n}}=2\sqrt{400}=40$

(단, 등호는 $n=10$일 때 성립)

따라서 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립하려면 $a+2<40$이어야 하므로 자연수 a의 최댓값은 37이다.

[다른 풀이]

$S_n=\frac{n\{2a-4(n-1)\}}{2}=-2n^2+(a+2)n$에서

모든 자연수 n에 대하여 $S_n<200$이므로

$-2n^2+(a+2)n<200$

$2n^2-(a+2)n>-200$

$f(n)=2n^2-(a+2)n$이라 하면

$f(n)=2\left(n^2-\frac{a+2}{2}n\right)$

$=2\left\{\left(n-\frac{a+2}{4}\right)^2-\frac{(a+2)^2}{16}\right\}$

$=2\left(n-\frac{a+2}{4}\right)^2-\frac{(a+2)^2}{8}$

이때 a는 자연수이므로 $f(n)$이 최소가 되게 하는 n은 $\frac{a}{4}$, $\frac{a+1}{4}$, $\frac{a+2}{4}$, $\frac{a+3}{4}$ 중의 하나이다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여

$f(n)>-200$이 성립하려면 네 부등식

$f\left(\frac{a}{4}\right)>-200$, $f\left(\frac{a+1}{4}\right)>-200$,

$f\left(\frac{a+2}{4}\right)>-200$, $f\left(\frac{a+3}{4}\right)>-200$

이 모두 성립해야 한다.

$f\left(\frac{a}{4}\right)=2\times\frac{1}{4}-\frac{(a+2)^2}{8}>-200$에서

$(a+2)^2<1604$ ⋯ ㉠

$f\left(\frac{a+1}{4}\right)=2\times\frac{1}{16}-\frac{(a+2)^2}{8}>-200$에서

$(a+2)^2<1601$ ⋯ ㉡

$f\left(\frac{a+2}{4}\right)=-\frac{(a+2)^2}{8}>-200$에서

$(a+2)^2<1600$ ⋯ ㉢

$f\left(\frac{a+3}{4}\right)=2\times\frac{1}{16}-\frac{(a+2)^2}{8}>-200$에서

$(a+2)^2<1601$ ⋯ ㉣

㉠, ㉡, ㉢, ㉣이 모두 성립하려면 $(a+2)^2<1600$이어야 한다.

∴ $a+2<40$

따라서 자연수 a의 최댓값은 37이다.

29. [출제의도] 수열의 합과 일반항의 관계와 상용로그의 가수의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

주어진 식의 양변에 상용로그를 취하면

$\log a_1+2\log a_2+3\log a_3+\cdots+n\log a_n=n^2-n$

∴ $\sum_{m=1}^{n} m\log a_m=n^2-n$

따라서

$n\log a_n=(n^2-n)-\{(n-1)^2-(n-1)\}$

$=2n-2$ ($n\ge 2$)

이고, $\log a_1=1^2-1=0$이므로

$n\log a_n=2n-2$ ($n\ge 1$)

∴ $\log a_n=\frac{1}{n}(2n-2)=2-\frac{2}{n}$

$n\le 2$이면 $\log a_n$의 가수는 0이고

$n\ge 3$이면 $\log a_n$의 가수는 $1-\frac{2}{n}$이다.

$\log a_k$의 가수가 0.99이므로

$1-\frac{2}{k}=0.99$

$\frac{2}{k}=\frac{1}{100}$

∴ $k=200$

30. [출제의도] 삼각함수의 성질과 매개변수의 미분법을 이용하여 문제를 해결한다.

원점을 지나고 기울기가 $\tan(\sin t)$인 직선의 방정식은

$y=\tan(\sin t)x$ ⋯ ㉠

점 P는 원과 직선의 교점이므로

원의 방정식 $x^2+y^2=e^{2t}$과 연립하면

$x^2+\{\tan(\sin t)x\}^2=e^{2t}$

$\{1+\tan^2(\sin t)\}x^2=e^{2t}$

$\frac{x^2}{\cos^2(\sin t)}=e^{2t}$

$x^2=e^{2t}\cos^2(\sin t)$

$x=e^t\cos(\sin t)$ ($\because$ $x>0$)

이를 ㉠에 대입하면

$y=e^t\sin(\sin t)$

그러므로 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$x=e^t\cos(\sin t)$, $y=e^t\sin(\sin t)$

$\frac{dx}{dt}=e^t\cos(\sin t)-\{e^t\sin(\sin t)\}\cos t$

$=e^t\{\cos(\sin t)-\sin(\sin t)\times\cos t\}$

$\frac{dy}{dt}=e^t\sin(\sin t)+\{e^t\cos(\sin t)\}\cos t$

$=e^t\{\sin(\sin t)+\cos(\sin t)\times\cos t\}$

$t=\pi$일 때, 점 P의 좌표는

$(e^\pi\cos(\sin\pi), e^\pi\sin(\sin\pi))$이므로

$\mathrm{P}(e^\pi, 0)$

$t=\pi$일 때, 곡선 C 위의 점 P에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^\pi\{\sin(\sin\pi)+\cos(\sin\pi)\times\cos\pi\}}{e^\pi\{\cos(\sin\pi)-\sin(\sin\pi)\times\cos\pi\}}$$

$=\frac{-e^\pi}{e^\pi}=-1$

그러므로 점 P에서의 접선의 방정식은

$y=-(x-e^\pi)$

이때 접선의 x절편은 e^π, y절편은 e^π이므로 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\frac{1}{2}\times e^\pi\times e^\pi=\frac{1}{2}e^{2\pi}$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=2$이므로

$10(a+b)=10\left(\frac{1}{2}+2\right)=25$

[참고]

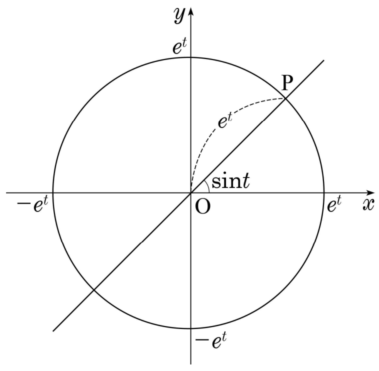
원 $x^2+y^2=(e^t)^2$은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 e^t인 원이고, 점 P가 원 위의 점이므로 $\overline{\mathrm{OP}}=e^t$이다.

직선 OP의 기울기가 $\tan(\sin t)$이므로 직선 OP와 x축의 양의 방향이 이루는 각의 크기는 $\sin t$이다.

따라서 점 P의 좌표는

$\mathrm{P}(e^t\cos(\sin t),\ e^t\sin(\sin t))$

이다.



y
e^t
P
e^t
sin t
−e^t
O
e^t
x
−e^t