2014학년도 3월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

수학 A형 정답

1	③	2	①	3	①	4	②	5	①
6	⑤	7	②	8	④	9	④	10	⑤
11	④	12	②	13	⑤	14	③	15	②
16	①	17	④	18	③	19	⑤	20	③
21	③	22	12	23	24	24	4	25	11
26	160	27	6	28	70	29	20	30	25

해 설

1. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 식의 값을 계산한다.

$16^{\frac{3}{4}} \times 2^{-3}$

$=(2^4)^{\frac{3}{4}} \times 2^{-3}$

$=2^3 \times 2^{-3}$

$=8 \times \frac{1}{8}$

$=1$

2. [출제의도] 행렬의 연산을 이해하고 행렬의 뺄셈을 계산한다.

$A-B$

$=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 $A-B$의 모든 성분의 합은 6이다.

3. [출제의도] 극한의 성질을 이용하여 극한값을 계산한다.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n-3)}{4n^2+5}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2-4n-3}{4n^2+5}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4-\frac{4}{n}-\frac{3}{n^2}}{4+\frac{5}{n^2}}$

$=\frac{4}{4}$

$=1$

4. [출제의도] 등차수열의 성질을 이해한다.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=10$ 에서 $a+2d=10$ ⋯ ㉠

$a_4-a_2=4$에서

$(a+3d)-(a+d)=4$ $\quad\therefore\ d=2$

㉠에 대입하면 $a=6$이다.

$\therefore\ a_8=a+7d=6+7\times 2=20$

5. [출제의도] 지수함수의 성질을 이용하여 지수방정식의 해를 구한다.

$9^x=27^{2x-4}$에서

$3^{2x}=3^{3(2x-4)}$

지수함수는 일대일함수이므로

$2x=3(2x-4)$

$\therefore\ x=3$

6. [출제의도] 등비중항의 성질을 이해한다.

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 a이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$a_n=a\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $\quad(n\ge 1)$

세 수 a_3, 2, a_7이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$2^2=a_3\times a_7=a\left(\frac{1}{2}\right)^2\times a\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{a^2}{2^8}$

$a^2=2^{10}$

$\therefore\ a=32$ $(\because\ a>0)$

7. [출제의도] 그래프의 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬의 성질을 이해한다.

행렬 M^2의 $(i,\,i)$성분은 i번째 꼭짓점에 연결된 변의 개수와 같으므로

$a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44}=2+2+3+3=10$

[다른 풀이]

행렬 M과 M^2을 구하면

$M=\begin{pmatrix} 0&0&1&1\\ 0&0&1&1\\ 1&1&0&1\\ 1&1&1&0 \end{pmatrix}$, $M^2=\begin{pmatrix} 2&2&1&1\\ 2&2&1&1\\ 1&1&3&2\\ 1&1&2&3 \end{pmatrix}$

이므로

$a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44}=2+2+3+3=10$

8. [출제의도] 연립일차방정식의 해가 무수히 많을 조건과 역행렬의 성질을 이해한다.

주어진 연립방정식을 정리하면

$\begin{cases} 3x-3y=kx \\ 3x+5y=-ky \end{cases}$

$\begin{cases} (3-k)x-3y=0 \\ 3x+(5+k)y=0 \end{cases}$

이다. 이를 다시 행렬로 나타내면

$\begin{pmatrix} 3-k & -3 \\ 3 & 5+k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

이므로 $x=0$, $y=0$이외의 해를 갖기 위해서는 행렬 $\begin{pmatrix} 3-k & -3 \\ 3 & 5+k \end{pmatrix}$가 역행렬을 갖지 않아야 한다.

$(3-k)(5+k)-(-9)=0$

$k^2+2k-24=0$

$(k-4)(k+6)=0$

$\therefore\ k=-6$ 또는 $k=4$

따라서 구하는 양수 k의 값은 4이다.

9. [출제의도] 등비수열의 일반항을 구하고 무한등비급수의 합을 구한다.

$a_1=1$, $a_{n+1}=\frac{7}{2}a_n\ (n\ge 1)$에서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공비가 $\frac{7}{2}$인 등비수열이므로

$a_n=\left(\frac{7}{2}\right)^{n-1}$ $\quad(n\ge 1)$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10}{a_n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}10\times\left(\frac{2}{7}\right)^{n-1}$

$=\frac{10}{1-\frac{2}{7}}$

$=14$

10. [출제의도] 지수함수의 성질을 이해하여 문제를 해결한다.

곡선 $y=f(x)$와 $y=h(x)$는 y축 대칭이므로 $h(2)=f(-2)$에서 점 R의 x좌표는 2, 점 P의 x좌표는 -2이다. 점 Q의 x좌표를 α라 하면

$\overline{\mathrm{PQ}}:\overline{\mathrm{QR}}=2:1$에서 $\overline{\mathrm{PQ}}=2\overline{\mathrm{QR}}$이므로

$\alpha+2=2(2-\alpha)$

$\therefore\ \alpha=\frac{2}{3}$

$g(\alpha)=2$ 에서 $b^{\frac{2}{3}}=2$

$\therefore\ b=2^{\frac{3}{2}}$

$g(4)=b^4=\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^4=2^6=64$

[다른 풀이]

세 점 P, Q, R의 y좌표는 모두 2이므로 세 점 P, Q, R의 x좌표는 각각 $-\log_a 2$, $\log_b 2$, $\log_a 2$이다.

$\overline{\mathrm{PQ}}:\overline{\mathrm{QR}}=2:1$에서 $\overline{\mathrm{PQ}}=2\overline{\mathrm{QR}}$이므로

$\log_b 2-(-\log_a 2)=2(\log_a 2-\log_b 2)$

양변을 밑이 2인 로그로 변환하면

$\frac{1}{\log_2 a}=\frac{3}{\log_2 b}$

$\log_2 b=3\log_2 a=\log_2 a^3$

$\therefore\ b=a^3$

$h(2)=2$에서 $a^2=2$

$\therefore\ a=\sqrt{2}$ $(\because\ a>1)$

$\therefore\ b=a^3=(\sqrt{2})^3=2\sqrt{2}$

따라서 $g(x)=(2\sqrt{2})^x$이다.

$\therefore\ g(4)=(2\sqrt{2})^4=\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^4=2^6=64$

11. [출제의도] 지수부등식의 해를 구한다.

$4^{f(x)}-2^{1+f(x)}<8$에서

$2^{2f(x)}-2\times 2^{f(x)}-8<0$

$(2^{f(x)}+2)(2^{f(x)}-4)<0$

$-2<2^{f(x)}<4$

$2^{f(x)}>0$이므로 $0<2^{f(x)}<2^2$

$\therefore\ f(x)<2$

$x^2-x-4<2$에서

$(x+2)(x-3)<0$

$\therefore\ -2<x<3$

부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는 4이다.

12. [출제의도] 경우의 수를 이용하여 수열의 일반항을 구하고 수열의 극한값을 구한다.

$2n$장의 카드에서 세 장의 카드를 동시에 뽑을 때, 세 장의 카드에 적힌 수의 합이 짝수인 경우는 세 수 모두 짝수인 경우와 세 수 중 두 수는 홀수이고 나머지 한 수는 짝수인 경우가 있다.

i) 세 수가 모두 짝수인 경우의 수는 짝수 n개 중 3개를 택하는 경우의 수이므로

$_n\mathrm{C}_3=\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

ii) 세 수 중 두 수는 홀수이고 나머지 한 수는 짝수인 경우의 수는 홀수 n개 중 2개를 택하고 짝수 n개 중 한 개를 택하는 경우의 수이므로

$_n\mathrm{C}_2\times{}_n\mathrm{C}_1=\frac{n(n-1)}{2!}\times n=\frac{n^2(n-1)}{2}$

i), ii)에서

$a_n=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}+\frac{n^2(n-1)}{2}$

$=\frac{n(n-1)(n-2+3n)}{6}$

$=\frac{n(n-1)(2n-1)}{3}$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(2n-1)}{3n^3}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)}{3}$

$=\frac{2}{3}$

13. [출제의도] 행렬의 거듭제곱과 역행렬의 성질을 이해한다.

직선 l_5의 x절편과 y절편이 각각 $3\left(\frac{3}{4}\right)^5$, $4\left(\frac{3}{4}\right)^5$이므로

$P=\begin{pmatrix} 3\left(\frac{3}{4}\right)^5 & 0 \\ 0 & 4\left(\frac{3}{4}\right)^5 \end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$에서

$A^5=\begin{pmatrix}\left(\frac{3}{4}\right)^5 & 0\\ 0 & \left(\frac{3}{4}\right)^5\end{pmatrix}$이고 $(A^5)^{-1}=\begin{pmatrix}\left(\frac{4}{3}\right)^5 & 0\\ 0 & \left(\frac{4}{3}\right)^5\end{pmatrix}$

$P=A^5B$에서

$B=(A^5)^{-1}P=\begin{pmatrix}\left(\frac{4}{3}\right)^5 & 0\\ 0 & \left(\frac{4}{3}\right)^5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\left(\frac{3}{4}\right)^5 & 0\\ 0 & 4\left(\frac{3}{4}\right)^5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$

따라서 행렬 B의 모든 성분의 합은 7이다.

14. [출제의도] 상용로그의 성질을 이용하여 부등식의 해를 구한다.

직선 l_n이 점 $\left(3\left(\frac{3}{4}\right)^n,\ 0\right)$과 $\left(0,\ 4\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$을 지나므로 직선 l_n과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 3\left(\frac{3}{4}\right)^n\times 4\left(\frac{3}{4}\right)^n=6\left(\frac{3}{4}\right)^{2n}$

이고 이 넓이가 $\frac{1}{10}$ 이하가 되어야 하므로

$6\left(\frac{3}{4}\right)^{2n}\le\frac{1}{10}$

양변에 상용로그를 취하면

$\log 6+2n(\log 3-2\log 2)\le -1$

$n\ge\frac{1+\log 2+\log 3}{2(2\log 2-\log 3)}$

$n\ge\frac{1+0.30+0.48}{2(0.60-0.48)}$

$n\ge\frac{1.78}{0.24}=7.4\times\times$

따라서 자연수 n의 최솟값은 8이다.

15. [출제의도] 등차수열의 합의 성질을 이용하여 수열의 항을 추론한다.

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 30이고 공차가 $-d$인 등차수열이므로

$a_n=30-(n-1)d\ \ (n\ge 1)$

이때

$a_m+a_{m+1}+\cdots+a_{m+k}$

$=\frac{(k+1)\{30-(m-1)d+30-(m+k-1)d\}}{2}$

$=\frac{(k+1)\{60-(2m+k-2)d\}}{2}=0$

$k+1>0$이므로

$(2m+k-2)d=60$

$2m+k=2+\frac{60}{d}$

이를 만족하는 자연수 m, k이 존재하기 위해서는 d가 60의 약수이어야 한다.

$60=2^2\times 3\times 5$이므로 d의 개수는 $3\times 2\times 2=12$

[다른 풀이]

등차수열의 연속된 $(k+1)$개의 항의 합이 0이기 위한 수열의 조건은 다음과 같다.

ⅰ) $k+1$이 홀수일 때

$\cdots, d,\ 0,\ -d,\ \cdots$

이때 d는 30의 양의 약수가 되어야 하므로

$d=1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 10,\ 15,\ 30$

ⅱ) $k+1$이 짝수일 때

$\cdots, \frac{d}{2}, -\frac{d}{2}, \cdots$

이때 $30-(n-1)d=\frac{d}{2}$에서

$n=\frac{1}{2}+\frac{30}{d}$

n은 자연수이므로

$d=4,\ 12,\ 20,\ 60$

ⅰ), ⅱ)에서 구하는 d의 개수는 12이다.

16. [출제의도] 귀납적으로 정의된 수열의 일반항을 구하는 과정을 증명한다.

수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 0이 아니므로

$\frac{a_n}{n}-\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_na_{n+1}}{n+1}$

의 양변에 $\frac{n(n+1)}{a_na_{n+1}}$을 곱하면

$\frac{n+1}{a_{n+1}}-\frac{n}{a_n}=\boxed{\ n\ }$

이다. $b_n=\frac{n}{a_n}$이라 하면 $b_1=\frac{1}{2}$이고

$b_{n+1}-b_n=\boxed{\ n\ }\ \ (n\ge 1)$

이므로

$b_n=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}k=\frac{1}{2}+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n^2-n+1}{2}$

$a_n=\frac{n}{b_n}=\boxed{\frac{2n}{n^2-n+1}}$

따라서 $f(n)=n,\ g(n)=\frac{2n}{n^2-n+1}$이다.

$\therefore\ f(13)g(4)=13\times\frac{8}{13}=8$

17. [출제의도] 도형의 성질을 이용하여 무한등비급수에 관한 문제를 해결한다.

$\overline{P_1B_1}=\overline{B_1Q_1}=2$, $\angle P_1B_1Q_1=90°$이므로

직각이등변삼각형 $P_1B_1Q_1$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2^2=2$이다.

$\overline{B_1D_1}$이 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 두 변 B_2C_2, D_2A_2와 만나는 점을 각각 M_1, N_1이라 하고, 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 한 변의 길이를 x라 하면

$\overline{B_1M_1}=\sqrt{2}$, $\overline{M_1N_1}=x$, $\overline{N_1D_1}=\overline{A_2N_1}=\frac{x}{2}$

이고 $\overline{B_1D_1}=3\sqrt{2}$이므로

$\overline{B_1D_1}=\overline{B_1M_1}+\overline{M_1N_1}+\overline{N_1D_1}$

$=\sqrt{2}+x+\frac{x}{2}=3\sqrt{2}$

$\therefore\ x=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

따라서 두 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$과 $A_2B_2C_2D_2$의 닮음비는

$\overline{A_1B_1}:\overline{A_2B_2}=3:\frac{4\sqrt{2}}{3}=9:4\sqrt{2}$

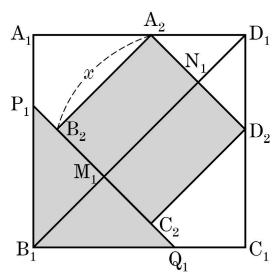
이다.

모든 자연수 n에 대하여 그림 R_n은 정사각형과 직각이등변삼각형으로 이루어진 닮음인 도형이므로

그림 R_1에 색칠되어 있는 부분의 넓이 S_1과

그림 R_2에 색칠되어 있는 부분의 넓이 S_2의 비는

$S_1:S_2=9^2:(4\sqrt{2})^2=81:32$



그림에서 그림 R_1에 색칠되어 있는 부분의 넓이 S_1은 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 넓이와 직각이등변삼각형 $P_1B_1Q_1$의 넓이의 합이므로 수열 $\{S_n\}$은

첫째항이 $S_1=\frac{1}{2}\times 2\times 2+\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2=\frac{50}{9}$이고

공비가 $\frac{32}{81}$인 등비수열이다.

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{50}{9}}{1-\frac{32}{81}}=\frac{450}{49}$

[다른 풀이]

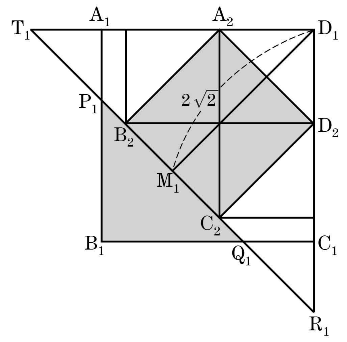
정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 한 변의 길이가 3이므로

$\overline{B_1D_1}=3\sqrt{2}$

꼭짓점 D_1에서 선분 P_1Q_1에 내린 수선의 발을 M_1이라 하면 $\overline{D_1M_1}=2\sqrt{2}$이다.

직선 D_1A_1과 직선 P_1Q_1의 교점을 T_1, 직선 C_1D_1과 직선 P_1Q_1의 교점을 R_1이라 하자.

이때 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 넓이는 직각이등변삼각형 $T_1R_1D_1$의 넓이의 $\frac{4}{9}$이다.



직각이등변삼각형 $T_1R_1D_1$은 높이가 $2\sqrt{2}$이고, 밑변의 길이가 $4\sqrt{2}$이므로 직각이등변삼각형 $T_1R_1D_1$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 4\sqrt{2}=8$

이고, 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 넓이는

$8\times\frac{4}{9}=\frac{32}{9}$

이다. 따라서 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 한 변의 길이는

$\overline{A_2B_2}=\sqrt{\frac{32}{9}}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

$\therefore\ \overline{A_1B_1}:\overline{A_2B_2}=3:\frac{4\sqrt{2}}{3}=9:4\sqrt{2}$

모든 자연수 n에 대하여 그림 R_n은 정사각형과 직각이등변삼각형으로 이루어진 닮음인 도형이므로

그림 R_1에 색칠되어 있는 부분의 넓이 S_1과

그림 R_2에 색칠되어 있는 부분의 넓이 S_2의 비는

$S_1:S_2=9^2:(4\sqrt{2})^2=81:32$

그림에서 그림 R_1에 색칠되어 있는 부분의 넓이 S_1은 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 넓이와 직각이등변삼각형 $P_1B_1Q_1$의 넓이의 합이므로 수열 $\{S_n\}$은

첫째항이 $S_1=\frac{1}{2}\times 2\times 2+\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2=\frac{50}{9}$이고

공비가 $\frac{32}{81}$인 등비수열이다.

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{50}{9}}{1-\frac{32}{81}}=\frac{450}{49}$

18. [출제의도] 등차수열의 일반항과 합의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

$2a_n+n=p$에

$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 20$을 대입하면

$2a_1+1=p$

$2a_2+2=p$

$\cdots$

$2a_{20}+20=p$

변끼리 더하면

$2(a_1+a_2+\cdots+a_{20})+(1+2+\cdots+20)=20p$

$2p+\frac{20\times 21}{2}=20p$

$18p=210$

$\therefore\ p=\frac{35}{3}$

$2a_{10}+10=\frac{35}{3}$에서

$a_{10}=\frac{1}{2}\left(\frac{35}{3}-10\right)=\frac{5}{6}$

19. [출제의도] 역행렬의 성질을 이해하고 주어진 조건

에 맞는 행렬의 성질을 추론한다.

ㄱ. $A^2-BA=E$, $(A-B)A=E$

$\therefore\ A^{-1}=A-B$

ㄴ. ㄱ에 의하여 $(A-B)A=E=A(A-B)$

$A^2-BA=A^2-AB$

$A^2=AB+E$

$\therefore\ AB=BA$

$(A-B+2E)(A-B-2E)=O$에서

$(A-B)^2-4E^2=O$이고 $AB=BA$이므로

$A^2-2AB+B^2-4E=O$

$\therefore\ A^2+B^2=2AB+4E$

ㄷ. ㄱ에서 $(A-B)^{-1}=A$이고,

ㄴ의 $(A-B)^2=4E$에서

$(A-B)^{-1}=\frac{1}{4}(A-B)$

역행렬을 가지는 행렬의 역행렬은 유일하므로

$(A-B)^{-1}=A=\frac{1}{4}(A-B)$

$\therefore\ B=-3A$

따라서 B의 모든 성분의 합은 A의 모든 성분의 합에 -3을 곱한 값과 같으므로 A의 모든 성분의 합이 2이면 B의 모든 성분의 합은 -6이다.

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

[다른 풀이]

ㄷ. $(A-B)^{-1}=A$이고 $A^2=BA+E$이므로

$A^2=BA+E$을 $A^2+B^2=2AB+4E$에 대입하면

$BA+E+B^2=2AB+4E$

$B^2=AB+3E$ ($\because\ AB=BA$)

$(A-B)B=-3E$

$\therefore\ A=(A-B)^{-1}=-\frac{1}{3}B$

$\therefore\ B=-3A$

20. [출제의도] 수열의 극한의 성질을 이용하여 극한값을 구한다.

조건 (가)에서 양변을 4^n으로 나누면

$1<\frac{a_n}{4^n}<1+\frac{1}{4^n}$

$\lim_{n\to\infty}1=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4^n}\right)=1$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{4^n}=1$ … ㉠

조건 (나)에서

$2+2^2+2^3+\cdots+2^n=\frac{2(2^n-1)}{2-1}$

$=2^{n+1}-2$

$2^{n+1}-2<b_n<2^{n+1}$에서 양변을 2^n으로 나누면

$2-\frac{2}{2^n}<\frac{b_n}{2^n}<2$

$\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{2}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}2=2$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{2^n}=2$ … ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\frac{4a_n+b_n}{2a_n+2^nb_n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4a_n+b_n}{4^n}}{\frac{2a_n+2^nb_n}{4^n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\times\frac{a_n}{4^n}+\frac{b_n}{2^n}\times\frac{1}{2^n}}{2\times\frac{a_n}{4^n}+\frac{b^n}{2^n}}$

$=\frac{4}{2+2}=1$

21. [출제의도] 수열의 규칙성을 찾아서 수열을 추론하고 합을 구한다.

$n\geq 2$일 때, 제 $n-1$행의 맨 오른쪽 끝의 수는

$1+2+3+\cdots+(n-1)=\sum_{k=1}^{n-1}k=\frac{n(n-1)}{2}$이다.

따라서 a_n은 $\frac{n(n-1)}{2}$보다 큰 수 중 가장 작은 n의 배수이다.

ⅰ) n이 홀수일 때,

$\frac{n(n-1)}{2}$이 n의 배수이므로

$a_n=\frac{n(n-1)}{2}+n=\frac{n(n+1)}{2}$

$a_{2n-1}=\frac{(2n-1)(2n-1+1)}{2}=2n^2-n$

ⅱ) n이 짝수일 때,

$\frac{n(n-1)}{2}=n\times\frac{n-2}{2}+\frac{n}{2}$이므로

$a_n=\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n}{2}=\frac{1}{2}n^2$

$a_{2n}=\frac{1}{2}(2n)^2=2n^2$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{30}a_n=\sum_{n=1}^{15}(a_{2n-1}+a_{2n})$

$=\sum_{n=1}^{15}(2n^2-n+2n^2)$

$=4\sum_{n=1}^{15}n^2-\sum_{n=1}^{15}n$

$=4\times\frac{15\times16\times31}{6}-\frac{15\times16}{2}$

$=4840$

22. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 로그방정식의 해를 구한다.

$\log_2 x=1+\log_2(x-6)$

$\log_2 x=\log_2 2(x-6)$

$x=2(x-6)$

$\therefore\ x=12$

23. [출제의도] 행렬의 연산과 거듭제곱을 계산한다.

$A=\begin{pmatrix}2&-1\\1&-2\end{pmatrix}$에서

$A^2=\begin{pmatrix}2&-1\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}=3E$ (단, E는 단위행렬)

이므로 $A^3=3A$, $A^4=9E$이다.

$A+A^2+A^3+A^4$

$=A+3E+3A+9E$

$=4A+12E$

$=4\begin{pmatrix}2&-1\\1&-2\end{pmatrix}+12\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}20&-4\\4&4\end{pmatrix}$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은

$20+(-4)+4+4=24$

24. [출제의도] 수열의 극한의 성질을 이해한다.

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+an}-n+2a\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+an-(n-2a)^2}{\sqrt{n^2+an}+n-2a}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{5an-4a^2}{\sqrt{n^2+an}+n-2a}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{5a-\frac{4a^2}{n}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}}+1-\frac{2a}{n}}$

$=\frac{5a}{2}=10$

$\therefore\ a=4$

25. [출제의도] 행렬을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

직선 OA의 방정식은

$y=\frac{5}{4}x$

$\therefore\ 5x-4y=0$ … ㉠

직선 BC의 방정식은

$y-3=-\frac{2}{7}(x+3)$

$\therefore\ 2x+7y=15$ … ㉡

㉠, ㉡의 연립방정식을 행렬로 나타내면

$\begin{pmatrix}5&-4\\2&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\15\end{pmatrix}$

$\therefore\ a=-4,\ b=15$

$\therefore\ a+b=11$

26. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

주어진 식을 정리하면

$\log\frac{Q_t}{Q_0}=kt$

$\frac{Q_t}{Q_0}=10^{kt}$

충전된 전하량이 Q_0인 축전기에 전구를 연결한 지 a초 후에 남은 전하량은 $Q_a=\frac{1}{4}Q_0$이므로

$\frac{Q_a}{Q_0}=\frac{1}{4}=10^{ak}$ … ㉠

충전된 전하량이 Q_0인 축전기에 전구를 연결한 지 b초 후에 남은 전하량은 $Q_b=\frac{1}{10}Q_0$이므로

$\frac{Q_b}{Q_0}=\frac{1}{10}=10^{bk}$ … ㉡

충전된 전하량이 Q_0인 축전기에 전구를 연결한 지 $2a+b$초 후에 남은 전하량은 Q_{2a+b}라 하면 ㉠, ㉡에 의해

$\frac{Q_{2a+b}}{Q_0}=10^{(2a+b)k}=10^{2ak}10^{bk}=\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{1}{10}=\frac{1}{160}$

$\therefore\ Q_{2a+b}=\frac{1}{160}Q_0$

$\therefore\ p=160$

[다른 풀이]

a초 후에 남은 전하량은 $Q_a=\frac{1}{4}Q_0$이므로

$\log\frac{1}{4}Q_0-\log Q_0=ak$

$\log\frac{1}{4}=ak$

b초 후에 남은 전하량은 $Q_b=\frac{1}{10}Q_0$이므로

$\log\frac{1}{10}Q_0-\log Q_0=bk$

$\log\frac{1}{10}=bk$

$2a+b$초 후에 남은 전하량은 $\frac{Q_0}{p}$이므로

$\log\frac{Q_0}{p}-\log Q_0=(2a+b)k$

$\log\frac{1}{p}=(2a+b)k=2ak+bk$

$=2\log\frac{1}{4}+\log\frac{1}{10}$

$=\log\frac{1}{160}$

$\therefore\ p=160$

27. [출제의도] 등차수열의 성질과 합을 이용하여 극한값을 구한다.

수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=1+(n-1)\times6=6n-5$이다.

$\therefore\ a_{2n}=12n-5$

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$

$=\sum_{k=1}^{n}(6k-5)$

$=6\sum_{k=1}^{n}k-5n$

$=6\times\frac{n(n+1)}{2}-5n$

$= 3n^2 - 2n$

$\therefore\ S_{2n} = 3\times(2n)^2 - 2\times(2n) = 12n^2 - 4n$

$a_{n+1} - a_n = 6\ \ (n \geq 1)$이므로

$T_{2n} = -a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^{2n}a_{2n}$

$= (-a_1 + a_2) + (-a_3 + a_4) + \cdots + (-a_{2n-1} + a_{2n})$

$= 6 + 6 + \cdots + 6$

$= 6n$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{2n}T_{2n}}{S_{2n}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(12n-5)\times 6n}{12n^2 - 4n}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{36n - 15}{6n - 2}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{36 - \frac{15}{n}}{6 - \frac{2}{n}}$

$= \dfrac{36}{6} = 6$

28. [출제의도] 로그함수의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

$\overline{\mathrm{PQ}} = \log_{\frac{1}{9}} a - \log_3 a = -\dfrac{3}{2}\log_3 a$

$\overline{\mathrm{SR}} = \log_3 b - \log_{\frac{1}{9}} b = \dfrac{3}{2}\log_3 b$

$\overline{\mathrm{PQ}} : \overline{\mathrm{SR}} = 2 : 1$에서 $\overline{\mathrm{PQ}} = 2\,\overline{\mathrm{SR}}$이므로

$-\dfrac{3}{2}\log_3 a = 2\times\dfrac{3}{2}\log_3 b$

$\log_3 a + 2\log_3 b = 0$

$\therefore\ ab^2 = 1\ \cdots$ ㉠

선분 PR의 중점의 x좌표가 $\dfrac{9}{8}$이므로

$\dfrac{a+b}{2} = \dfrac{9}{8}\ \cdots$ ㉡

㉡에서 $a = \dfrac{9}{4} - b$를 ㉠에 대입하면

$\left(\dfrac{9}{4} - b\right)b^2 = 1$

$4b^3 - 9b^2 + 4 = 0$

$(b-2)(4b^2 - b - 2) = 0$

$b = 2$ 또는 $b = \dfrac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$

$b > 1$이므로 $b = 2$

따라서 $a = \dfrac{1}{4}$, $b = 2$이므로

$40(b-a) = 70$

29. [출제의도] 수열의 합과 일반항의 관계와 상용로그의 가수의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

$\sum\limits_{k=1}^{n} k\log a_k = n^2 - n\ \ (n \geq 1)$

$b_n = n\log a_n$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ 라 하면 $S_n = n^2 - n$이므로

$b_1 = S_1 = 0$

$b_n = S_n - S_{n-1}$

$= (n^2 - n) - \{(n-1)^2 - (n-1)\}$

$= 2n - 2\ \ (n \geq 2)$

$\therefore\ b_n = n\log a_n = 2n - 2\ \ (n \geq 1)$

$\therefore\ \log a_n = 2 - \dfrac{2}{n}\ \ (n \geq 1)$

$n = 1$ 또는 $n = 2$일 때, $\log a_n$의 가수는 0이므로

$m \geq 3$이다. 이때 $0 < \dfrac{2}{m} < 1$이므로

$\log a_m = 1 + \left(1 - \dfrac{2}{m}\right)$

에서 $\log a_m$의 가수는 $1 - \dfrac{2}{m}$이다.

$1 - \dfrac{2}{m} = 0.9$

$\therefore\ m = 20$

30. [출제의도] 도형의 성질을 이용하여 극한에 관한 문제를 해결한다.

점 Q_n은 직선 $y = \sqrt{3}x$ 위의 점이므로 $\mathrm{Q}_n\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{\sqrt{3}}{n}\right)$이다.

$\overline{\mathrm{OP}_n} = p_n$, $\overline{\mathrm{OQ}_n} = q_n$, $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} = r_n$이라 하면

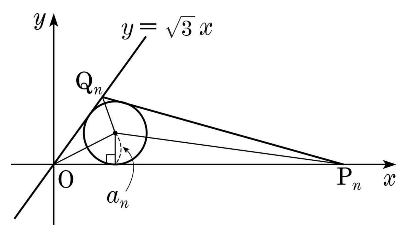
$p_n = n$

$q_n = \sqrt{\left(\dfrac{1}{n}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{n}\right)^2} = \dfrac{2}{n}$

$r_n = \sqrt{\left(n - \dfrac{1}{n}\right)^2 + \left(0 - \dfrac{\sqrt{3}}{n}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{n^4 - 2n^2 + 4}}{n}$

삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$의 넓이를 S_n이라 하면

$S_n = \dfrac{1}{2}\times n\times\dfrac{\sqrt{3}}{n} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$



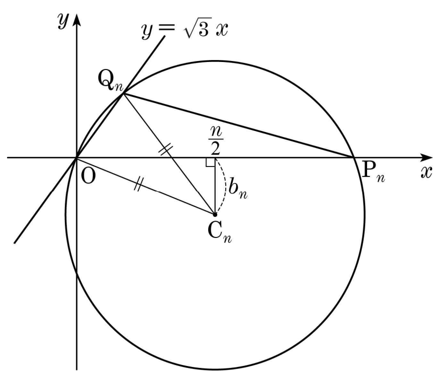
삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$의 내접원의 중심에서 x축까지의 거리 a_n은 내접원의 반지름의 길이와 같다.

$S_n = \dfrac{1}{2}(p_n + q_n + r_n)\times a_n$에서

$a_n = \dfrac{2S_n}{p_n + q_n + r_n}$

$= \dfrac{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{n + \frac{2}{n} + \frac{\sqrt{n^4 - 2n^2 + 4}}{n}}$

$= \dfrac{\sqrt{3}\,n}{n^2 + 2 + \sqrt{n^4 - 2n^2 + 4}}\ \cdots$ ㉠



삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$의 외접원의 중심을 $\mathrm{C}_n(x_n, y_n)$이라 하면 점 C_n은 선분 OP_n의 수직이등분선 위에 있으므로 $x_n = \dfrac{n}{2}$이다.

$\overline{\mathrm{OC}_n} = \overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{C}_n}$에서 $\overline{\mathrm{OC}_n}^{\,2} = \overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{C}_n}^{\,2}$이므로

$\left(\dfrac{n}{2}\right)^2 + {y_n}^2 = \left(\dfrac{n}{2} - \dfrac{1}{n}\right)^2 + \left(y_n - \dfrac{\sqrt{3}}{n}\right)^2$

$\dfrac{n^2}{4} + {y_n}^2 = \dfrac{n^2}{4} - 1 + \dfrac{1}{n^2} + {y_n}^2 - \dfrac{2\sqrt{3}}{n}y_n + \dfrac{3}{n^2}$

$\therefore\ y_n = \dfrac{4 - n^2}{2\sqrt{3}\,n}$

$b_n = |y_n|$이므로 $n \geq 2$일 때

$b_n = \dfrac{n^2 - 4}{2\sqrt{3}\,n}\ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{3}\,n}{n^2 + 2 + \sqrt{n^4 - 2n^2 + 4}}\times\dfrac{n^2 - 4}{2\sqrt{3}\,n}\right)$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2 - 4}{2\left(n^2 + 2 + \sqrt{n^4 - 2n^2 + 4}\right)}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1 - \frac{4}{n^2}}{2\left(1 + \frac{2}{n^2} + \sqrt{1 - \frac{2}{n^2} + \frac{4}{n^4}}\right)}$

$= \dfrac{1}{4}$

$\therefore\ 100L = 100\times\dfrac{1}{4} = 25$