

제 2 교시

수학 영역(A형)

5지선다형

1. $16^{\frac{3}{4}} \times 2^{-3}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

2. 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 에 대하여 행렬 $A-B$ 의 모든 성분의 합은? [2점]

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(2n-3)}{4n^2+5}$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_3 = 10$, $a_4 - a_2 = 4$ 일 때, a_8 의 값은? [3점]

- ① 18 ② 20 ③ 22 ④ 24 ⑤ 26

5. 방정식 $9^x = 27^{2x-4}$ 을 만족시키는 실수 x 의 값은? [3점]

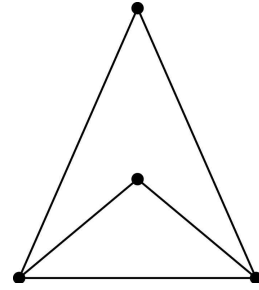
- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

6. 첫째항이 a 이고 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 세 수 $a_3, 2, a_7$ 이 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, 양수 a 의 값은?

[3점]

- ① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

7. 다음 그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬을 M 이라 하자.



행렬 M^2 의 (i, j) 성분을 a_{ij} ($i=1, 2, 3, 4, j=1, 2, 3, 4$)라 할 때, $a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44}$ 의 값은? [3점]

- ① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

8. x, y 에 대한 연립일차방정식

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

가 $x=0, y=0$ 이외의 해를 갖도록 하는 양수 k 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

9. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1=1$ 이고 $2a_{n+1}=7a_n$ ($n \geq 1$)을 만족시킬 때,

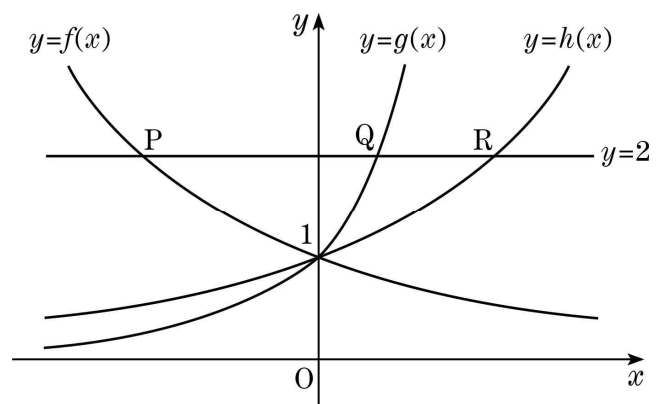
무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{a_n}$ 의 값은? [3점]

- ① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

10. 세 지수함수

$$f(x) = a^{-x}, g(x) = b^x, h(x) = a^x \quad (1 < a < b)$$

에 대하여 직선 $y=2$ 가 세 곡선 $y=f(x), y=g(x), y=h(x)$ 와 만나는 점을 각각 P, Q, R라 하자. $\overline{PQ} : \overline{QR} = 2 : 1$ 이고 $h(2)=2$ 일 때, $g(4)$ 의 값은? [3점]



- ① 16 ② $16\sqrt{2}$ ③ 32 ④ $32\sqrt{2}$ ⑤ 64

11. 함수 $f(x) = x^2 - x - 4$ 에 대하여 부등식

$$4^{f(x)} - 2^{1+f(x)} < 8$$

을 만족시키는 정수 x 의 개수는? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

12. 1부터 $2n$ 까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 $2n$ 장의 카드가 있다. 이 중 세 장의 카드를 동시에 뽑을 때, 세 장의 카드에 적힌 수의 합이 짝수가 되도록 뽑는 경우의 수를 a_n 이라 하자.

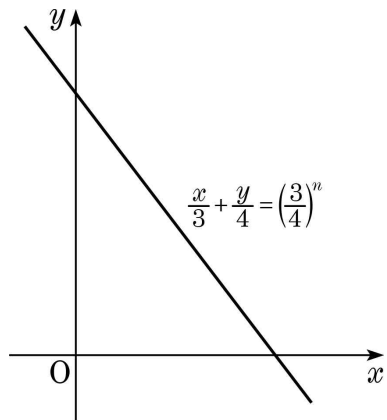
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^3}$ 의 값은? (단, $n \geq 2$ 인 자연수이다.) [3점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ 1 ⑤ $\frac{7}{6}$

[13~14] 자연수 n 에 대하여 좌표평면에서 직선

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

을 l_n 이라 하자. 13번과 14번의 두 물음에 답하시오.



13. $n=5$ 일 때 직선 l_5 의 x 절편을 α , y 절편을 β 라 하자. 두 행렬

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

에 대하여 등식 $P = A^5 B$ 를 만족시키는 행렬 B 의 모든 성분의 합은? [3점]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

14. 직선 l_n 과 x 축, y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{1}{10}$ 이하가

되도록 하는 자연수 n 의 최솟값은?

(단, $\log 2 = 0.30$, $\log 3 = 0.48$ 로 계산한다.) [4점]

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

15. 첫째항이 30이고 공차가 $-d$ 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 등식

$$a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+k} = 0$$

을 만족시키는 두 자연수 m, k 가 존재하도록 하는 자연수 d 의 개수는? [4점]

- ① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

16. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 2$ 이고

$$\frac{a_n}{n} - \frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n a_{n+1}}{n+1} \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정이다.

수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항이 0이 아니므로

$$\frac{a_n}{n} - \frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n a_{n+1}}{n+1}$$

을 변형하면

$$\frac{n+1}{a_{n+1}} - \frac{n}{a_n} = \boxed{\text{(가)}}$$

이다. $b_n = \frac{n}{a_n}$ 이라 하면 $b_1 = \frac{1}{2}$ 이고

$$b_{n+1} - b_n = \boxed{\text{(가)}} \quad (n \geq 1)$$

이므로

$$a_n = \boxed{\text{(나)}}$$

이다.

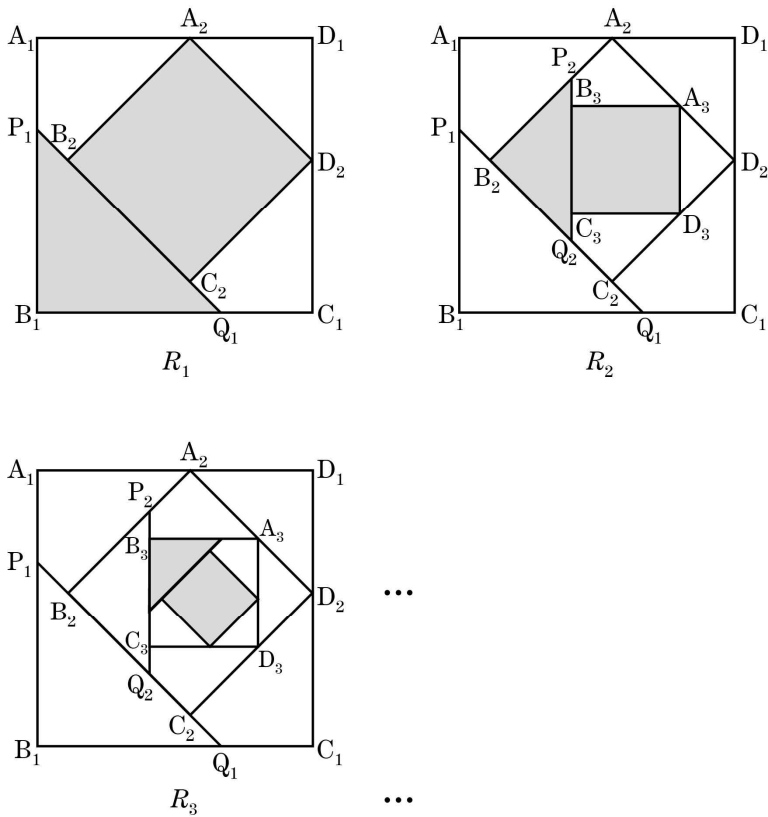
위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n), g(n)$ 이라 할 때, $f(13)g(4)$ 의 값은? [4점]

- ① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

17. 그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 에서 선분 A_1B_1 을 1:2로 내분하는 점을 P_1 , 선분 B_1C_1 을 2:1로 내분하는 점을 Q_1 이라 하자. 선분 A_1D_1 위의 점 A_2 , 선분 P_1Q_1 위의 두 점 B_2, C_2 , 선분 C_1D_1 위의 점 D_2 를 네 꼭짓점으로 하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 를 그리고 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 의 내부와 삼각형 $P_1B_1Q_1$ 의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 에서 선분 A_2B_2 를 1:2로 내분하는 점을 P_2 , 선분 B_2C_2 를 2:1로 내분하는 점을 Q_2 라 하자. 선분 A_2D_2 위의 점 A_3 , 선분 P_2Q_2 위의 두 점 B_3, C_3 , 선분 C_2D_2 위의 점 D_3 을 네 꼭짓점으로 하는 정사각형 $A_3B_3C_3D_3$ 을 그리고 정사각형 $A_3B_3C_3D_3$ 의 내부와 삼각형 $P_2B_2Q_2$ 의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{375}{49}$ ② $\frac{400}{49}$ ③ $\frac{425}{49}$ ④ $\frac{450}{49}$ ⑤ $\frac{475}{49}$

18. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{n=1}^{20} a_n = p$ 라 할 때, 등식

$$2a_n + n = p \quad (n \geq 1)$$

가 성립한다. a_{10} 의 값은? (단, p 는 상수이다.) [4점]

- ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ $\frac{11}{12}$ ⑤ 1

19. 두 이차정사각행렬 A, B 가

$$A^2 = BA + E, (A - B + 2E)(A - B - 2E) = O$$

를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, E 는 단위행렬이고, O 는 영행렬이다.) [4점]

———— < 보 기 > ————

ㄱ. A 의 역행렬이 존재한다.

ㄴ. $A^2 + B^2 = 2AB + 4E$

ㄷ. A 의 모든 성분의 합이 2이면 B 의 모든 성분의 합은 -6 이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) 4^n < a_n < 4^n + 1$$

$$(나) 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n < b_n < 2^{n+1}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4a_n + b_n}{2a_n + 2^n b_n}$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

수학 영역(A형)

9

21. 자연수 n 에 대하여 다음과 같이 모든 자연수를 작은 것부터 n 행에 n 개씩 차례로 나열하였다. 이때 n 행에 있는 n 의 배수를 a_n 이라 하자. 예를 들어 $a_2 = 2$, $a_5 = 15$ 이다.

1행	1					
2행	2	3				
3행	4	5	6			
4행	7	8	9	10		
5행	11	12	13	14	15	
6행	16	17	18	19	20	21
⋮		⋮				⋮

수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{n=1}^{30} a_n$ 의 값은? [4점]

- ① 4800 ② 4820 ③ 4840 ④ 4860 ⑤ 4880

단답형

22. 방정식 $\log_2 x = 1 + \log_2(x-6)$ 을 만족시키는 실수 x 의 값을 구하시오. [3점]

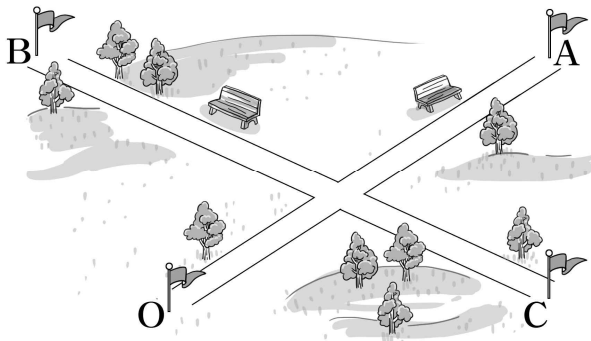
23. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ 에 대하여 행렬 $A + A^2 + A^3 + A^4$ 의 모든 성분의 합을 구하시오. [3점]

24. 실수 a 에 대하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an} - n + 2a) = 10$$

일 때, a 의 값을 구하시오. [3점]

25. 그림과 같이 어느 지역의 네 지점을 연결하는 도로가 있다.



이 지역의 네 지점을 좌표평면 위에 네 점 $O(0, 0)$, $A(4, 5)$, $B(-3, 3)$, $C(4, 1)$ 로 나타낼 때, 두 선분 OA , BC 의 교점을 $P(x, y)$ 라 하면 등식 $\begin{pmatrix} 5 & a \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ 가 성립한다. 두 상수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값을 구하시오. [3점]

26. 충전된 전하량이 Q_0 인 축전기에 전구를 연결한 지 t 초 후에 남아 있는 전하량을 Q_t 라 하면

$$\log Q_t - \log Q_0 = kt \quad (\text{단, } k \text{는 상수})$$

가 성립한다. 충전된 전하량이 Q_0 인 축전기에 전구를 연결한 지 a 초 후에 남아 있는 전하량은 $\frac{1}{4}Q_0$ 이고, 충전된 전하량이 Q_0 인 축전기에 전구를 연결한 지 b 초 후에 남아 있는 전하량은 $\frac{1}{10}Q_0$ 이다. 충전된 전하량이 Q_0 인 축전기에 전구를 연결한 지 $2a+b$ 초 후에 남아 있는 전하량은 $\frac{Q_0}{p}$ 이다. 상수 p 의 값을 구하시오. (단, 전하량의 단위는 쿨롱(C)이다.) [4점]

27. 첫째항이 1이고 공차가 6인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

$$T_n = -a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n$$

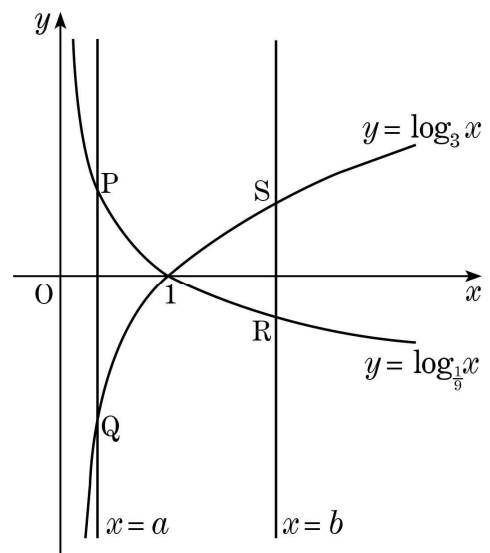
이러 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n} T_{2n}}{S_{2n}}$ 의 값을 구하시오. [4점]

28. 좌표평면에서 직선 $x=a$ ($0 < a < 1$)가 두 곡선 $y = \log_{\frac{1}{9}} x$, $y = \log_3 x$ 와 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 직선 $x=b$ ($b > 1$)가 두 곡선 $y = \log_{\frac{1}{9}} x$, $y = \log_3 x$ 와 만나는 점을 각각 R, S라 하자. 네 점 P, Q, R, S는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{PQ} : \overline{SR} = 2 : 1$

(나) 선분 PR의 중점의 x 좌표는 $\frac{9}{8}$ 이다.

두 상수 a, b 에 대하여 $40(b-a)$ 의 값을 구하시오. [4점]



수학 영역(A형)

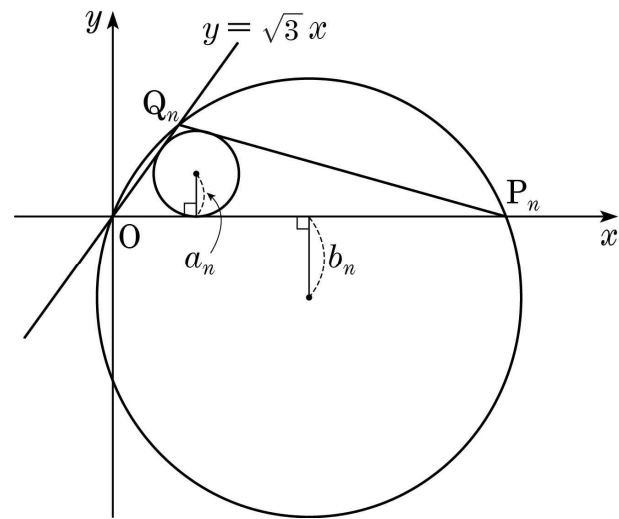
29. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n k \log a_k = n^2 - n \quad (n \geq 1)$$

이 성립한다. $\log a_m$ 의 가수가 0.9일 때, m 의 값을 구하시오.

[4점]

30. 좌표평면 위에 직선 $y = \sqrt{3}x$ 가 있다. 자연수 n 에 대하여 x 축 위의 점 중에서 x 좌표가 n 인 점을 P_n , 직선 $y = \sqrt{3}x$ 위의 점 중에서 x 좌표가 $\frac{1}{n}$ 인 점을 Q_n 이라 하자. 삼각형 OP_nQ_n 의 내접원의 중심에서 x 축까지의 거리를 a_n , 삼각형 OP_nQ_n 의 외접원의 중심에서 x 축까지의 거리를 b_n 이라 할 때 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = L$ 이다. $100L$ 의 값을 구하시오. (단, O 는 원점이다.) [4점]



※ 확인 사항
 ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.