2014학년도 대학수학능력시험 수학영역 A형 정답 및 풀이(홀수형)

1.
출제의도 : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

$$8^{\frac{2}{3}} \times 9^{\frac{1}{2}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} \times (3^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$= 2^2 \times 3 = 12$$

<답> ①

2.
출제의도 : 행렬의 연산을 할 수 있는가?

$$A+2B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

따라서, 행렬 $A+2B$의 모든 성분의 합은 $4+2+1+3=10$

<답> ③

3.
출제의도 : 극한값을 구할 수 있는가?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\times 3^{n+1}+5}{3^n} = \lim_{n\to\infty}\left\{2\times 3+5\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$
$$= 6$$

<답> ⑤

4.
출제의도 : 그래프와 행렬의 관계를 알 수 있는가?

두 꼭짓점이 연결되어 있으면 1, 연결되어 있지 않으면 0의 성분을 가지므로

$a+b+c+d+e=0+1+0+1+0=2$

<답> ②

5.
출제의도 : 미분계수를 이해하여 함수를 구할 수 있는가?

$f'(1)=6$ 이므로 $f'(x)=4x+a$에서
$f'(1)=4+a=6$
$\therefore\ a=2$

<답> ④

6.
출제의도 : 등차수열의 일반항, 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 공차를 구할 수 있는가?

$$a_8-a_6=(6+7d)-(6+5d)=2d$$
$$S_8-S_6=a_8+a_7$$
$$=(6+7d)+(6+6d)$$
$$=12+13d$$
$$\frac{a_8-a_6}{S_8-S_6}=\frac{2d}{12+13d}=2$$
$$d=12+13d$$
$\therefore\ d=-1$

<답> ①

7.
출제의도 : 두 사건이 서로 독립임을 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

$$P(A\cap B^C)=P(A)P(B^C)$$
$$=P(A)\{1-P(B)\}$$

$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{9}$

<답> ②

8.

출제의도 : 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

$x^2-4x+3=3,\ x(x-4)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=4$

$\int_0^4\{3-(x^2-4x+3)\}dx$

$=\int_0^4(-x^2+4x)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^4=\frac{32}{3}$

<답> ③

9.

출제의도 : 이항분포에서의 평균과 분산을 구하여 이항분포에서의 확률을 구할 수 있는가?

$E(X)=9p,\ \ V(X)=9p(1-p)$ 이므로

$(9p)^2=9p(1-p),\ 9p=1-p(\because 0<p<1)$

$\therefore\ p=\frac{1}{10}$

<답> ④

10.

출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 식이 주어진 실생활의 문제를 해결할 수 있는가?

$\frac{v_c}{\frac{1}{2}v_c}=1-k\log\frac{R^{\frac{27}{23}}}{R},\ \ 2=1-\frac{4}{23}k\log R$

$\therefore\ k\log R=-\frac{23}{4}$

$\frac{v_c}{\frac{1}{3}v_c}=1-k\log\frac{R^a}{R},$

$3=1-(a-1)k\log R=1-(a-1)\times(-\frac{23}{4})$

$8=23a-23$

$\therefore\ a=\frac{31}{23}$

<답> ⑤

11.

출제의도 : 함수의 극한을 구할 수 있는가?

$\lim_{x\to-1-0}f(x)+\lim_{x\to+0}f(x)=3+0=3$

<답> ③

12.

출제의도 : 표본평균이 정규분포를 따르는 분포에서 확률을 구할 수 있는가?

약품 1병의 용량을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(m,10^2)$을 따르므로 임의로 추출한 25병의 용량의 표본평균을 확률변수 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $N(m,2^2)$을 따른다.

$P(\overline{X}\geq 2000)$

$=P(Z\geq\frac{2000-m}{2})=0.9772$

$0.5+P(0 \le Z \le \frac{m-2000}{2})=0.9772$

$P(0 \le Z \le \frac{m-2000}{2})=0.4772$

이때, $P(0 \le Z \le 2)=0.4772$ 이므로

$\frac{m-2000}{2}=2$

$\therefore \ m=2004$

<답> ②

13.

출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 일반항을 구한 후 합을 구할 수 있는가?

6^n은 짝수이고 3^n은 홀수이므로

$a_n=f(6^n)-f(3^n)$

$=\log_2 6^n-\log_3 3^n$

$=n(1+\log_2 3)-n$

$=(\log_2 3)n$

$\therefore \ \sum_{n=1}^{15} a_n=\sum_{n=1}^{15}(\log_2 3)n$

$=(\log_2 3)\sum_{n=1}^{15} n$

$=(\log_2 3)\times\frac{15\times16}{2}=120\log_2 3$

<답> ④

14.

출제의도 : 로그의 성질을 활용하여 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

(i) m,n이 모두 홀수이면 mn은 홀수이므로

$f(mn)=\log_3 mn$

$=\log_3 m+\log_3 n$

$=f(m)+f(n)$

이때, 순서쌍 (m,n)의 개수는

$10\times10=100$

(ii) m,n이 모두 짝수이면 mn은 짝수이므로

$f(mn)=\log_2 mn$

$=\log_2 m+\log_2 n$

$=f(m)+f(n)$

이때, 순서쌍 (m,n)의 개수는

$10\times10=100$

(iii) m이 짝수, n이 홀수이면

mn은 짝수이므로

$f(mn)=\log_2 mn=\log_2 m+\log_2 n$

$f(m)+f(n)=\log_2 m+\log_3 n$

$\therefore \log_2 n=\log_3 n$이어야 하므로 $n=1$

따라서, $10\times1=10$

m이 홀수, n이 짝수인 경우도 마찬가지이므로 $10\times1=10$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하고자 하는 순서쌍 (m,n)의 개수는

$100+100+20=220$

<답> ①

15.

출제의도 : 확률의 곱셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

(i) 주머니 A에서 꺼낸 공이 흰 공인 경우

$\frac{2}{5}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{5}$

(ii) 주머니 A에서 꺼낸 공이 검은 공

인 경우

$$\frac{3}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{10}$$

따라서, 구하고자 하는 확률은

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=\frac{3}{10}$$

<답> ⑤

16.

출제의도 : 조건을 만족시키는 일반항 $\{a_n\}$을 구할 수 있는가?

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$은

$a_1=10$,

$(a_{n+1})^n=10(a_n)^{n+1}$ $(n\geq 1)$ ……㉠

식 ㉠의 양변에 상용로그를 취하면

$n\log a_{n+1}=(n+1)\log a_n+1$

이다. 양변을 $n(n+1)$로 나누면

$$\frac{\log a_{n+1}}{n+1}=\frac{\log a_n}{n}+\boxed{\frac{1}{n(n+1)}}$$

이다.

$b_n=\dfrac{\log a_n}{n}$이라 하면

$b_1=1$ 이고, $b_{n+1}=b_n+\boxed{\dfrac{1}{n(n+1)}}$이다.

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$$

$$=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

$$=1+1-\frac{1}{n}=\frac{2n-1}{n}$$

수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면

$$b_n=\boxed{\frac{2n-1}{n}}$$

이므로

$$\log a_n=n\times\boxed{\frac{2n-1}{n}}\quad\left(\because b_n=\frac{\log a_n}{n}\right)$$

이므로 $a_n=10^{n\times\boxed{\frac{2n-1}{n}}}$ 이다.

따라서

$$f(n)=\frac{1}{n(n+1)},\quad g(n)=\frac{2n-1}{n}$$

이므로

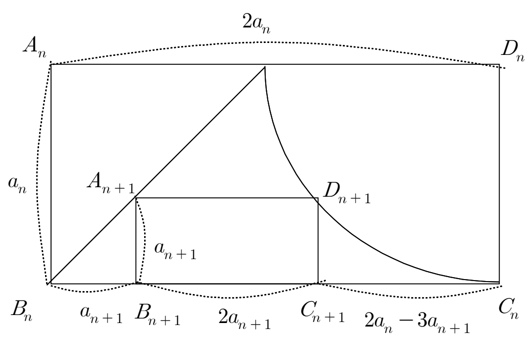
$$f(4)=\frac{1}{20},\quad g(10)=\frac{19}{10}\text{이다.}$$

$$\therefore\ \frac{g(10)}{f(4)}=\frac{\frac{19}{10}}{\frac{1}{20}}=38$$

<답> ①

17.

출제의도 : 반복되는 도형에서 규칙을 찾아 넓이의 극한값을 구할 수 있는가?



직사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 세로의 길이를 a_n이라 하면 직사각형 $A_{n+1}B_{n+}C_{n+1}D_{n+1}$의 세로의 길이는 a_{n+1} 이고 $\overline{B_nB_{n+1}}=\overline{A_{n+1}B_{n+1}}$ 이므로

$\overline{C_{n+1}C_n} = 2a_n - 3a_{n+1}$

또한, 점 D_n을 좌표평면 위의 원점에 놓고 직사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 가로와 세로를 x축, y축에 평행하게 놓으면 점 $D_{n+1}(-2a_n+3a_{n+1}, a_{n+1}-a_n)$은

원 $x^2+y^2=a_n^2$ 위에 놓이게 된다.

$(-2a_n+3a_{n+1})^2+(a_{n+1}-a_n)^2=a_n^2$

$5a_{n+1}^2-7a_{n+1}a_n+2a_n^2=0$

$(5a_{n+1}-2a_n)(a_{n+1}-a_n)=0$

$\therefore\ a_{n+1}=\dfrac{2}{5}a_n\ \ (\because a_{n+1}<a_n)$

따라서, 닮음비가 $\dfrac{2}{5}$이므로 넓이의 비는 $\dfrac{4}{25}$ 이고

$S_1=2\times\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\times1\times1\right)=\dfrac{\pi}{2}-1$

에서

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{\pi}{2}-1}{1-\frac{4}{25}}=\frac{25}{21}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

<답> ③

18.

출제의도 : 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

3명의 학생에게 흰색 탁구공을 각각 1개씩, 주황색 탁구공을 각각 1개씩 나누어 주면 남은 흰색 탁구공은 5개, 주황색 탁구공은 4개이다.

따라서, 3명의 학생에게 흰색 탁구공 5개를 나누어 주는 방법의 수는

${}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=21$

3명의 학생에게 주황색 탁구공 4개를 나누어 주는 방법의 수는

${}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=15$

따라서, 구하고자 하는 경우의 수는

$21\times15=315$

<답> ⑤

19.

출제의도 : 주어진 행렬의 조건을 이용하여 참, 거짓을 판단할 수 있는가?

ㄱ. $AB+A^2B=(A+A^2)B=E$ 이므로

$B^{-1}=A+A^2$ (참)

ㄴ. $AB+A^2B=A(B+AB)=E$

$\therefore\ A^{-1}=B+AB$

따라서,

$A^{-1}B^{-1}=E+A,\ B^{-1}A^{-1}=E+A$

에서 $A^{-1}B^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ 이므로

$(A^{-1}B^{-1})^{-1}=(B^{-1}A^{-1})^{-1}$

$BA=AB$ (참)

ㄷ. $(A-E)^2+B^2=O$ 에서

$B^2=-A^2+2A-E$

$AB+A^2B=E$ 에서

$B=AB^2+A^2B^2$

$=A(-A^2+2A-E)+A^2(-A^2+2A-E)$

$=-A^4+A^3+A^2-A$

$=-(A^3-A)(A-E)$

따라서, $(A+A^2)B=E$ 이므로

$(A+A^2)\{-(A^3-A)(A-E)\}=E$

$(A^3-A)^2=-E$

$(A^3-A)^2+E=O$ (참)

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

<답> ⑤

20.

출제의도 : 지표와 가수의 정의를 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

$f(x)$는 정수, $0 \le g(x) < 1$ 이고

$f(x) = n + (n+1)g(x)$ 에서

$0 \le (n+1)g(x) < n+1$

$n \le n + (n+1)g(x) < 2n+1$

이므로

$n \le f(x) < 2n+1$

$f(x) = n$ 이면 $g(x) = 0$

$f(x) = n+1$ 이면 $g(x) = \dfrac{1}{n+1}$

$f(x) = n+2$ 이면 $g(x) = \dfrac{2}{n+1}$

…

$f(x) = 2n$ 이면 $g(x) = \dfrac{n}{n+1}$

따라서,

$$a_n = 10^n \times 10^{n+1+\frac{1}{n+1}} \times \cdots \times 10^{2n+\frac{n}{n+1}}$$

$$= 10^{\{n+(n+1)+\cdots+2n\}+\left(\frac{1+2+\cdots+n}{n+1}\right)}$$

$$= 10^{\frac{3n(n+1)}{2}+\frac{n}{2}}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{\log a_n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n(n+1)}{2}+\frac{n}{2}}{n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{2n}\right) = \frac{3}{2}$$

<답> ②

21.

출제의도 : 접선의 방정식을 구하고 함수가 미분가능할 조건을 구할 수 있는가?

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$이므로 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y - (t^3 + at^2 + bt) = (3t^2 + 2at + b)(x - t)$

따라서, 접선이 y축과 만나는 점 P의 좌표는 $P(0, -2t^3 - at^2)$ 이다.

$\therefore\ g(t) = |-2t^3 - at^2|$

$\quad = t^2|2t + a|$

이때, $f(1) = 1 + a + b = 2$ 에서

$a + b = 1 \cdots$ ㉠

이고 함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능해야하므로 함수 $y = g(t)$의 그래프는 t축과 단 한점에서 만나야 한다.

따라서, $g(0) = 0$ 이므로

$|2 \times 0 + a| = 0$

$\therefore\ a = 0$

㉠에 대입하면 $b = 1$ 이므로

$f(3) = 3^3 + 1 \times 3 = 30$

<답> ④

22.

출제의도 : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{2x+9} = \sqrt{9} = 3$$

<답> 3

23.
출제의도 : 정적분을 구할 수 있는가?

$$\int_{-a}^{a}(3x^2+2x)dx=2\int_{0}^{a}3x^2dx$$
$$=2\left[x^3\right]_0^a$$
$$=2a^3=\frac{1}{4}$$

$a^3=\frac{1}{8}$

$\therefore\ a=\frac{1}{2}$

$\therefore\ 50a=25$

<답> 25

24.
출제의도 : 수열의 귀납적 정의를 이해하고 항을 구할 수 있는가?

주어진 수열은 조건 (나)에 의하여 공비가 −2인 등비수열이므로

$a_1=a_2+3=-2a_1+3$

$\therefore\ a_1=1$

$\therefore\ a_9=(-2)^8=256$

<답> 256

25.
출제의도 : 삼차함수의 극댓값을 구할 수 있는가?

$f'(x)=6x^2-24x+a$이고 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극댓값 M을 가지므로

$f'(1)=6-24+a=0$

$\therefore\ a=18$

$\therefore\ M=f(1)=2-12+18-4=4$

$\therefore\ a+M=22$

<답> 22

26.
출제의도 : 연립일차방정식이 무수히 많은 해를 가질 조건을 구할 수 있는가?

$$\begin{pmatrix}5 & a\\ a & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+5y\\ 6x+y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 6 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}4 & a-5\\ a-6 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\cdots ㉠$$

㉠이 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 가지므로

$4\times2-(a-5)(a-6)=0$

$a^2-11a+22=0$

따라서, 모든 실수 a의 값의 합은 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{-11}{1}=11$

<답> 11

27.
출제의도 : 이산확률분포를 구하여 평균을 구할 수 있는가?

$$P(X=1)=\frac{4}{{}_5C_2}=\frac{4}{10}$$
$$P(X=2)=\frac{3}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$$
$$P(X=3)=\frac{2}{{}_5C_2}=\frac{2}{10}$$

$P(X=4)=\frac{1}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}$

$\therefore\ E(X)$

$=1\times\frac{4}{10}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{2}{10}+4\times\frac{1}{10}$

$=2$

$\therefore\ E(10X)=10E(X)=20$

<답> 20

28.
출제의도 : 함수가 연속일 조건을 구할 수 있는가?

(i) $a=0$ 이면 $f(x)f(x-a)=\{f(x)\}^2$ 이므로 $x=0$ 에서 함수 $f(x)f(x-a)$는 연속이 아니다.
(ii) $a>0$ 일 때,

$f(a)f(0)=f(a)=-\frac{1}{2}a+7$

$\lim_{x\to a+0} f(x)f(x-a)=(-\frac{1}{2}a+7)\times 7$

$\lim_{x\to a-0} f(x)f(x-a)=(-\frac{1}{2}a+7)\times 1$

$-\frac{1}{2}a+7=(-\frac{1}{2}a+7)\times 7$

$\therefore\ a=14$

(iii) $a<0$ 일 때,

$f(a)f(0)=f(a)=a+1$

$\lim_{x\to a+0} f(x)f(x-a)=(a+1)\times 7$

$\lim_{x\to a-0} f(x)f(x-a)=(a+1)\times 1$

$a+1=(a+1)\times 7$

$\therefore\ a=-1$

따라서, 모든 실수 a의 값의 합은

$14+(-1)=13$

<답> 13

29.
출제의도 : 무한급수를 정적분으로 나타낼 수 있는가?

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{3k}{n})$

$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{3k}{n})\frac{3}{n}$

$=\frac{1}{3}\int_0^3 f(x)dx$

$=\frac{1}{3}\int_0^3 (3x^2-ax)dx$

$=\frac{1}{3}\left[x^3-\frac{a}{2}x^2\right]_0^3$

$=9-\frac{3}{2}a=3-a$

$\therefore\ a=12$

<답> 12

30.
출제의도 : 지수함수의 그래프를 이해하고 주어진 영역에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수를 구할 수 있는가?

$y=a^{-x+4}$에서 $a^{-x+4}=1$ 이면 $x=4$

이때, $y=4^x$ 에서

$x=0$ 이면 $y=1$

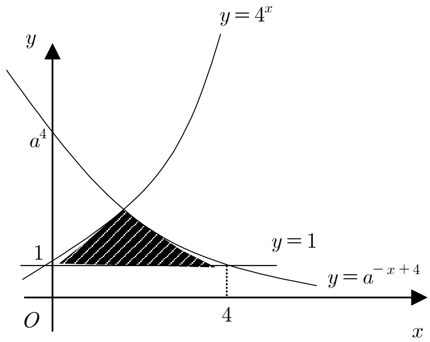
$x=1$ 이면 $y=4$

$x=2$ 이면 $y=16$

$x=3$ 이면 $y=64$

$x=4$ 이면 $y=256$

이므로 그림과 같은 영역에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수가 20이상 40이하가 되기 위해서는 $x=2$, $x=3$일 때, 함수 $y=a^{-x+4}$ 의 값의 범위를 정하면 된다.



즉,

$x=2$일 때, $y=a^2 \geq 13 \cdots$ ㉠

$x=3$일 때, $y=a \leq 18 \cdots$ ㉡

이므로 ㉠,㉡을 만족시키는 자연수 a는 4, 5, $\cdots$, 18의 15개이다.

<답> 15