2013학년도 10월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

수학 B형 정답

1	③	*2*	⑤	*3*	④	*4*	①	*5*	①
6	②	*7*	②	*8*	③	*9*	⑤	*10*	④
11	⑤	*12*	①	*13*	③	*14*	①	*15*	③
16	②	*17*	④	*18*	④	*19*	②	*20*	⑤
21	②	*22*	32	*23*	21	*24*	37	*25*	20
26	73	*27*	26	*28*	16	*29*	150	*30*	27

해 설

1. [출제의도] 역행렬의 성분의 합을 계산한다.

$A^{-1}=\dfrac{1}{2\times1-1\times3}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$

따라서 모든 성분의 합은 1이다.

2. [출제의도] 도함수를 이용하여 미분계수를 계산한다.

$f(x)=x\ln x$의 도함수는 $f'(x)=\ln x+1$이다.

$\therefore\ f'(e)=\ln e+1=2$

3. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 값을 계산한다.

$\cos^2 2x=1-\sin^2 2x=\dfrac{8}{9}$

$0<2x<\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\cos 2x>0$

$\therefore\ \cos 2x=\sqrt{\dfrac{8}{9}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore\ \cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

4. [출제의도] 확률의 덧셈정리를 이용하여 조건부확률을 계산한다.

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=\dfrac{9}{16}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{16}$

$\therefore\ \mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{1}{16}}{\frac{9}{16}}=\dfrac{1}{9}$

5. [출제의도] 등차수열의 성질을 이해하고 일반항을 구한다.

$b_n=na_n$이라 놓으면

$b_{n+1}-b_n=3$에서 $b_n=3n-2$이므로

$a_n=\dfrac{3n-2}{n}$

$\therefore\ a_6=\dfrac{16}{6}=\dfrac{8}{3}$

6. A형 12번과 같음.

7. [출제의도] 정적분의 성질을 이해하고 함숫값을 구한다.

$\displaystyle\int_0^0 f(t)dt=0$이므로 주어진 식에 $x=0$을 대입하면

$\cos 0+a\times0^2+a=0$

$\therefore\ a=-1$

$\displaystyle\int_0^x f(t)dt=\cos 2x-x^2-1$ 의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x)=-2\sin 2x-2x$

$\therefore\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-2\sin\pi-\pi=-\pi$

8. [출제의도] 중복조합을 이해하고 경우의 수를 구한다.

세 개의 주머니 A, B, C에 넣은 공의 수를 각각 a, b, c라 하면 $a+b+c=5$이므로 가능한 모든 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_5={}_{3+5-1}\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_5=21$

(ⅰ) 2개의 주머니에 다섯 개의 공을 1개와 4개로 나누어 넣는 경우의 수 ${}_3\mathrm{P}_2=6$

(ⅱ) 한 개의 주머니에 다섯 개의 공을 모두 넣는 경우의 수 ${}_3\mathrm{C}_1=3$

따라서 구하는 경우의 수는 $21-(6+3)=12$이다.

[다른 풀이]

한 주머니에 네 개 이상의 공을 넣을 수 없으므로 세 개의 주머니에 넣는 공의 수에 따라 경우를 나누면

(ⅰ) 한 개의 주머니에 공을 세 개 넣고 다른 주머니에 공을 두 개 넣는 경우는 3, 2, 0을 일렬로 나열하는 경우와 같으므로 $3!=6$

(ⅱ) 한 개의 주머니에 공을 세 개 넣고 나머지 두 개의 주머니에 공을 한 개씩 넣는 경우는 3, 1, 1을 일렬로 나열하는 경우와 같으므로 $\dfrac{3!}{2!}=3$

(ⅲ) 한 개의 주머니에 공을 한 개 넣고 나머지 두 개의 주머니에 공을 두 개씩 넣는 경우는 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우와 같으므로 $\dfrac{3!}{2!}=3$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는 $6+3+3=12$이다.

9. [출제의도] 함수의 극한의 성질을 이해하고 극한값을 구한다.

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\ln\{1+f(2x)\}}{x}=10$이고, $\displaystyle\lim_{x\to0}x=0$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to0}\ln\{1+f(2x)\}=0$

$\displaystyle\lim_{x\to0}f(2x)=0$이므로 $t=f(2x)$로 놓으면

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\ln\{1+f(2x)\}}{f(2x)}=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}$

$\displaystyle=\lim_{t\to0}\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}=\ln e=1$

따라서 $x=2y$로 놓으면

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{y\to0}\frac{f(2y)}{2y}$

$\displaystyle=\lim_{y\to0}\frac{f(2y)}{\ln\{1+f(2y)\}}\cdot\frac{\ln\{1+f(2y)\}}{y}\cdot\frac{1}{2}$

$=1\times10\times\dfrac{1}{2}=5$

10. [출제의도] 실생활 관련 문제를 표본평균의 분포를 활용하여 해결한다.

생수 1병의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(500,\ 10^2)$을 따른다.

한 세트를 이루는 생수 4병의 무게의 평균을 확률변수 $\overline{X}$라 하면 $\mathrm{E}(\overline{X})=500$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{10^2}{4}=25=5^2$이고 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(500,\ 5^2)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{P}\left(\overline{X}\ge\dfrac{2030}{4}\right)=\mathrm{P}(\overline{X}\ge507.5)$

$=\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{507.5-500}{5}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\ge1.5)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)$

$=0.5-0.4332$

$=0.0668$

11. [출제의도] 행렬의 곱셈을 이용하여 명제의 참, 거짓을 추론한다.

$A^2=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2-b^2 & -2ab\\ 2ab & a^2-b^2\end{pmatrix}$

ㄱ. $A^2=O$에서 $\begin{pmatrix}a^2-b^2 & -2ab\\ 2ab & a^2-b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$a^2-b^2=0$, $2ab=0$에서 $a=b=0$

$\therefore\ A=O$ (참)

ㄴ. $A^2+E=O$에서 $A^2=-E$ 즉,

$\begin{pmatrix}a^2-b^2 & -2ab\\ 2ab & a^2-b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

$a^2-b^2=-1$, $2ab=0$에서

$a=0$, $b=-1$ 또는 $a=0$, $b=1$

따라서 조건을 만족시키는 행렬 A는

$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ 또는 $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$으로 2개이다. (참)

ㄷ. $A^2-A=O$에서 $A^2=A$

$\begin{pmatrix}a^2-b^2 & -2ab\\ 2ab & a^2-b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$

$a^2-b^2=a$, $2ab=b$

$b=0$이면 $a^2=a$에서 $a=0$ 또는 $a=1$

$b\ne0$이면 $a=\dfrac{1}{2}$이므로 $\dfrac{1}{4}-b^2=\dfrac{1}{2}$에서 $b^2=-\dfrac{1}{4}$을 만족시키는 실수 b는 존재하지 않는다.

그러므로 조건을 만족시키는 행렬 A는

$A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 또는 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$로 2개이다. (참)

12. A형 15번과 같음.

13. [출제의도] 수열의 성질을 이해하고 수열의 극한값을 구한다.

$y=\dfrac{2n}{x}$에 $y=-\dfrac{x}{n}+3$를 대입하면

$\dfrac{2n}{x}=-\dfrac{x}{n}+3$

$2n^2=-x^2+3nx$

$x^2-3nx+2n^2=0$

$(x-n)(x-2n)=0$

$\therefore\ x=n$ 또는 $x=2n$

즉, $\mathrm{A}_n(n,\ 2)$, $\mathrm{B}_n(2n,\ 1)$

$\therefore\ l_n=\sqrt{(2n-n)^2+(1-2)^2}=\sqrt{n^2+1}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(l_{n+1}-l_n)$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+1)^2+1}-\sqrt{n^2+1}\right)$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n+2}-\sqrt{n^2+1}\right)$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+2-(n^2+1)}{\sqrt{n^2+2n+2}+\sqrt{n^2+1}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n^2+2n+2}+\sqrt{n^2+1}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$

$=1$

14. [출제의도] 정적분을 이해하고 곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구한다.

곡선 $y=\dfrac{2n}{x}$과 직선 $y=-\dfrac{x}{n}+3$의 교점이

$\mathrm{A}_n(n,\ 2)$, $\mathrm{B}_n(2n,\ 1)$

이고, $n\le x\le2n$에서 $\dfrac{2n}{x}\le-\dfrac{x}{n}+3$이므로

$\displaystyle S_n=\int_n^{2n}\left\{\left(-\frac{x}{n}+3\right)-\frac{2n}{x}\right\}dx$

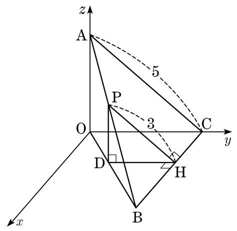
$\displaystyle=\left[-\frac{1}{2n}x^2+3x-2n\ln|x|\right]_n^{2n}$

$=(-2n+6n-2n\ln2n)-\left(-\dfrac{1}{2}n+3n-2n\ln n\right)$

$=n\left(\dfrac{3}{2}-2\ln2\right)$

$\therefore\ S_{n+1}-S_n=\dfrac{3}{2}-2\ln2$

15. [출제의도] 닮음 도형을 이용하여 정사영 문제를 해결한다.



$\overline{AC}=\sqrt{3^2+4^2}=5$, $\overline{AC}\perp\overline{BC}$

이므로 평면 ABC와 xy평면이 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\cos\theta=\frac{4}{5}$이다.

두 직각삼각형 ABC, PBH는 서로 닮은 도형이고

$\overline{BH}:\overline{BC}=\overline{PH}:\overline{AC}=3:5$

$\overline{BH}=\frac{3}{5}\overline{BC}=3$

$\therefore\ \triangle PBH=\frac{1}{2}\times3\times3=\frac{9}{2}$

따라서 삼각형 PBH의 xy평면 위로의 정사영의 넓이를 S라 하면

$S=\triangle PBH\cdot\cos\theta=\frac{9}{2}\times\frac{4}{5}=\frac{18}{5}$

[다른 풀이]

점 P에서 xy평면에 내린 수선의 발을 D라 하자.

$\overline{PD}\perp(xy\text{평면})$, $\overline{PH}\perp\overline{BC}$이므로 삼수선의 정리에 의해 $\overline{DH}\perp\overline{BC}$이다.

따라서 두 직각삼각형 ABC, PBH는 서로 닮은 도형이고

$\overline{AC}=\sqrt{3^2+4^2}=5$, $\overline{PH}=3$

이므로

$\overline{BH}:\overline{BC}=\overline{PH}:\overline{AC}=3:5$

$\therefore\ \overline{BH}=\frac{3}{5}\overline{BC}=3$

또, 두 직각삼각형 OBC, DBH는 서로 닮은 도형이고

$\overline{OC}=4$, $\overline{BH}=3$

이므로

$\overline{DH}:\overline{OC}=\overline{BH}:\overline{BC}=3:5$

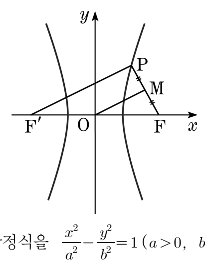
$\therefore\ \overline{DH}=\frac{3}{5}\overline{OC}=\frac{12}{5}$

따라서 삼각형 PBH의 xy평면 위로의 정사영인 삼각형 DBH의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\overline{BH}\cdot\overline{DH}=\frac{1}{2}\times3\times\frac{12}{5}=\frac{18}{5}$

이다.

16. [출제의도] 쌍곡선의 정의를 이해하고 선분의 길이를 구한다.



쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,\ b>0)$이라 하면 점근선의 방정식이 $y=2x$, $y=-2x$이므로

$\frac{b}{a}=2$, $b=2a$

쌍곡선의 또 다른 초점을 점 F′이라 하면 삼각형 PF′F에서 점 O는 변 F′F의 중점이고 점 M은 변 PF의 중점이므로

$\overline{PF'}=2\overline{OM}=12$

$\overline{PF}=2\overline{MF}=6$

$|\overline{PF'}-\overline{PF}|=12-6=6=2a$

$\therefore\ a=3,\ b=2a=6$

$\therefore\ \overline{OF}=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+36}=3\sqrt{5}$

17. [출제의도] 함수의 그래프를 추측하여 분수방정식의 해의 개수를 구한다.

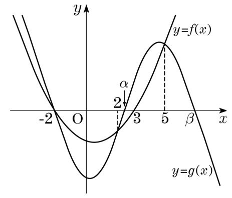
$g(x)\left\{\frac{g(x)}{f(x)}-1\right\}=0$

$g(x)\{g(x)-f(x)\}=0$ (단, $f(x)\neq0$)

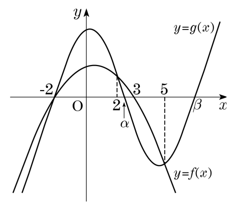
$g(x)=0$ 또는 $g(x)=f(x)$ (단, $f(x)\neq0$)

이때, 조건을 만족시키는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음 두 가지 경우이다.

(i) $f(x)$의 이차항의 계수가 양수인 경우



(ii) $f(x)$의 이차항의 계수가 음수인 경우



(i), (ii)의 경우 모두 주어진 분수방정식의 서로 다른 실근은 2, α, 5, β의 4개이다.

[참고]

$f(x)=a(x+2)(x-3)$,

$g(x)-f(x)=b(x+2)(x-2)(x-5)$라 하면

$g(x)=(x+2)\{bx^2+(a-7b)x+(10b-3a)\}$

이때, $x=-2$가 $bx^2+(a-7b)x+(10b-3a)=0$의 근이면

$28b=5a$가 되어 $ab>0$

조건 (가)를 만족시키지 못하므로 $x=-2$는 방정식 $g(x)=0$의 근이 아니다.

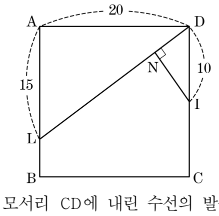
또, 이차방정식 $bx^2+(a-7b)x+(10b-3a)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a-7b)^2-4b(10b-3a)$

$\quad=a^2-2ab+9b^2=(a-b)^2+8b^2>0\ (\because ab<0)$

따라서 방정식 $g(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

18. [출제의도] 삼수선의 정리를 이해하고 선분의 길이를 구한다.



점 M에서 모서리 CD에 내린 수선의 발을 I라 하면 삼수선의 정리에 의해서 $\overline{LD}\perp\overline{NI}$이다.

$\overline{AL}=\frac{3}{4}\overline{AB}=15$, $\overline{DI}=\frac{1}{2}\overline{CD}=10$,

$\overline{LD}=\sqrt{20^2+15^2}=25$

이고, 두 삼각형 NDI, ALD는 서로 닮은 도형이므로

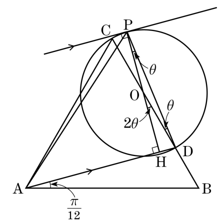
$\overline{NI}:\overline{AD}=\overline{DI}:\overline{LD}$

$\overline{NI}=\frac{\overline{AD}\cdot\overline{DI}}{\overline{LD}}=\frac{20\times10}{25}=8$

삼각형 MIN은 직각삼각형이므로

$\overline{MN}=\sqrt{20^2+8^2}=4\sqrt{29}$

19. [출제의도] 원의 성질을 이용하여 삼각함수와 관련된 문제를 해결한다.



점 P에서 직선 AD에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 ADP의 높이 $\overline{PH}$는 그림과 같이 점 P가 직선 AD와 평행한 접선의 접점일 때 최대이다.

$\angle CDA=\angle DAB+\angle DBA=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}=\frac{5}{12}\pi$이므로

$\angle HOD=\frac{\pi}{2}-\angle CDA=\frac{\pi}{12}$

$\angle HOD=\angle ODP+\angle OPD=2\theta$

$\therefore\ 2\theta=\frac{\pi}{12}$

$\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\sin2\theta=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$

$\quad=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\quad=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}$

20. [출제의도] 무한급수와 관련된 문제를 정적분의 정의를 이용하여 해결한다.

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(\frac{2k}{n}\right)-f\left(\frac{2k-2}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(\frac{2k}{n}\right)-f\left(\frac{2k-2}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$

$=\frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)\right\}+\frac{2}{n}\left\{f\left(\frac{4}{n}\right)-f\left(\frac{2}{n}\right)\right\}$

$+\frac{3}{n}\left\{f\left(\frac{6}{n}\right)-f\left(\frac{4}{n}\right)\right\}+\cdots$

$+\frac{n-1}{n}\left\{f\left(\frac{2n-2}{n}\right)-f\left(\frac{2n-4}{n}\right)\right\}+\frac{n}{n}\left\{f\left(\frac{2n}{n}\right)-f\left(\frac{2n-2}{n}\right)\right\}$

$=-\frac{1}{n}f(0)-\frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right)-\frac{1}{n}f\left(\frac{4}{n}\right)-\cdots$

$-\frac{1}{n}f\left(\frac{2n-2}{n}\right)+f(2)$

$=f(2)-\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{1}{n}$

$\frac{k}{n}=x_k$라 하면 $\frac{1}{n}=\Delta x$이므로

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{1}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f(2x_k)\Delta x=\int_0^1 f(2x)dx$

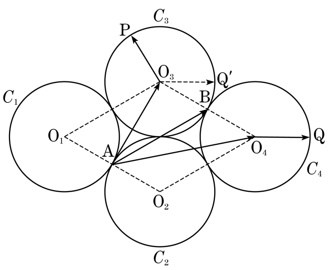
$=\frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt=\frac{1}{8}$

$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{f(2)-\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{1}{n}\right\}$

$=f(2)-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{1}{n}$

$=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

21. [출제의도] 벡터와 관련된 문제를 도형을 이용하여 해결한다.



네 원 C_1, C_2, C_3, C_4의 중심을 각각
O_1, O_2, O_3, O_4
라 하고, 두 원 C_3, C_4의 접점을 B라 하자.
사각형 $O_1O_2O_4O_3$은 네 변의 길이가 모두 2인 마름모이고, 두 점 A, B는 각각 변 O_1O_2, 변 O_3O_4의 중점이다.

$\therefore\ \overrightarrow{AO_3}+\overrightarrow{AO_4}=2\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{O_1O_3}$

한편, 벡터 $\overrightarrow{O_4Q}$를 시점이 O_3이 되도록 평행이동하였을 때, 그 종점을 Q′이라 하면
$\overrightarrow{O_3P}+\overrightarrow{O_4Q}=\overrightarrow{O_3P}+\overrightarrow{O_3Q'}$이므로

$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}$
$=\left(\overrightarrow{AO_3}+\overrightarrow{O_3P}\right)+\left(\overrightarrow{AO_4}+\overrightarrow{O_4Q}\right)$
$=\left(\overrightarrow{AO_3}+\overrightarrow{AO_4}\right)+\left(\overrightarrow{O_3P}+\overrightarrow{O_4Q}\right)$
$=2\overrightarrow{O_1O_3}+\overrightarrow{O_3P}+\overrightarrow{O_3Q'}$

이때, 벡터 $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}$의 크기가 최대가 되려면 $\overrightarrow{O_1O_3}$은 방향과 크기가 일정한 벡터이므로 두 벡터 $\overrightarrow{O_3P}$, $\overrightarrow{O_3Q'}$이 $\overrightarrow{O_1O_3}$과 방향이 같아야 한다.

$\therefore\ \left|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}\right|\le 3\left|\overrightarrow{O_1O_3}\right|=6$

22. [출제의도] 이항정리를 이용하여 값을 계산한다.

$(1+x)^5={}_5C_0+{}_5C_1x+{}_5C_2x^2+{}_5C_3x^3+{}_5C_4x^4+{}_5C_5x^5$
양변에 $x=1$을 대입하면
${}_5C_0+{}_5C_1+{}_5C_2+{}_5C_3+{}_5C_4+{}_5C_5=2^5=32$

23. [출제의도] 이항분포를 이해하고 확률변수의 평균을 구한다.

확률변수 X가 이항분포 $B\left(n,\ \dfrac{1}{7}\right)$을 따르므로

$E(X)=\dfrac{n}{7}=3$

$\therefore\ n=21$

24. [출제의도] 합성변환을 이해하고 옮겨진 점의 좌표를 구한다.

합성변환 $f\circ g$를 나타내는 행렬은
$\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$
이다.
$\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$이므로 점 $(3,\ 2)$는 합성변환 $f\circ g$에 의하여 점 $(3,\ 7)$로 옮겨진다.
$a=3$, $b=7$이므로 $10a+b=30+7=37$이다.

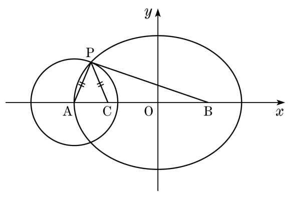
25. [출제의도] 함수의 연속을 이해하고 함숫값을 구한다.

합성함수 $(g\circ f)(x)$가 실수 전체에서 연속이므로 $x=2$에서도 연속이어야 한다.
함수 $g(x)$는 다항함수이므로 모든 실수에서 연속이다. 그러므로 $f(x)=t$라 놓으면
$\lim\limits_{x\to 2-0}g(f(x))=\lim\limits_{t\to -0}g(t)=g(0)$
$\lim\limits_{x\to 2+0}g(f(x))=\lim\limits_{t\to 2-0}g(t)=g(2)$
$g(f(2))=g(1)$
따라서 $\lim\limits_{x\to 2-0}g(f(x))=\lim\limits_{x\to 2+0}g(f(x))=g(f(2))$에서
$g(0)=g(2)=g(1)$이고 $g(0)=10$이므로
$g(1)+g(2)=10+10=20$

26. [출제의도] 로그의 성질과 등차수열의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

주어진 사각형은 사다리꼴이므로
$S(2)=\dfrac{1}{2}\times 2\left(\log_2 2+\log_2 4\right)=\log_2 8$
$S(4)=\dfrac{1}{2}\times 2\left(\log_2 4+\log_2 6\right)=\log_2 24$
$S(a)=\dfrac{1}{2}\times 2\left\{\log_2 a+\log_2(a+2)\right\}=\log_2 a(a+2)$
$S(2)$, $S(4)$, $S(a)$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$2S(4)=S(2)+S(a)$
$2\log_2 24=\log_2 8+\log_2 a(a+2)$
$24^2=8a(a+2)$
$a^2+2a-72=0$
$\therefore\ a=-1+\sqrt{73}$ 또는 $a=-1-\sqrt{73}$
그런데 $a>1$이므로
$a=\sqrt{73}-1$
$\therefore\ n=73$

27. [출제의도] 타원의 방정식을 이해하고 교점의 좌표를 구한다.



타원 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$의 두 초점의 좌표를 각각
$(c,0)$, $(-c,0)$ (단, $c>0$)
이라 하면 $c^2=25-16=9$에서 $c=3$
따라서 점 B는 타원의 한 초점이고 다른 한 초점은 $C(-3,\ 0)$이다.
$\overline{PB}+\overline{PC}=10$이고, $\overline{PA}+\overline{PB}=10$이므로 $\overline{PA}=\overline{PC}$
타원의 장축의 길이는 10이므로 점 A의 좌표는 $(-5,0)$이다. 즉, 삼각형 PAC는 이등변삼각형이므로 점 P의 x좌표는 -4이다.
$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$에서 $y^2=16\left\{1-\dfrac{(-4)^2}{25}\right\}$
$y=\dfrac{12}{5}$ 또는 $y=-\dfrac{12}{5}$
$P\left(-4,\ \dfrac{12}{5}\right)$ 또는 $P\left(-4,\ -\dfrac{12}{5}\right)$이므로
$r=\overline{PA}=\sqrt{(-5+4)^2+\left(0-\dfrac{12}{5}\right)^2}=\dfrac{13}{5}$
$\therefore\ 10r=26$

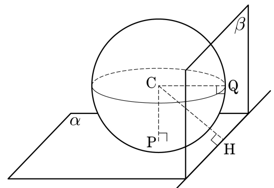
28. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 일반항을 추측한다.

$a_1=\dfrac{1}{2^3}$
$a_1a_2=2^1$에서 $a_2=\dfrac{2}{a_1}=2^4$
$a_2a_3=2^2$에서 $a_3=\dfrac{2^2}{a_2}=\dfrac{1}{2^2}$
$a_3a_4=2^3$에서 $a_4=\dfrac{2^3}{a_3}=2^5$
$a_4a_5=2^4$에서 $a_5=\dfrac{2^4}{a_4}=\dfrac{1}{2}$
$\vdots$
$\{a_{2n-1}\}:\ \dfrac{1}{2^3},\ \dfrac{1}{2^2},\ \dfrac{1}{2^1},\cdots$ 이므로
$\left\{\dfrac{1}{a_{2n-1}}\right\}:\ 2^3,\ 2^2,\ 2^1,\cdots$
$\therefore\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_{2n-1}}=\dfrac{8}{1-\dfrac{1}{2}}=16$

[다른 풀이]

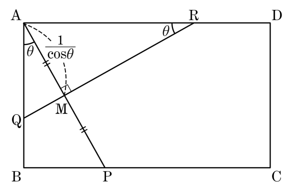
$a_na_{n+1}=2^n$에서 $a_{n+1}a_{n+2}=2^{n+1}$
$\dfrac{a_{n+1}a_{n+2}}{a_na_{n+1}}=\dfrac{2^{n+1}}{2^n}$, $\dfrac{a_{n+2}}{a_n}=2$
$a_{n+2}=2a_n$
$a_1=\dfrac{1}{8}$이므로 $a_{2n-1}=a_1\cdot 2^{n-1}=2^{n-4}$
$\therefore\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_{2n-1}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n-4}}=\dfrac{8}{1-\dfrac{1}{2}}=16$

29. [출제의도] 공간벡터의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.



구의 중심 C에서 두 평면의 교선 $x=-y=z$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $H(t,\ -t,\ t)$이고 $\overrightarrow{CH}$는 교선의 방향벡터 $\vec{u}=(1,-1,1)$과 수직이다. 따라서
$\overrightarrow{CH}\cdot\vec{u}=(t-1,\ -t-2,\ t-1)\cdot(1,\ -1,\ 1)$
$=(t-1)-(-t-2)+(t-1)$
$=3t=0$
$t=0$이므로 $\overrightarrow{CH}=(-1,-2,-1)$
$\overline{CH}=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$
직각삼각형 CQH에서 $\cos(\angle QCH)=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$\therefore\ \angle QCH=\dfrac{\pi}{4}$
$\angle PCH=\angle QCH=\dfrac{\pi}{4}$이므로 $\angle QCP=\dfrac{\pi}{2}$가 되어 삼각형 CPQ는 한 변의 길이가 $\sqrt{3}$인 직각이등변삼각형이다.
$S=\dfrac{1}{2}\times(\sqrt{3})^2=\dfrac{3}{2}$
$\therefore\ 100S=150$

30. [출제의도] 미분법을 이용하여 최솟값 문제를 해결한다.



선분 AP의 중점을 M, $\angle BAP=\theta$ $\left(0<\theta\le\dfrac{\pi}{3}\right)$라 하면
$\overline{AP}=\dfrac{2}{\cos\theta}$, $\overline{AM}=\dfrac{1}{2}\overline{AP}=\dfrac{1}{\cos\theta}$, $\overline{AQ}=\dfrac{\overline{AM}}{\cos\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$
삼각형 AQR에서 $\overline{AM}\perp\overline{QR}$이므로 $\angle ARQ=\theta$
$\therefore\ \overline{QR}=\dfrac{\overline{AQ}}{\sin\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta\sin\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta-\sin^3\theta}$
$\sin\theta=t$ 라 하면 $\overline{QR}=\dfrac{1}{t-t^3}$
$f(t)=t-t^3\left(0<t\le\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$이라 하자.
$f'(t)=1-3t^2=0$에서 $t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $t=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
$f(t)$는 $t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$일 때, 최댓값 $f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$을 가진다.
$\overline{QR}=\dfrac{1}{f(t)}\ge\dfrac{1}{f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$
$\therefore\ 4k^2=4\times\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2=27$

[다른 풀이]

$\overline{AQ}=x$라 하면 $\overline{AQ}=\overline{QP}=x$이므로

$\overline{BP}=\sqrt{x^2-(2-x)^2}=\sqrt{4x-4}=2\sqrt{x-1}$

$\therefore\ \overline{AP}=\sqrt{2^2+(4x-4)}=2\sqrt{x}$

두 직각삼각형 ABP, RAQ는 서로 닮은 도형이므로

$\overline{AQ}:\overline{QR}=\overline{BP}:\overline{PA}$에서

$\overline{QR}=\dfrac{\overline{AQ}\cdot\overline{PA}}{\overline{BP}}=\dfrac{2x\sqrt{x}}{2\sqrt{x-1}}=\dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$

$\overline{QR}^2=f(x)$라 하면 $f(x)=\dfrac{x^3}{x-1}$ (단, $1<x\le 4$)

$f'(x)=\dfrac{3x^2(x-1)-x^3}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(1)	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	4
$f'(x)$	/	$-$	0	$+$	/
$f(x)$	/	$\searrow$	$\frac{27}{4}$	$\nearrow$	$\frac{64}{3}$

$\therefore\ 4k^2=4f\left(\dfrac{3}{2}\right)=27$