2014학년도 대수능 9월 모의평가 수학영역 B형 정답 및 해설

1.
출제의도 : 행렬의 연산을 할 수 있는가?

$B=(A+B)-A$

$=\begin{pmatrix}5&3\\2&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\1&1\end{pmatrix}$

이므로 행렬 B의 모든 성분의 합은 7이다.

<답> ①

2.
출제의도 : 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+28n}-n\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+28n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+28n}+n\right)}{\sqrt{n^2+28n}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{28n}{\sqrt{n^2+28n}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{28}{\sqrt{1+\frac{28}{n}}+1}$

$=14$

<답> ②

3.
출제의도 : 삼각함수의 합성을 이용하여 함수의 최댓값을 구할 수 있는가?

$f(x)=\sqrt{7}\sin x-3\cos x$

$=4\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\sin x-\frac{3}{4}\cos x\right)$

$=4\sin(x+\alpha)$

(단, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}$, $\sin\alpha=-\frac{3}{4}$)

이때, $-1\le\sin(x+\alpha)\le 1$이므로

$-4\le f(x)\le 4$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 4이다.

<답> ④

4.
출제의도 : 분수부등식의 해를 구할 수 있는가?

$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-6}\le 0$

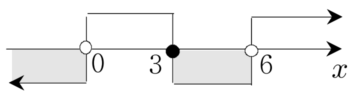
좌변을 통분하여 정리하면

$\frac{2(x-3)}{x(x-6)}\le 0$

양변에 $x^2(x-6)^2$을 곱하면

$2x(x-3)(x-6)\le 0$, $x\ne 0$, $x\ne 6$

x의 범위에 따라 부등식의 좌변의 부호를 조사하면 다음과 같다.



따라서 부등식의 해는

$x<0$ 또는 $3\le x<6$

이므로 부등식을 만족시키는 양의 정수 x는 3, 4, 5이고 개수는 3이다.

<답> ③

5.
출제의도 : 삼각함수의 배각공식을 이용하여 삼각방정식을 풀 수 있는가?

$\sin 2x - \sin x = 4\cos x - 2$

$2\sin x \cos x - \sin x = 4\cos x - 2$

$\sin x(2\cos x - 1) = 2(2\cos x - 1)$

$(2\cos x - 1)(\sin x - 2) = 0$

$\therefore\ \cos x = \frac{1}{2}\ \ (\because\ -1 \le \sin x \le 1\ )$

따라서, $0 \le x \le 2\pi$ 에서 $x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{5}{3}\pi$ 이므로 모든 합은 2π이다.

<답> ③

6.
출제의도 : 확률의 덧셈정리와 곱셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

주사위의 눈의 수 중 3의 배수는 3, 6 이므로 주사위 한 개를 한 번 던져서 3의 배수의 눈이 나올 확률은

$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$a+b=6$ 인 경우는 다음과 같다.

(i) $a=4,\ b=2$ 인 경우

$${}_4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4 \times {}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{2}{3} = \frac{6}{3^7}$$

(ii) $a=3,\ b=3$인 경우

$${}_4C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\frac{2}{3} \times {}_3C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{8}{3^7}$$

따라서 (i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{6}{3^7} + \frac{8}{3^7} = \frac{14}{3^7}$$

<답> ⑤

7.
출제의도 : 무리방정식의 해를 구할 수 있는가?

$f(x) = t$ 로 치환하면 주어진 방정식은

$t - \sqrt{t-3} = 9$

$t - 9 = \sqrt{t-3}$ ⋯ ㉠

㉠의 양변을 제곱하면

$(t-9)^2 = t - 3$

$t^2 - 19t + 84 = 0$

$(t-7)(t-12) = 0$

$\therefore\ t = 7$ 또는 $t = 12$

그런데 $t = 7$은 ㉠에서 무연근이므로 $t = 12$이다.

방정식 $f(x) = 12$의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = 12$의 교점의 개수와 같으므로 주어진 그래프에서 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

<답> ①

8.
출제의도 : 중복조합의 수를 방정식에 활용할 수 있는가?

$x' = x+1,\ y' = y+1,\ z' = z+1$로 놓으면 $x,\ y,\ z$가 -1 이상의 정수이므로 $x',\ y',\ z'$은 0 이상의 정수이다.

이때, 주어진 방정식에 대입하면

$(x'-1)+(y'-1)+(z'-1) = 4$

$x'+y'+z' = 7$

이때, 구하는 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는 위의 방정식을 만족하는 순서쌍 $(x',\ y',\ z')$의 개수와 같으므로 구하는 개수는

$${}_3H_7 = {}_{3+7-1}C_7 = {}_9C_7 = {}_9C_2 = 36$$

<답> ③

9.

출제의도 : 타원의 방정식을 이해하고 있는가?

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$에서 $\overline{\mathrm{OA}}=a$, $\overline{\mathrm{OB}}=b$, $\overline{\mathrm{OF}}=c$이고 $c^2=a^2-b^2$

직각삼각형 OFB에서

$$\overline{\mathrm{BF}}=\frac{\overline{\mathrm{OB}}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}b=\overline{\mathrm{OA}}$$

$$\overline{\mathrm{OF}}=\frac{\overline{\mathrm{OB}}}{\tan\frac{\pi}{3}}=\frac{b}{\sqrt{3}}$$

삼각형 AFB의 넓이가

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AF}}\times\overline{\mathrm{OB}}&=\frac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{AO}}+\overline{\mathrm{OF}})\times\overline{\mathrm{OB}}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}b+\frac{b}{\sqrt{3}}\right)b\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}b^2\\&=6\sqrt{3}\end{aligned}$$

$\therefore\ b^2=12$

한편, $\overline{\mathrm{OA}}=a=\dfrac{2}{\sqrt{3}}b$이므로

$$a^2=\frac{4}{3}b^2=16$$

$\therefore\ a^2+b^2=28$

<답> ④

10.

출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 식이 주어진 실생활 문제를 해결할 수 있는가?

10g의 활성탄 A를 염료 B의 농도가 8%인 용액에 충분히 오래 담가 놓을 때 활성탄 A에 흡착되는 염료 B의 질량이 4g이므로 주어진 식에 $a=10$, $b=4$, $c=8$를 대입하면

$$\log\frac{4}{10}=-1+k\log 8$$

$$2\log 2-1=-1+3k\log 2$$

$$\therefore\ k=\frac{2}{3}$$

20g의 활성탄 A를 염료 B의 농도가 27%인 용액에 충분히 오래 담가 놓을 때 활성탄 A에 흡착되는 염료 B의 질량을 b_1g이라 하면

$$\log\frac{b_1}{20}=-1+\frac{2}{3}\log 27$$

$$\log b_1-(1+\log 2)=-1+2\log 3$$

$$\log b_1=\log(3^2\cdot 2)=\log 18$$

$\therefore\ b_1=18$ (g)

<답> ⑤

11.

출제의도 : 벡터의 연산을 활용하여 벡터의 크기를 구할 수 있는가?

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{b}$라 하면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BF}}&=\overrightarrow{\mathrm{AF}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\&=\frac{1}{4}\vec{b}-\vec{a}\end{aligned}$$

이고,

$$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

$$=\frac{3}{4}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{a}$$

따라서,

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=3$,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3}=3\cdot3\cdot\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$$

이므로

$$|\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DE}|^2$$

$$=\left|\left(\frac{1}{4}\vec{b}-\vec{a}\right)+\left(\frac{3}{4}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{a}\right)\right|^2$$

$$=\left|\vec{b}-\frac{5}{3}\vec{a}\right|^2$$

$$=|\vec{b}|^2-\frac{10}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{25}{9}|\vec{a}|^2$$

$$=3^2-\frac{10}{3}\cdot\frac{9}{2}+\frac{25}{9}\cdot3^2$$

$$=9-15+25$$

$$=19$$

<답> ③

12.

출제의도 : 모비율의 신뢰구간을 구할 수 있는가?

표본 100명 중 90명이 개방 시간 연장을 희망하였으므로 표본비율 $\hat{p}$은

$$\hat{p}=\frac{90}{100}=0.9$$

이다.

따라서 이 도시의 주민 전체의 시립 도서관 개방 시간 연장을 희망하는 비율에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\left[0.9-1.96\sqrt{\frac{0.9\times0.1}{100}},0.9+1.96\sqrt{\frac{0.9\times0.1}{100}}\right]$$

$$\therefore\ c=1.96\sqrt{\frac{0.9\times0.1}{100}}$$

$$=0.0588$$

<답> ②

13.

출제의도 : 지수함수와 로그함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

점 E의 좌표를 (a, b)라 하면 점 F의 좌표는 $(a, 2^a)$이고 $2^a=16$에서

$\therefore\ a=4$

또 점 E는 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 점이므로

$b=\log_2 4=2$

두 점 $\mathrm{A}(2^n, 0)$, $\mathrm{D}(2^n, n)$을 이은 선분을 $2:3$으로 내분하는 점은 $\left(2^n, \frac{2}{5}n\right)$이고 이 점의 y좌표가 점 E의 y좌표와 같으므로

$\frac{2}{5}n=2 \quad \therefore\ n=5$

따라서 두 점 $\mathrm{D}(32, 5)$, $\mathrm{F}(4, 16)$을 지나는 직선 DF의 기울기는

$$\frac{16-5}{4-32}=-\frac{11}{28}$$

<답> ⑤

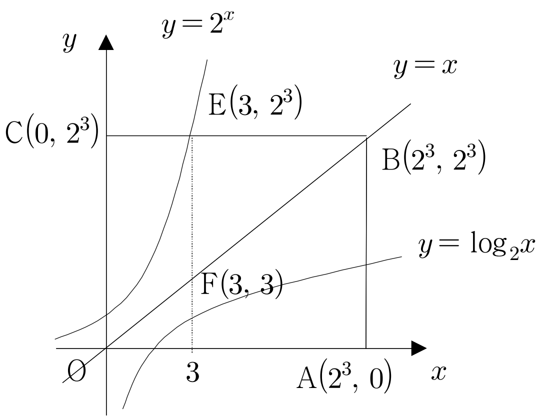
14.

출제의도 : 정적분을 활용하여 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

$n=3$일 때, $\mathrm{A}(2^3, 0)$, $\mathrm{B}(2^3, 2^3)$, $\mathrm{C}(0, 2^3)$이다. 이때, 직선 BC와 곡선 $y=2^x$가

만나는 점을 E라 하면 $\mathrm{E}(3,\ 2^3)$이다.

한편, 두 함수 $y=2^x$, $y=\log_2 x$는 역함수관계이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 이때, 점 E를 지나고 y축에 평행한 직선이 직선 $y=x$과 만나는 점을 F라 하면 $\mathrm{F}(3,\ 3)$이다.



따라서, 구하는 넓이 S는

$$S=2\left\{\int_0^3 (2^x-x)dx+\triangle\mathrm{BEF}\right\}$$

$$=2\left\{\left[\frac{2^x}{\ln 2}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^3+\frac{1}{2}\times5\times5\right\}$$

$$=2\left\{\left(\frac{7}{\ln 2}-\frac{9}{2}\right)+\frac{25}{2}\right\}$$

$$=16+\frac{14}{\ln 2}$$

<답> ②

15.

출제의도 : 두 벡터가 평행할 조건을 이용하여 두 구가 서로 접할 조건을 구할 수 있는가?

구 $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=6$

의 중심을 $\mathrm{A}(1,\ 2,\ 1)$라 하고,

구 $x^2+y^2+z^2+6x+2ay+2bz=0$에서

$(x+3)^2+(y+a)^2+(z+b)^2=9+a^2+b^2$

의 중심을 $\mathrm{B}(-3,\ -a,\ -b)$ 하자.

두 구가 원점 O에서 서로 접하므로 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$는 평행하다.

즉, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ (t는 실수)

$(-3,\ -a,\ -b)=t(1,\ 2,\ 1)$

$\therefore\ -3=t,\ -a=2t,\ -b=t$

$\therefore\ a=6,\ b=3$

$\therefore\ a+b=9$

<답> ④

16.

출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열의 일반항을 구할 수 있는가?

$a_{n+1}-2a_n+\dfrac{n+2}{n(n+1)}=0$에서

$a_n-2a_{n-1}+\dfrac{n+1}{n(n-1)}=0\ \ (n\geq 2)$ 이므로

$$a_{n+1}-a_n-2(a_n-a_{n-1})+\frac{n+2}{n(n+1)}-\frac{n+1}{n(n-1)}=0$$

$(n\geq 2)$ 이고

$$\frac{n+2}{n(n+1)}-\frac{n+1}{n(n-1)}$$

$$=\frac{1+(n+1)}{n(n+1)}-\frac{n+1}{n(n-1)}$$

$$=\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{n}-\frac{n+1}{n(n-1)}$$

$$=\frac{1}{n(n+1)}-\frac{2}{n(n-1)}$$

에서

$$a_{n+1}-a_n-2(a_n-a_{n-1})+\frac{n+1}{n(n+1)}-$$

$$\boxed{\frac{2}{n(n-1)}}=0\ \ (n\geq 2)$$

이다. $b_n=a_{n+1}-a_n\,(n\geq 1)$ 이라 놓으면

$b_1 = \dfrac{3}{2}$이고,

$$b_n + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= 2b_{n-1} + \boxed{\frac{2}{n(n-1)}} \quad (n \geq 2)$$

이다. 따라서

$$b_n + \frac{1}{n(n+1)} = 2^n \; (n \geq 1)$$

이다. 즉, $b_n = 2^n - \dfrac{1}{n(n+1)} \; (n \geq 1)$

이므로

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

$$= 3 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(2^k - \frac{1}{k(k+1)}\right)$$

$$= 3 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k - \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= 3 + \frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$= \boxed{2^n + \frac{1}{n}} \quad (n \geq 2)$$

이다.

$n=1$일 때에도 이 식을 만족시키므로

모든 자연수 n에 대하여

$a_n = \boxed{2^n + \dfrac{1}{n}}$이다.

따라서 $f(n) = \dfrac{2}{n(n-1)}$, $g(n) = 2^n + \dfrac{1}{n}$이므로

$$g(6) - f(4) = \left(2^6 + \frac{1}{6}\right) - \frac{2}{4 \times 3} = 64$$

<답> ①

17.

출제의도 : 조건이 주어진 행렬의 성질을 추론할 수 있는가?

ㄱ. $2A - A^2B = E$에서

$A(2E - AB) = E$

이므로

$A^{-1} = 2E - AB$ <참>

ㄴ. $A^{-1} = 2E - AB$이므로

$AA^{-1} = E$에서

$A(2E - AB) = E$

$2A - A^2B = E$ ---㉠

또, $A^{-1}A = E$에서

$(2E - AB)A = E$

$2A - ABA = E$ ---㉡

㉠과 ㉡에서

$A^2B = ABA$

한편, A^{-1}이 존재하므로

$A^{-1}(A^2B) = A^{-1}(ABA)$

$\therefore \; AB = BA$ <참>

ㄷ. $2A - A^2B = E$에서

$A = \dfrac{1}{2}(E + A^2B)$

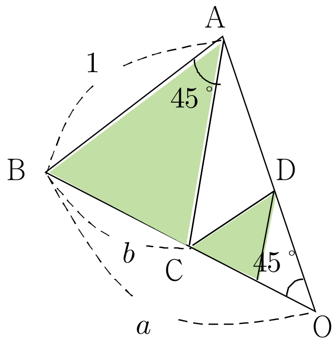
$AB = BA$이므로

$A = \dfrac{1}{2}(E + BA^2)$ <참>

<답> ⑤

18.

출제의도 : 도형의 넓이를 무한등비급수를 이용하여 구할 수 있는가?



그림과 같이 정팔각형의 중심을 O라 하고 점 O와 정팔각형의 한 변으로 이루어진 이등변삼각형 OAB에서

$\angle AOB = 45^\circ$이고, $\overline{OA} = a$라 하면

$1^2 = a^2 + a^2 - 2a^2\cos 45^\circ$

$a^2 = \dfrac{1}{2-\sqrt{2}} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ a = \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}}$

이등변삼각형 ABC에서 $\angle BAC = 45^\circ$이고, $\overline{BC} = b$라 하면

$b^2 = 1^2 + 1^2 - 2\times 1\times 1\times \cos 45^\circ$

$\quad = 2-\sqrt{2}$

$\therefore\ b = \sqrt{2-\sqrt{2}}$

R_2와 R_1에서 그려지는 두 정팔각형의 한 변의 길이의 비 r는

$$r = \frac{a-b}{a} = 1 - \frac{b}{a}$$

$$= 1 - \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}}}$$

$$= 1 - \sqrt{2}\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$$

$$= 1 - \sqrt{2}\sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2}{2}}$$

$$= 1 - (2-\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$$

$S_1 = 8\times \dfrac{1}{2}\times 1\times 1\times \sin 45^\circ = 2\sqrt{2}$

이고 주어진 그림과 같이 닮은 도형의 넓이의 비는 길이의 비의 제곱에 비례하므로

$r^2 = (\sqrt{2}-1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{2\sqrt{2}}{1-(3-2\sqrt{2})}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-2}$$

$$= \sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$$

$$= 2+\sqrt{2}$$

<답> ①

19.

출제의도 : 정사영의 성질과 두 평면의 위치관례를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

xy평면과 yz평면이 이루는 각이 90°이므로 평면 α가 xy평면과 이루는 예각이 θ $(0^\circ \le \theta \le 90^\circ)$이면 평면 α와 yz평면이 이루는 예각은 $90^\circ - \theta$이다.

원 C_1의 넓이가 3π이므로 원 C_1의 평면 α 위로의 정사영의 넓이 S는

$S = 3\pi\cos\theta$ … ㉠

원 C_2의 넓이가 π이므로 원 C_2의 평면 α 위로의 정사영의 넓이 S는

$S = \pi\cos(90^\circ - \theta) = \pi\sin\theta$ … ㉡

㉠, ㉡에서 $3\pi\cos\theta = \pi\sin\theta$

따라서 $\tan\theta = 3$이고 $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

그러므로 $S = 3\pi\times\dfrac{1}{\sqrt{10}} = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}\pi$

<답> ⑤

20.

출제의도 : 정규분포에서의 확률을 구할 수 있고 미분을 활용하여 최댓값을 구할 수 있는가 ?

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}\left(t, \left(\frac{1}{t^2}\right)^2\right)$를 따르므로

$$G(t)=\mathrm{P}\left(X \le \frac{3}{2}\right)$$

$$=\mathrm{P}\left(\frac{X-t}{\frac{1}{t^2}} \le \frac{\frac{3}{2}-t}{\frac{1}{t^2}}\right)$$

$$=\mathrm{P}\left(Z \le \frac{3}{2}t^2-t^3\right)$$

이때, $f(t)=\frac{3}{2}t^2-t^3$으로 놓으면

$f'(t)=3t-3t^2$이므로 $f'(t)=0$에서

$t=0$ 또는 $t=1$

이때, 함수 $f(t)$의 증감표는 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$

그러므로 함수 $f(t)$는 $t=1$일 때, 최댓값 $\frac{1}{2}$를 갖는다.

따라서, $t=1$일 때, $G(t)$도 최댓값을 가지므로 구하는 최댓값은

$$\mathrm{P}\left(Z \le \frac{1}{2}\right)=\mathrm{P}(Z \le 0)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.5)$$

$$=0.5+0.1915$$

$$=0.6915$$

<답> ③

21.

출제의도 : 매개변수로 나타내어진 함수의 최솟값을 구할 수 있는가?

$x=e^t$에서 $\frac{dx}{dt}=e^t$

$y=(2t^2+nt+n)e^t$에서

$$\frac{dy}{dt}=(4t+n)e^t+(2t^2+nt+n)e^t$$

$$=\{2t^2+(4+n)t+2n\}e^t$$

$$\frac{dy}{dx}=2t^2+(4+n)t+2n$$

$$=(2t+n)(t+2)=0 \cdots ㉠$$

(i) $n=3$일 때, ㉠에서

$t=-\frac{3}{2}$ 또는 $t=-2$

이므로 함수 $y=f(x)$는

$x=a_3=e^{-\frac{3}{2}}$에서 최솟값

$$y=b_3=\left\{2\times\frac{9}{4}+3\times\left(-\frac{3}{2}\right)+3\right\}e^{-\frac{3}{2}}$$

$$=3e^{-\frac{3}{2}}$$

를 갖는다.

(ii) $n=4$일 때, ㉠에서

$t=-2$

이므로 함수 $y=f(x)$는

$x=a_4=e^{-2}$에서 최솟값

$$y=b_4=\{2\times4+4\times(-2)+4\}e^{-\frac{3}{2}}$$

$$=4e^{-2}$$

를 갖는다.

(iii) $n=5$일 때, ㉠에서

$t=-\frac{5}{2}$ 또는 $t=-2$

이므로 함수 $y=f(x)$는

$x=a_5=e^{-2}$에서 최솟값

$y=b_5=\{2\times4+5\times(-2)+5\}e^{-2}$

$=3e^{-2}$

를 갖는다.

(iv) $n=6$일 때, ㉠에서

$t=-3$ 또는 $t=-2$

이므로 함수 $y=f(x)$는

$x=a_6=e^{-2}$에서 최솟값

$y=b_6=\{2\times4+6\times(-2)+6\}e^{-2}$

$=2e^{-2}$

를 갖는다.

$$\therefore \frac{b_3}{a_3}+\frac{b_4}{a_4}+\frac{b_5}{a_5}+\frac{b_6}{a_6}$$

$$=\frac{3e^{-\frac{3}{2}}}{e^{-\frac{3}{2}}}+\frac{4e^{-2}}{e^{-2}}+\frac{3e^{-2}}{e^{-2}}+\frac{2e^{-2}}{e^{-2}}$$

$=3+4+3+2$

$=12$

<답> ②

22.

출제의도 : 로그함수의 극한을 계산할 수 있는가?

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)+9x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3x}\ln(1+3x)+\frac{9}{2}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{3}{2}\ln(1+3x)^{\frac{1}{3x}}+\frac{9}{2}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\ln e+\frac{9}{2}$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{9}{2}=6$$

<답> 6

23.

출제의도 : 일차변환을 행렬을 이용하여 다룰 수 있는가 ?

일차변환 f를 나타내는 행렬을 A라 하면

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\4 & -5\end{pmatrix}$$

또, 일차변환 g는 원점을 중심으로 $\frac{\pi}{2}$ 만큼 회전하는 회전변환이므로 g를 나타내는 행렬을 B라 하면

$$B=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2}\\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

한편, $f\circ g=g\circ f$이므로 $AB=BA$에서

$$\begin{pmatrix}a & b\\4 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\4 & -5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}b & -a\\-5 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 5\\a & b\end{pmatrix}$$

$\therefore\ a=-5,\ b=-4$

$\therefore\ ab=20$

<답> 20

24.

출제의도 : 등차수열의 일반항을 구하고 수열의 합을 구할 수 있는가?

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d

라 하면

$a_2 = a + d = -2$

$a_5 = a + 4d = 7$

두 식을 연립하여 풀면

$a = -5,\ d = 3$

$\therefore\ a_n = 3n - 8$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{10} a_{2k} = \sum_{k=1}^{10}(6k-8)$$

$$= 6 \times \frac{10 \times 11}{2} - 8 \times 10$$

$$= 250$$

<답> 250

25.

출제의도 : 조건부확률을 구할 수 있는가?

서비스센터에 휴대 전화의 메인 보드 고장으로 접수되는 사건을 A, 액정 화면 고장으로 접수되는 사건을 B라 하자. 또 접수 시기가 품질보증 기간 이내인 사건을 E라 하면 품질보증 기간 이후인 사건은 E^C이다.

$P(B) = \dfrac{50+b}{200}$, $P(B \cap E) = \dfrac{50}{200}$이므로

$$P(E|B) = \frac{P(B \cap E)}{P(B)} = \frac{\frac{50}{200}}{\frac{50+b}{200}} = \frac{50}{50+b}$$

이다. $P(E|B) = \dfrac{2}{3}$에서

$\dfrac{50}{50+b} = \dfrac{2}{3} \qquad \therefore\ b = 25$

$a + b = 60$이므로 $\therefore\ a = 35$

$\therefore\ a - b = 10$

<답> 10

26.

출제의도 : 쌍곡선의 방정식과 접선의 방정식을 알고 있는가?

쌍곡선의 두 초점이 $\mathrm{F}(3,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-3,\ 0)$이므로

$a^2 + b^2 = 9$ ----㉠

또, 쌍곡선 위의 점 $\mathrm{P}(4,\ k)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{4x}{a^2} - \frac{ky}{b^2} = 1$$

이때, x축과 만나는 점의 x좌표는 $y = 0$을 대입하면

$$x = \frac{a^2}{4}$$

한편, 접선과 x축의 교점이 선분 $\mathrm{F'F}$를 $2:1$로 내분하므로 이 점의 x좌표는 1이다.

그러므로

$$\frac{a^2}{4} = 1$$

$\therefore\ a^2 = 4$

㉠에서 $b^2 = 5$

그러므로 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

이때, 이 쌍곡선이 점 $\mathrm{P}(4,\ k)$을 지나므로 대입하면

$$4 - \frac{k^2}{5} = 1$$

$\therefore\ k^2 = 15$

<답> 15

27.

출제의도 : 역함수의 미분법과 미분계수의 정의를 적용할 수 있는가?

$f(x)=\ln(\tan x)$에서

$f'(x)=\dfrac{1}{\tan x}\cdot\sec^2 x$

$f(\frac{\pi}{4})=\ln\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)=0$에서

$g(0)=\dfrac{\pi}{4}$ $(\because g(x)=f^{-1}(x))$

$g'(0)=\dfrac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{1}{1\cdot 2}=\dfrac{1}{2}$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{4g(8h)-\pi}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4g(8h)-4g(0)}{h}$$

$$=32\lim_{h\to 0}\frac{g(8h)-g(0)}{8h}$$

$$=32g'(0)$$

$$=32\times\frac{1}{2}=16$$

<답> 16

28.

출제의도 : 직선의 방정식과 공간벡터를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

직선 l의 방향벡터 $\vec{u}=(1,\ 2,\ -1)$이고 평면 α와 직선 l이 수직이므로 $\overrightarrow{AB}\perp\vec{u}$이다. 따라서

$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}=(-2,\ a,\ a-1)\cdot(1,2,-1)$

$=-2+2a-(a-1)=0$

$\therefore\ a=1$

점 C는 직선 l 위의 점이므로 $\overrightarrow{AC}\,//\,\vec{u}$,

즉 $\overrightarrow{AC}=t\vec{u}$ (t는 실수)이다.

점 C의 좌표를 (x_1, y_1, z_1)이라 하면

$\overrightarrow{AC}=(x_1-1,\ y_1,\ z_1-1)=t(1,2,-1)$

$\therefore\ x_1=t+1,\ y_1=2t,\ z_1=-t+1$

$\overline{AB}=\sqrt{(-2)^2+1^2+0^2}=\sqrt{5}$

$\overline{AC}=\sqrt{t^2+(2t)^2+(-t)^2}=\sqrt{6t^2}$

이고 $\overline{AB}=\overline{AC}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2$이므로

$6t^2=5\qquad\therefore\ t^2=\dfrac{5}{6}$

점 C에서 원점까지의 거리 d에 대하여

$d^2={x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2$

$=(t-1)^2+(2t)^2+(-t+1)^2$

$=6t^2+2$

$=7$

<답> 7

29.

출제의도 : 삼각함수의 극한을 활용한 문제를 해결할 수 있는가?

삼각형 ABC에서

$\overline{BC}=\sin\theta$ ----㉠

또,

$\angle ADC=\pi-\left(2\theta+\dfrac{2}{3}\pi\right)$

$=\dfrac{\pi}{3}-2\theta$

이므로 삼각형 ACD에서

$$\frac{\overline{AC}}{\sin\angle CDA}=\frac{\overline{CD}}{\sin\angle DAC}$$

$$\frac{\cos\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-2\theta\right)}=\frac{\overline{CD}}{\sin 2\theta}$$

$\therefore\ \overline{CD}=\dfrac{\cos\theta\sin 2\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-2\theta\right)}$ ----㉡

또,

$$\angle \mathrm{BCD} = 2\pi - \left(\frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{5}{6}\pi \qquad ----㉢$$

그러므로 ㉠, ㉡, ㉢에서

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{CD}} \times \overline{\mathrm{CB}} \times \sin(\angle \mathrm{BCD})$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\cos\theta \sin 2\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2\theta\right)} \times \sin\theta \times \sin\frac{5}{6}\pi$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{\cos\theta \sin 2\theta \sin\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2\theta\right)}$$

따라서,

$$\lim_{\theta \to +0} \frac{S(\theta)}{\theta^2}$$

$$= \lim_{\theta \to +0} \frac{\cos\theta \sin 2\theta \sin\theta}{4\theta^2 \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2\theta\right)}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{\theta \to +0} \left\{ \frac{\sin 2\theta}{2\theta} \times \frac{\sin\theta}{\theta} \times \frac{\cos\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2\theta\right)} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}$$

이므로

$$300p^2 = 300 \times \frac{1}{3} = 100$$

<답> 100

30.

출제의도 : 치환적분법과 정적분의 성질을 이해하고 있는가?

$$g(e^x) = \begin{cases} f(x) & (0 \le x < 1) \\ g(e^{x-1}) + 5 & (1 \le x \le 2) \end{cases}$$

에서 $e^x = t$로 놓으면 $x = \ln t$

$$g(t) = \begin{cases} f(\ln t) & (1 \le t < e) \\ g\left(\frac{t}{e}\right) + 5 & (e \le t \le e^2) \end{cases}$$

$$\int_1^{e^2} g(x)dx = \int_1^e f(\ln x)dx + \int_e^{e^2} \left\{ g\left(\frac{x}{e}\right) + 5 \right\} dx$$

$$= 6e^2 + 4 \quad \cdots ㉠$$

이 때, $\int_e^{e^2} \left\{ g\left(\frac{x}{e}\right) + 5 \right\} dx$에서 $\frac{x}{e} = p$로 놓으면 $dx = e\,dp$

$$\int_e^{e^2} \left\{ g\left(\frac{x}{e}\right) + 5 \right\} dx = \int_1^e \{g(p) + 5\} e\,dp$$

$$= e\int_1^e g(p)dp + e\int_1^e 5dp$$

$$= e\int_1^e g(p)dp + 5e(e-1)$$

$$= e\int_1^e f(\ln p)dp + 5e(e-1)$$

이므로 ㉠에서

$\int_1^e f(\ln x)dx = A$라 하면

$$A + eA + 5e(e-1) = 6e^2 + 4$$

$$A(1+e) = e^2 + 5e + 4$$

$$= (e+4)(e+1)$$

$\therefore\ A = ae + b = e + 4$

$\therefore\ a = 1,\ b = 4$

$\therefore\ a^2 + b^2 = 17$

<답> 17