

2014학년도 대수능 9월 모의평가 수학영역 A형 정답 및 해설

1.

출제의도 : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

$$4^{\frac{3}{2}} \times 8^{\frac{1}{3}} = (2^2)^{\frac{3}{2}} \times (2^3)^{\frac{1}{3}} \\ = 2^3 \times 2 = 16$$

<답> ④

2.

출제의도 : 행렬의 연산을 할 수 있는가?

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - A \\ = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 B의 모든 성분의 합은
 $3+2+1+1=7$

<답> ①

3.

출제의도 : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{(x+1)(x-2)} \\ = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x+1} = \frac{2}{3}$$

<답> ④

4.

출제의도 : 그래프와 행렬의 관계를 이해하는가?

그래프 G를 나타내는 행렬 M이 5차 정사각행렬이므로 그래프 G의 꼭짓점의 개수는 5이다.

$$\therefore a = 5$$

행렬 M의 (i,j)성분과 (j,i)성분은 같으므로 가려진 부분 중 0인 성분은 (1,4), (3,4) 성분의 2개이다.

$$\therefore b = 9$$

$$\therefore a+b = 5+9 = 14$$

<답> ②

5.

출제의도 : 정적분을 구할 수 있는가?

$$\int_0^1 (4x^3 + a)dx = [x^4 + ax]_0^1 \\ = 1 + a = 8$$

$$\therefore a = 7$$

<답> ②

6.

출제의도 : 이항분포에서 평균을 구할 수 있는가?

확률변수 X가 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{3}\right)$ 을 따르

므로

$$E(X) = \frac{n}{3}$$

$$E(2X+5) = 2E(X) + 5$$

$$= 2 \times \frac{n}{3} + 5$$

$$= 13$$

$$\therefore n = 12$$

<답> ③

7.

출제의도 : 함수가 연속일 조건을 구할 수 있는가?

$x \leq 1$ 또는 $x > 1$ 에서 $f(x)$ 는 각각 연속이므로 실수 전체의 집합에서 연속이 되기 위해서는 $x=1$ 에서 연속이어야 한다. 즉, $x=1$ 에서 극한값이 존재해야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x)$$

$$1+2 = -1+a$$

$$\therefore a = 4$$

<답> ⑤

8.

출제의도 : 로그의 성질과 점화식을 이해하고 있는가?

$$\log_2 a_{n+1} = 1 + \log_2 a_n$$

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 2 + \log_2 a_n$$

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 2a_n$$

$$\therefore a_{n+1} = 2a_n (n \geq 1)$$

$$a_1 = 2 \text{ 이므로 } a_n = 2^n (n \geq 1)$$

$$a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_8 = 2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times \dots \times 2^8$$

$$= 2^{1+2+3+\dots+8}$$

$$= 2^k$$

$$\therefore k = 1+2+3+\dots+8 = \frac{8 \times 9}{2} = 36$$

<답> ①

9.

출제의도 : 조건부 확률을 구할 수 있는가?

학생 50명 중에서 임의로 선택한 1명이 1학년 학생인 사건을 A , 주제 B 를 고르는 사건을 B 라 하면

$$p_1 = P(B|A) = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

$$p_2 = P(A|B) = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$$

$$\therefore \frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{8}{15}}{\frac{2}{3}} = \frac{4}{5}$$

<답> ③

10.

출제의도 : 중복조합의 수를 이해하고 있는가?

구하는 순서쌍의 개수는

3부터 10까지의 8개의 자연수 중 중복을 허락하여 4개를 뽑는 조합의 수와 같으므로

$${}_{8+4-1}C_4 = {}_{11}C_4 = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 330$$

<답> ④

11.

출제의도 : 표본평균의 분포를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

상담 전화의 상담시간을 확률변수 X 라 하면 X 는 정규분포 $N(20, 5^2)$ 을 따른다.

2014학년도 대수능 9월 모의평가 수학영역 A형 정답 및 해설

이때, 크기가 16인 표본의 표본평균을 \bar{X} 라 하면

$$E(\bar{X}) = 20$$

$$V(\bar{X}) = \frac{5^2}{16} = \left(\frac{5}{4}\right)^2$$

이므로 \bar{X} 도 정규분포 $N(20, (\frac{5}{4})^2)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} \therefore P(19 \leq \bar{X} \leq 22) &= P\left(\frac{19-20}{\frac{5}{4}} \leq Z \leq \frac{22-20}{\frac{5}{4}}\right) \\ &= P(-0.8 \leq Z \leq 1.6) \\ &= P(0 \leq Z \leq 0.8) + P(0 \leq Z \leq 1.6) \\ &= 0.2881 + 0.4452 = 0.7333 \end{aligned}$$

<답> ②

12.

출제의도 : 수학적 귀납법을 이용하여 주어진 식을 증명할 수 있는가?

$$a_k = 2^k + \frac{1}{k} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} ka_{k+1} &= 2ka_k - \frac{k+2}{k+1} \\ &= 2k\left(2^k + \frac{1}{k}\right) - \frac{k+2}{k+1} \\ &= \boxed{k2^{k+1} + 2} - \frac{k+2}{k+1} \\ &= k2^{k+1} + \boxed{\frac{k}{k+1}} \end{aligned}$$

이다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 식

은 각각 $k2^{k+1} + 2, \frac{k}{k+1}$ 이므로

$$f(k) = k2^{k+1} + 2, \quad g(k) = \frac{k}{k+1}$$

$$\therefore f(3) \times g(4) = (3 \times 2^4 + 2) \times \frac{4}{5} = 40$$

<답> ⑤

13.

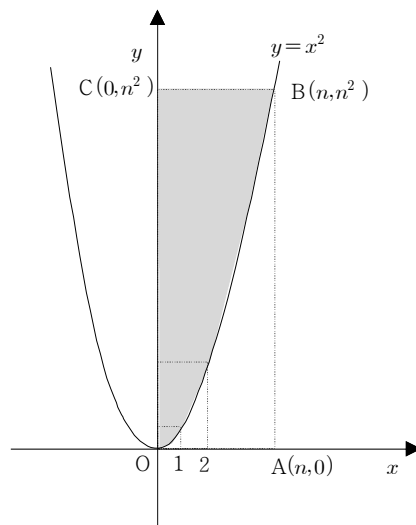
출제의도 : 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

$$\begin{aligned} \int_0^4 \left(x^2 - \frac{1}{4}x^2\right) dx &= \int_0^4 \left(\frac{3}{4}x^2\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^3\right]_0^4 = 16 \end{aligned}$$

<답> ②

14.

출제의도 : 일반항 a_n 을 추론하고 수열의 극한을 계산할 수 있는가?



직사각형 OABC 또는 그 내부에 있고 부등식 $y \geq x^2$ 을 만족하는 점의 개수를

점의 x 좌표에 따라 구분하여 구하면 다음과 같다.

x 좌표가 0일 때, $n^2 - 0^2 + 1$ 개

x 좌표가 1일 때, $n^2 - 1^2 + 1$ 개

x 좌표가 2일 때, $n^2 - 2^2 + 1$ 개

⋮

x 좌표가 n 일 때, $n^2 - n^2 + 1$ 개

$$\begin{aligned} \therefore a_n &= \sum_{k=0}^n (n^2 - k^2 + 1) \\ &= n^2 + 1 + \sum_{k=1}^n (n^2 + 1 - k^2) \\ &= n^2 + 1 + n(n^2 + 1) - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{4n^3 + 3n^2 + 5n + 6}{6} \end{aligned}$$

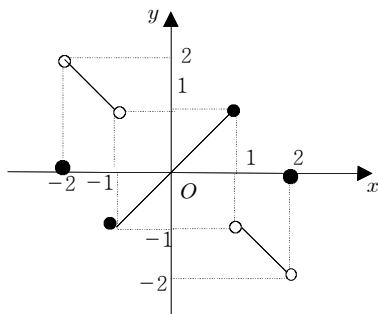
$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 + 3n^2 + 5n + 6}{6n^3} = \frac{2}{3}$$

<답> ③

15.

출제의도 : 함수의 그래프를 이용하여 좌극한과 우극한을 구할 수 있는가?

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) \\ = -1 + (-2) = -3 \end{aligned}$$

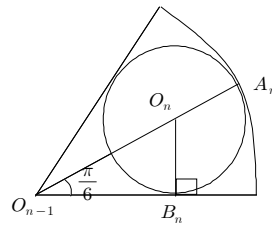
<답> ①

16.

출제의도 : 반복되는 도형에서 무한등비급수를 적용하여 그 합을 구할 수 있는가?

$$S_1 = \pi - 4 \times \frac{1}{2} \times 1^2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

[그림 n]에서 제일 작은 원의 반지름의 길이를 r_n 이라 하면



$$\begin{aligned} r_{n-1} &= \overline{O_{n-1}A_n} = \overline{O_{n-1}O_n} + \overline{O_nA_n} \\ &= \frac{\overline{O_nB_n}}{\sin \frac{\pi}{6}} + \overline{O_nA_n} \\ &= 2r_n + r_n \end{aligned}$$

$$\therefore r_n = \frac{1}{3}r_{n-1} \quad (n \geq 2), \quad r_1 = 1$$

따라서 [그림 n]에서 제일 작은 원의 개수는 4^{n-1} , 반지름의 길이는 $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ 이므로

$$\begin{aligned} S_n &= S_1 + 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times S_1 + \dots + 4^{n-1} \times \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}^2 \times S_1 \\ &= S_1 + \frac{4}{9} \times S_1 + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \times S_1 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{S_1}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{3}{5}\pi$$

<답> ③

2014학년도 대수능 9월 모의평가 수학영역 A형 정답 및 해설

17.

출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 식이 주어진 실생활 문제를 해결할 수 있는가?

10g의 활성탄 A를 염료 B의 농도가 8%인 용액에 충분히 오래 담가 놓을 때, 활성탄 A에 흡착되는 염료 B의 질량은 4g 이므로

$$\log \frac{4}{10} = -1 + k \log 8$$

$$\begin{aligned} 3k \log 2 &= \log \frac{4}{10} + 1 = \log \left(\frac{4}{10} \times 10 \right) \\ &= \log 4 = 2 \log 2 \end{aligned}$$

$$\therefore k = \frac{2}{3}$$

따라서, 20g의 활성탄 A를 염료 B의 농도가 27%인 용액에 충분히 오래 담가 놓을 때 활성탄 A에 흡착되는 염료 B의 질량을 x 라 하면

$$\log \frac{x}{20} = -1 + \frac{2}{3} \log 27 = \log \frac{(27)^{\frac{2}{3}}}{10} = \log \frac{9}{10}$$

$$\frac{x}{20} = \frac{9}{10}$$

$$\therefore x = 18$$

<답> ⑤

18.

출제의도 : 역행렬을 구하고 역행렬의 성질을 이해할 수 있는가?

$$\neg. 2A - A^2B = E \text{에서}$$

$$A(2E - AB) = E$$

$$\therefore A^{-1} = 2E - AB \text{ (참)}$$

ㄴ. $A^{-1} = 2E - AB$ 에서 각 변의 왼쪽에 행렬 A 를 곱하면

$$E = 2A - AAB \dots \textcircled{\Gamma}$$

$A^{-1} = 2E - AB$ 에서 각 변의 오른쪽에 행렬 A 를 곱하면

$$E = 2A - ABA \dots \textcircled{\Delta}$$

$$\textcircled{\Gamma}, \textcircled{\Delta} \text{에서 } AAB = ABA \dots \textcircled{\Theta}$$

$\textcircled{\Theta}$ 의 각 변의 왼쪽에 A 의 역행렬 A^{-1} 를 곱하면

$$AB = BA \text{ (참)}$$

$$\sqcup. 2A - A^2B = E \text{에서}$$

$$A = \frac{1}{2}(E + A^2B)$$

$$= \frac{1}{2}(E + BA^2) (\because AB = BA) \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 \neg, \sqcup, \sqcup 이다.

<답> ⑤

19.

출제의도 : 정규분포를 따르는 확률변수의 확률을 구할 수 있는가?

확률변수 X 는 정규분포 $N(\frac{3}{2}, 2^2)$ 을 따

르므로

$$H(0) = P(0 \leq X \leq 1)$$

$$= P\left(\frac{0 - \frac{3}{2}}{2} \leq Z \leq \frac{1 - \frac{3}{2}}{2}\right)$$

$$= P(-0.75 \leq Z \leq -0.25)$$

$$= P(0.25 \leq Z \leq 0.75)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 0.75) - P(0 \leq Z \leq 0.25)$$

$$= 0.2734 - 0.0987 = 0.1747$$

또한, $H(0) = H(2)$ 이므로

$$H(0) + H(2) = 2 \times H(0) = 0.3494$$

<답> ①

20.

출제의도 : 지표와 가수의 성질을 이해하고 있는가?

$$10^n < a < 10^{n+1} \text{에서}$$

$$n < \log a < n+1$$

$\log a = n + \alpha$ ($0 < \alpha < 1$)라고 놓으면

$$\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a = \frac{1}{n}(n + \alpha) = 1 + \frac{\alpha}{n}$$

$\log a$ 와 $\log \sqrt[n]{a}$ 의 가수의 합이 정수이므로

$$\alpha + \frac{\alpha}{n} = 1$$

$$\therefore \alpha = \frac{n}{n+1}$$

또한 $(n+1)\log a = n^2 + 8$ 에서

$$(n+1)(n+\alpha) = n^2 + 8$$

$$(n+1)\left(n + \frac{n}{n+1}\right) = n^2 + 8 \left(\because \alpha = \frac{n}{n+1}\right)$$

$$2n = 8$$

$$\therefore n = 4, \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \frac{\log a}{n} = \frac{4 + \frac{4}{5}}{4} = \frac{6}{5}$$

<답> ④

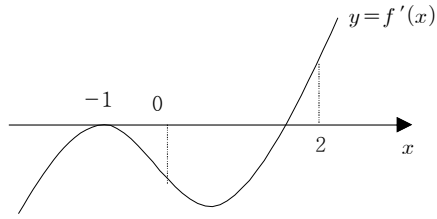
21.

출제의도 : 도함수 $f'(x)$ 를 이해하고 $f'(x)$ 를 통하여 $f(x)$ 의 증가와 감소를 판단할 수 있는가?

$f'(x) = (x+1)(x^2 + ax + b)$ 이고 함수

$y = f(x)$ 가 구간 $(-\infty, 0)$ 에서 감소하고

구간 $(2, \infty)$ 에서 증가하므로 $y = f'(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같아야 한다.



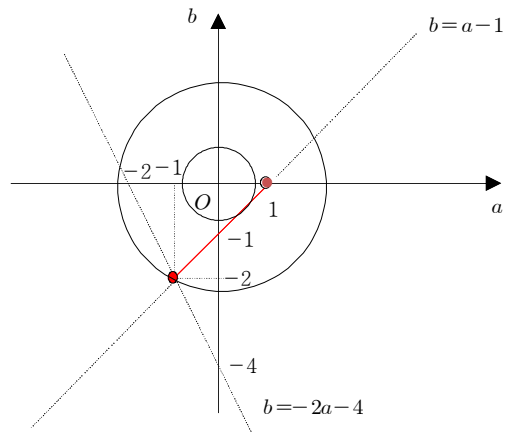
즉,

$$(-1)^2 - a + b = 0, \quad b = a - 1 \dots \textcircled{1}$$

$$f'(0) = b \leq 0 \dots \textcircled{2}$$

$$f'(2) = 3(4 + 2a + b) \geq 0, \quad b \geq -2a - 4 \dots \textcircled{3}$$

따라서, ①, ②, ③을 만족시키는 실수 a, b 의 순서쌍을 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.



이때, $a^2 + b^2 = r^2 \dots \textcircled{4}$ 라 하면 ④이 직선 $b = a - 1$ 에 접할 때 r^2 은 최소가 되고, ④이 점 $(-1, -2)$ 를 지날 때, r^2 은 최대가 된다.

$$M = (-1)^2 + (-2)^2 = 5$$

$$m = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore M + m = \frac{11}{2}$$

<답> ③

22.

출제의도 : 수열의 극한값을 계산할 수 있는가?

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 28n} - n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{28n}{\sqrt{n^2 + 28n} + n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{28}{\sqrt{1 + \frac{28}{n}} + 1} \\ &= 14 \end{aligned}$$

<답> 14

23.

출제의도 : 미분계수를 구할 수 있는가?

$$\begin{aligned} f'(x) &= 21x^2 - a \text{ 이므로} \\ f'(1) &= 21 - a = 2 \\ \therefore a &= 19 \end{aligned}$$

<답> 19

24.

출제의도 : 행렬을 이용하여 연립일차 방정식의 해를 구할 수 있는가?

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{에서} \\ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} &= A^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= B \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (\because AB = E) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \alpha = 4, \beta = 8$$

$$\therefore \alpha + \beta = 4 + 8 = 12$$

<답> 12

25.

출제의도 : 로그방정식의 해를 구할 수 있는가?

$$(\log_3 x)^2 - 6\log_3 \sqrt{x} + 2 = 0 \text{ 에서}$$

$$(\log_3 x)^2 - 3\log_3 x + 2 = 0$$

따라서, $\log_3 x = t$ 라 하면

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \dots \textcircled{1}$$

이고 $\textcircled{1}$ 의 두 근은 $\log_3 \alpha, \log_3 \beta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_3 \alpha + \log_3 \beta = \log_3 \alpha \beta = 3$$

$$\therefore \alpha \beta = 3^3 = 27$$

<답> 27

26.

출제의도 : 이항계수를 이용하여 수열의 일반항을 구하고 극한을 계산할 수 있는가?

$$a_n = {}_n C_3 \left(\frac{1}{n}\right)^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6n^3} = \frac{n^2 - 3n + 2}{6n^2}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2}{n^2 - 3n + 2} = 6$$

<답> 6

27.

출제의도 : 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

$y' = 3x^2 + 2$ 이므로 접선의 방정식은
 $y - 4 = 5(x + 1), y = 5x + 9$

따라서 곡선 $y = x^3 + 2x + 7$ 과 접선
 $y = 5x + 9$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^3 + 2x + 7 = 5x + 9, x^3 - 3x - 2 = 0$$

$$(x + 1)^2(x - 2) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

즉, $a = 2, b = 19$ 이므로

$$a + b = 21$$

<답> 21

28.

출제의도 : 정적분과 미분법을 활용할 수 있는가?

$\int_0^1 f(t)dt = k$ (k 는 상수)라고 하면

$$\int_0^x f(t)dt = x^3 - 2x^2 - 2kx \dots \text{㉠}$$

㉠에 $x = 1$ 을 대입하면

$$\int_0^1 f(t)dt = 1 - 2 - 2k = k$$

$$\therefore k = -\frac{1}{3}$$

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 - 4x - 2k \\ &= 3x^2 - 4x + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore f(0) = a = \frac{2}{3}$$

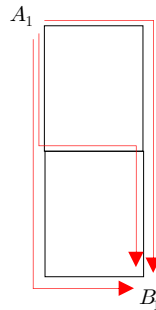
$$\therefore 60a = 60 \times \frac{2}{3} = 40$$

<답> 40

29.

출제의도 : 최단경로의 수를 구하여 규칙을 찾을 수 있는가?

[그림1]에서 최단거리로 가는 경로는 그림과 같다.



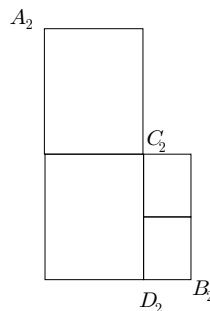
$$\therefore a_1 = 3 = 2^2 - 1$$

[그림2]에서 C_2, D_2 의 지점을 표시하면 최단거리로 가는 경로는

$$A_2 \rightarrow C_2 \rightarrow B_2$$

또는

$$A_2 \rightarrow D_2 \rightarrow B_2 \text{ (단, } C_2 \text{를 지나지 않는다)}$$



$$\therefore a_2 = 2 \times 3 + 1 \times 1 = 7 = 2^3 - 1$$

[그림3]에서 C_3, D_3, E_3 의 지점을 표시하면 최단거리로 가는 경로는

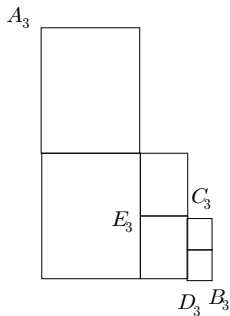
$$A_3 \rightarrow C_3 \rightarrow B_3$$

또는

$$A_3 \rightarrow E_3 \rightarrow D_3 \text{ (단, } C_3 \text{을 지나지 않는다.)}$$

또는

$$A_3 \rightarrow D_3 \rightarrow B_3 \text{ (단, } C_3, E_3 \text{을 지나지 않는다.)}$$



$$\begin{aligned} \therefore a_3 &= 2 \times 2 \times 3 + 2 \times 1 + 1 \times 1 \\ &= 15 = 2^4 - 1 \end{aligned}$$

같은 방법으로 계속해서 나타내면

$$a_n = 2^{n+1} - 1$$

$$\text{이므로 } a_7 = 2^8 - 1 = 255$$

<답> 255

30.

출제의도 : 부등식의 성질을 이용하여 일반항을 구하고 분수꼴의 수열의 합을 구할 수 있는가?

$$4^k - (2^n + 4^n)2^k + 8^n \leq 1 \quad \dots \text{㉠}$$

$$(2^k - 2^n)(2^k - 2^{2n}) \leq 1$$

$$f(k) = 2^k - 2^n, \quad g(k) = 2^k - 2^{2n} \text{ 라고 하자.}$$

i) $k < n$ 일 때

$$f(k) < -1, \quad g(k) < -1 \text{ 이므로}$$

$$f(k)g(k) > 1$$

ii) $n \leq k \leq 2n$ 일 때

$$f(k) \geq 0, \quad g(k) \leq 0 \text{ 이므로 } f(k)g(k) \leq 1$$

iii) $k > 2n$ 일 때

$f(k) > 1, \quad g(k) > 1$ 이므로 $f(k)g(k) > 1$ 따라서 부등식 ㉠을 만족하는 자연수 k 는 $n, n+1, n+2, \dots, 2n$ 이고 그 합은 첫째 항이 n , 끝항이 $2n$, 항의 개수가 $n+1$ 인 등차수열의 합이므로

$$a_n = \frac{(n+1)(n+2n)}{2} = \frac{3n(n+1)}{2}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{20} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{20} \frac{2}{3n(n+1)}$$

$$= \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{20} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \frac{2}{3} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{21} \right) \right\}$$

$$= \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{21} \right)$$

$$= \frac{40}{63}$$

$$\therefore p = 63, \quad q = 40$$

$$\therefore p + q = 63 + 40 = 103$$

<답> 103