2013학년도 9월 고2 전국연합학력평가
정답 및 해설(국어, 수학 영역)

수학 영역

B형 정답

1	①	2	③	3	④	4	⑤	5	④
6	①	7	④	8	②	9	⑤	10	③
11	④	12	②	13	③	14	②	15	⑤
16	①	17	②	18	④	19	②	20	③
21	⑤	22	190	23	2	24	98	25	33
26	6	27	511	28	193	29	47	30	9

수학 영역

B형 해설

1. [출제의도] 로그 계산하기

$\log_3 12 + \log_3 \frac{9}{4} = \log_3\left(12 \times \frac{9}{4}\right) = \log_3 3^3 = 3$

2. [출제의도] 행렬 계산하기

$A = (A+B) - B$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은 4

3. [출제의도] 무한수열의 극한 계산하기

모든 자연수 n에 대하여 $2n-1$은 양수이므로

$\frac{2n+1}{2n-1} < \frac{a_n}{2n-1} < \frac{2n+3}{2n-1}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n-1} = 1$, $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{2n-1} = 1$

따라서 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{2n-1} = 1$

4. [출제의도] 등비수열 이해하기

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_5 \times a_6 = ar^4 \times ar^5 = a^2 r^9 = 2$

$a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_{10} = a \times ar \times ar^2 \times \cdots \times ar^9$

$= a^{10} r^{45} = (a^2 r^9)^5 = 2^5 = 32$

(별해) 등비수열 $\{a_n\}$에서

$a_1 \times a_{10} = a_2 \times a_9 = \cdots = a_5 \times a_6 = 2$

$a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_{10} = (a_5 \times a_6)^5 = 2^5 = 32$

5. [출제의도] 지수방정식 이해하기

$(3^x)^2 - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$

$(3^x - 3)(3^x - 9) = 0$

$3^x = 3$ 또는 $3^x = 9$

$\therefore\ x = 1$ 또는 $x = 2$

따라서 두 실근의 합은 3

6. [출제의도] 무한등비수열의 수렴 이해하기

$\lim_{n\to\infty} \frac{4a - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{1}{2} + 3\left(\frac{3}{4}\right)^n} = 8a = 4$

따라서 $a = \frac{1}{2}$

7. [출제의도] 역행렬과 연립일차방정식 이해하기

$\begin{pmatrix} 9a & 2 \\ 4 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$이 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 갖기 위해서는 행렬 $\begin{pmatrix} 9a & 2 \\ 4 & b \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 한다.

$9ab - 8 = 0 \ \therefore\ ab = \frac{8}{9}$

a, b는 양수이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여 $a + 2b \ge 2\sqrt{2ab} = 2\sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{8}{3}$

따라서 $a + 2b$의 최솟값은 $\frac{8}{3}$

8. [출제의도] 등차수열 이해하기

등차수열의 $\{a_n\}$의 첫째항을 a_1, 공차를 d라 하자.

$S_n : S_{3n} = 1 : 9$

$S_{3n} = 9S_n$

$\frac{3n\{2a_1 + (3n-1)d\}}{2} = 9 \times \frac{n\{2a_1 + (n-1)d\}}{2}$

$\therefore\ d = 2a_1$

따라서 $a_2 = a_1 + d = 3a_1 = ka_1$ 이므로 $k = 3$

9. [출제의도] 로그함수를 이용하여 추론하기

$g(x) = (\sqrt{2})^x$

ㄱ. $g(6) = 8$ (참)

ㄴ. $f(2) = 2$, $f(4) = 4$, $f(8) = 6$ (참)

ㄷ. $\sum_{k=1}^{n} f(2^k) = \sum_{k=1}^{n} \log_{\sqrt{2}} 2^k = \sum_{k=1}^{n} 2k$

$= 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 110$

$\therefore\ n = 10$

$\sum_{k=1}^{n} g(2k) = \sum_{k=1}^{10} (\sqrt{2})^{2k} = \sum_{k=1}^{10} 2^k$

$= \frac{2(2^{10}-1)}{2-1} = 2046$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

10. [출제의도] 지수를 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

첫 번째 옥타브의 '라'의 진동수를 N_a라 하면

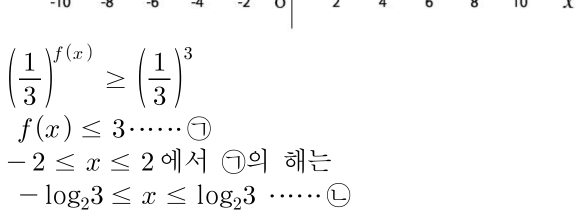
$m = 1$, $p = 9$이므로 $N_a = k \cdot 2 \cdot (\sqrt[12]{2})^9$

세 번째 옥타브의 '솔'의 진동수를 N_b라 하면

$m = 3$, $p = 7$이므로 $N_b = k \cdot 2^3 \cdot (\sqrt[12]{2})^7$

따라서 $\frac{N_b}{N_a} = \frac{k \cdot 2^3 \cdot (\sqrt[12]{2})^7}{k \cdot 2 \cdot (\sqrt[12]{2})^9} = 2^{2 - \frac{2}{12}} = 2^{\frac{11}{6}}$

11. [출제의도] 지수부등식 이해하기



$\left(\frac{1}{3}\right)^{f(x)} \ge \left(\frac{1}{3}\right)^3$

$f(x) \le 3 \cdots\cdots$ ㉠

$-2 \le x \le 2$에서 ㉠의 해는

$-\log_2 3 \le x \le \log_2 3$ ······㉡

㉡에서 정수 $x = -1$, 0, 1이므로

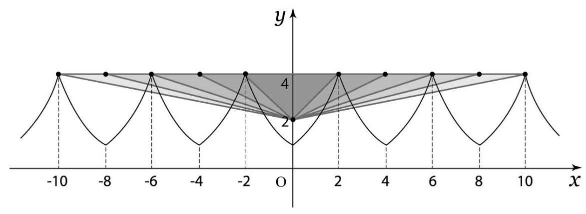
$-10 \le x \le 10$에서 ㉠의 해 중 정수는

$x = -9$, -8, -7, -5, -4, -3, -1, 0, 1,

3, 4, 5, 7, 8, 9

따라서 정수 x의 개수는 15

12. [출제의도] 여러 가지 수열을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기



$a_1 = 2$, $a_2 = 6$, $a_3 = 8$, $a_4 = 12$, $a_5 = 14$, $\cdots$

$a_{2n-1} = 6n - 4$, $a_{2n} = 6n$ 이므로

$\therefore\ a_{2n-1} + a_{2n} = 12n - 4$

따라서 $a_9 + a_{10} = 12 \times 5 - 4 = 56$

13. [출제의도] 그래프와 행렬을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

주어진 표를 행렬로 나타내면

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ⅰ) 직접 가는 방법

행렬 M의 (3, 5)성분과 같으므로 방법의 수는 1

ⅱ) 1개의 섬만을 거쳐 가는 방법

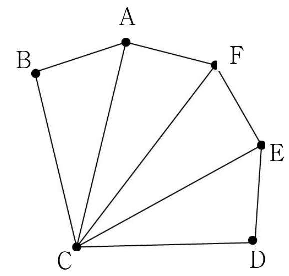
교량을 이용하여 C섬에서 1개의 섬만을 거쳐 E섬으로 가는 방법의 수는

행렬 M^2의 (3, 5)성분과 같으므로

$$(1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

따라서 ⅰ), ⅱ)에 의해 방법의 수는 3

(별해)



ⅰ) 직접 가는 방법 : CE

ⅱ) 1개의 섬만을 거쳐 가는 방법 :

CDE, CFE

따라서 ⅰ), ⅱ)에 의해 방법의 수는 3

14. [출제의도] 등비수열을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

n 번째 일요일에 달릴 거리를 a_n이라 하면

$a_n = 5(1.1)^{n-1}$

n 번째 일요일까지 달릴 거리의 총합을 S_n이라 하면 $S_n = \frac{5 \times (1.1^n - 1)}{1.1 - 1} \ge 200$

$1.1^n \ge 5$, $n \ge \frac{\log 5}{\log 1.1} = 16.88\cdots$

따라서 17 번째 일요일

15. [출제의도] 행렬과 역행렬을 이용하여 추론하기

ㄱ. $(A-E)(A^2 + A + E) = O$, $A^3 = E$ (참)

ㄴ. $AB = A(A-E) = (A-E)A = BA$ (참)

ㄷ. $(A+B)(A^2+B^2)(A^4+B^4)$

$= E(A+B)(A^2+B^2)(A^4+B^4)$

$= (A-B)(A+B)(A^2+B^2)(A^4+B^4)$

$= A^8 - B^8$

$A^8 = (A^3)^2 A^2 = E^2 A^2 = A^2 = -A - E$

$B^2=(A-E)^2=A^2-2A+E=-3A$

$B^8=(B^2)^4=(-3A)^4$

$\quad =81A^4=81A^3A=81A$

$\therefore\ (A+B)(A^2+B^2)(A^4+B^4)$

$\quad =(-A-E)-81A=-82A-E$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. [출제의도] 수학적 귀납법을 이용하여 추론하기

<증명>

(i) $n=2$일 때,

(좌변)$=\boxed{\frac{9}{8}}$이고 (우변)$=\frac{11}{8}$이므로 (★) 이 성립한다.

(ii) $n=m(\geq 2)$일 때, (★)이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^3}<\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{m^2}\right)$이다.

$n=m+1$ 일 때

$\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k^3}=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^3}+\boxed{\frac{1}{(m+1)^3}}$

$\quad <\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{m^2}\right)+\boxed{\frac{1}{(m+1)^3}}$

한편,

$\frac{1}{2}\left\{3-\frac{1}{(m+1)^2}\right\}-\left\{\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{m^2}\right)+\boxed{\frac{1}{(m+1)^3}}\right\}$

$=\frac{\boxed{3m+1}}{2m^2(m+1)^3}>0$ 이므로

$\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k^3}<\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{(m+1)^2}\right)$

이 성립한다.

따라서 $n=m+1$일 때도 (★)이 성립한다.

그러므로 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 (★)이 성립한다.

$a=\frac{9}{8}$, $f(m)=\frac{1}{(m+1)^3}$, $g(m)=3m+1$

따라서 $\frac{g(a)}{f(1)}=35$

17. [출제의도] 역행렬과 연립일차방정식을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

부피가 $1000\ \mathrm{cm}^3$인 정육면체 모양의 비누를 A, 부피가 $125\ \mathrm{cm}^3$인 정육면체 모양의 비누를 B라 하자.

비누 A의 생산비용은

$x+y=10000$ (원) ……㉠

비누 B의 부피는 비누 A의 부피의 $\frac{1}{8}$이고

비누 B의 겉넓이는 비누 A의 겉넓이의 $\frac{1}{4}$이므로

비누 B의 생산비용은

$\frac{1}{8}x+\frac{1}{4}y=1500$ (원) ……㉡

㉠, ㉡을 연립방정식으로 표현하면

$\begin{cases}x+y=10000\\ x+2y=12000\end{cases}$

연립방정식을 행렬로 나타내면

$\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10000\\12000\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10000\\12000\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p&-1\\-1&q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10000\\12000\end{pmatrix}$

$\therefore p=2,\ q=1$

따라서 $p+q=3$

18. [출제의도] 수학적 귀납법 이해하기

$a_1=1,\ b_1=4$

$b_n=f(a_n)=\frac{a_n+3}{a_n}\quad \therefore\ a_nb_n=a_n+3=a_{n+1}$

$a_n=1+(n-1)3=3n-2,\ b_n=\frac{3n+1}{3n-2}$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}+b_n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-2}{n}+\frac{3n+1}{3n-2}\right)=4$

19. [출제의도] 무한급수를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$a_n=2n$ 이므로 $a_{2n}=4n,\ a_{2n-1}=4n-2$

$b_n=\frac{\sum_{k=1}^{n}a_{2k}}{\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}}=\frac{\sum_{k=1}^{n}4k}{\sum_{k=1}^{n}(4k-2)}=1+\frac{1}{n}$

$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}$

$\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}-1\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)\right\}$

$=-\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$

$=-\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=-1$

20. [출제의도] 등차수열을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

제1 행의 3 개의 수 1, □, $\frac{1}{2}$ 는 등차수열이므로

□에 들어가는 수의 합 $S_1=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$

제2 행의 4 개의 수 $\frac{1}{2}$, □, □, $\frac{1}{4}$ 는 등차수열이므로 □에 들어가는 수의 합

$S_2=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}$

⋮

제n 행의 $2^{n-1}+2$ 개의 수는 등차수열이므로 □에 들어가는 수의 합

$S_n=2^{n-2}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=\frac{3}{4}$

$\therefore$ 모든 자연수 n에 대하여 $S_n=\frac{3}{4}$

따라서 $\sum_{n=1}^{40}S_n=\frac{3}{4}\times 40=30$

(별해)

$S_n=\frac{(2^{n-1}+2)\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{2}-\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

$=(2^{n-2}+1)\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}-\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

$=(2^{n-2}+1-1)\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

$=2^{n-2}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=\frac{3}{4}$

21. [출제의도] 계차수열을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$a_1=1$

$a_2-a_1=8=6\times1+2$

$a_3-a_2=20=6\times3+2$

$a_4-a_3=32=6\times5+2$

⋮

$a_{n+1}-a_n=6\times(2n-1)+2=12n-4$

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(12k-4)=6n^2-10n+5$

따라서 $a_{10}=505$

22. [출제의도] 합의 기호 시그마 계산하기

$\sum_{k=1}^{20}(k-1)=\sum_{k=1}^{19}k=\frac{19\times20}{2}=190$

23. [출제의도] 로그방정식 계산하기

진수조건에서 $6-x>0,\ x>0$

$\therefore\ 0<x<6$

$\log_2(6-x)=\log_2 x^2$

$6-x=x^2$

$(x+3)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-3$ 또는 $x=2$

따라서 $x=2$

24. [출제의도] 무한수열의 극한을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$\alpha_n+\beta_n=10n,\ \alpha_n\beta_n=n^2+1$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n}+\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha_n^2+\beta_n^2}{\alpha_n\beta_n}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(\alpha_n+\beta_n)^2-2\alpha_n\beta_n}{\alpha_n\beta_n}\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{98n^2-2}{n^2+1}=98$

25. [출제의도] 로그부등식을 이용하여 수학 내적문제 해결하기

i) $\log_2x+\log_2(10-x)\leq 4$에서

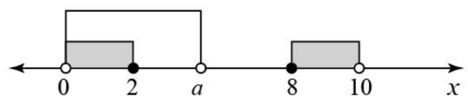
진수조건에서 $0<x<10$ 이고

$x^2-10x+16\geq 0$이므로

$\therefore\ 0<x\leq 2,\ 8\leq x<10$ ……㉠

ii) $x^2-ax<0$에서 $x(x-a)<0$

$\therefore\ 0<x<a$ ……㉡



㉠, ㉡에서 x의 값 중 정수가 2개가 되도록 하는 a값의 범위는 $2<a\leq 8$

따라서 자연수 a의 값의 합은 33

26. [출제의도] 로그함수 이해하기

점 D$(a,0)$이라 하면

점 A$(1,0)$, 점 B$(p,0)$, 점 C$(a,a-p)$이고

점 C는 $y=\log_2x$ 위에 있으므로

$\therefore\ a-p=\log_2a$ ……㉠

$\triangle$BDC의 넓이$=\frac{1}{2}(a-p)^2=\frac{9}{2}$

$\therefore\ a-p=3\ (a>p)$ ……㉡

㉠, ㉡에 의해 $a=8,\ p=5$

따라서 $\triangle$ABC의 넓이$=\frac{1}{2}(p-1)(a-p)=6$

27. [출제의도] 계차수열 이해하기

$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=1+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^n-1$

따라서 $a_9=511$

28. [출제의도] 순서도 이해하기

$n=1$일 때, $[\log_2n]=0$

$n=2,\ 3$일 때, $[\log_2n]=1$

$n=4,\ 5,\ 6,\ 7$일 때, $[\log_2n]=2$

$n=8,\ 9,\ \cdots,\ 15$일 때, $[\log_2n]=3$

$n=16,\ 17,\ \cdots,\ 31$일 때, $[\log_2n]=4$

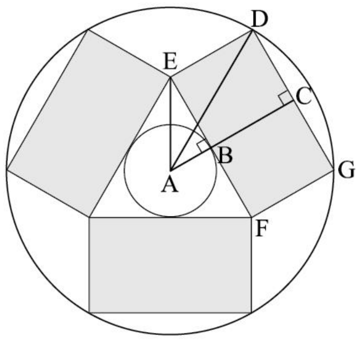
$n=32,\ 33,\ \cdots,\ 50$일 때, $[\log_2n]=5$

$S=0\times1+1\times2+2\times4+3\times8+4\times16+5\times19$

$\quad =193$

29. [출제의도] 무한급수의 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

원 O의 중심을 A, 한 직사각형의 긴 변의 중점을 B, C, 직사각형의 꼭짓점을 D, E, F, G라 하자.



원 O_1의 반지름을 r라 하면

$\angle \mathrm{AEB} = \frac{\pi}{6}$ 이므로 $\overline{\mathrm{BE}} = \sqrt{3}r$ 이므로

$\overline{\mathrm{EF}} = 2\sqrt{3}r$, $\overline{\mathrm{DE}} = 2r$, $\overline{\mathrm{AC}} = 3r$,

$\overline{\mathrm{CD}} = \sqrt{3}r$

$\triangle \mathrm{ACD}$ 가 직각삼각형이므로

$(3r)^2 + (\sqrt{3}r)^2 = (\sqrt{3})^2 \quad \therefore \ r = \frac{1}{2}$

$S_1 = 3 \times 2\sqrt{3}r \times 2r = 12\sqrt{3}r^2 = 3\sqrt{3}$

원 O과 원 O_1의 반지름의 닮음비가 $1 : \frac{1}{2\sqrt{3}}$ 이다.

같은 방법으로 원 O_n과 원 O_{n+1}의 반지름의 닮음비도 $1 : \frac{1}{2\sqrt{3}}$ 이다.

원 O_n의 내부와 원 O_{n+1}의 외부에 있는 세 직사각형의 넓이의 합과 원 O_{n+1}의 내부와 원 O_{n+2}의 외부에 있는 세 직사각형의 넓이의 합의 비는

$1^2 : \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 = 1 : \frac{1}{12}$

$\therefore \ \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{3\sqrt{3}}{1 - \frac{1}{12}} = \frac{36}{11}\sqrt{3} = \frac{q}{p}\sqrt{3}$

따라서 $p + q = 47$

30. [출제의도] 로그를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

(나)에 의해 $\log_n \frac{m+1}{m} < \frac{1}{3}$ 에서 $\frac{m+1}{m} < n^{\frac{1}{3}}$

$\therefore \ (m+1)^3 < n \cdot m^3$

i) $n = 3$일 때

$m = 2$이면 $(2+1)^3 > 3 \cdot 2^3$ 이므로 성립하지 않음

$m = 3$이면 $(3+1)^3 < 3 \cdot 3^3$ 이므로 $f(3) = 3$

ii) $n = 4$일 때

$m = 2$이면 $(2+1)^3 < 4 \cdot 2^3$ 이므로 $f(4) = 2$

iii) $n = 5$일 때

$m = 2$이면 $(2+1)^3 < 5 \cdot 2^3$ 이므로 $f(5) = 2$

iv) $n = 6$일 때

$m = 2$이면 $(2+1)^3 < 6 \cdot 2^3$ 이므로 $f(6) = 2$

따라서 $f(3) + f(4) + f(5) + f(6) = 9$

(별해) (나)에 의해

$\log_n \frac{m+1}{m} < \frac{1}{3}$ 에서 $\frac{m+1}{m} < n^{\frac{1}{3}}$

$\therefore \ \left(\frac{m+1}{m}\right)^3 < n$

i) $m = 2$ 일 때

$\left(\frac{2+1}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} < n$ 이므로 $n = 4, \ 5, \ 6, \cdots$

$\therefore \ f(4) = f(5) = f(6) = 2$

ii) $m = 3$ 일 때

$\left(\frac{3+1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} < n$ 이므로 $n = 3, \ 4, \ 5, \cdots$

$\therefore \ f(3) = 3$

따라서 $f(3) + f(4) + f(5) + f(6) = 9$