제 2교시

수학 영역 (B형)

1. $\log_3 12 + \log_3 \frac{9}{4}$ 의 값은? [2점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

2. 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

일 때, 행렬 A의 모든 성분의 합은? [2점]

① 0 ② 2 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

3. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $2n+1 < a_n < 2n+3$을 만족시킬 때, $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{2n-1}$ 의 값은? [2점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

4. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5 \times a_6 = 2$가 성립할 때, $a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_{10}$ 의 값은? [3점]

① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

5. 지수방정식 $3^{2x}-4\cdot3^{x+1}+27=0$의 두 실근의 합은? [3점]

① -6 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 6

6. $\lim_{n\to\infty}\frac{a\cdot4^{n+1}-1}{2^{2n-1}+3^{n+1}}=4$를 만족시키는 실수 a의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

7. x, y에 대한 연립방정식

$$\begin{pmatrix}9a & 2\\4 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

이 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 갖도록 하는 두 양수 a, b에 대하여 $a+2b$의 최솟값은? [3점]

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ 2 ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{10}{3}$

8. 모든 항이 양수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_n:S_{3n}=1:9$일 때, $a_2=ka_1$이다. 상수 k의 값은? [3점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

9. 로그함수 $f(x)=\log_{\sqrt{2}} x$ 의 역함수를 $y=g(x)$ 라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

<보 기>

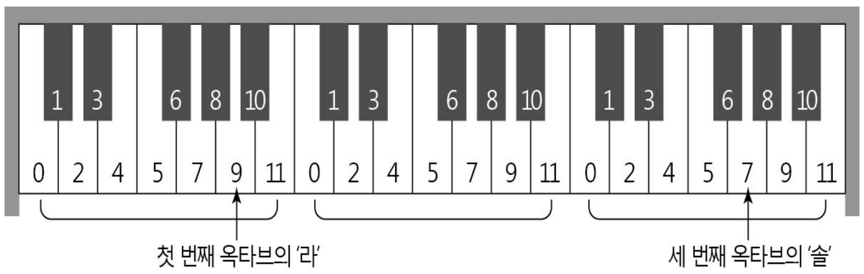
ㄱ. $g(6)=8$

ㄴ. $f(2)$, $f(4)$, $f(8)$ 은 이 순서대로 등차수열이다.

ㄷ. $\sum_{k=1}^{n} f(2^k)=110$ 을 만족시키는 자연수 n 에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} g(2k)=2046$ 이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

10. 그림과 같이 세 개의 옥타브로 이루어진 어떤 피아노가 있다. 각 옥타브마다 '도'를 0번 음으로 하고 나머지 음에 순서대로 번호를 붙이면 '솔'은 7번 음, '라'는 9번 음이 된다.



이 피아노의 m 번째 옥타브의 p번 음의 진동수 $N(\mathrm{Hz})$는 다음과 같다.

$$N=k\cdot 2^m\cdot(\sqrt[12]{2})^p \text{ (단, } k\text{는 상수이다.)}$$

세 번째 옥타브의 '솔'의 진동수는 첫 번째 옥타브의 '라'의 진동수의 몇 배인가? [3점]

① $2^{\frac{7}{6}}$ ② $2^{\frac{3}{2}}$ ③ $2^{\frac{11}{6}}$ ④ $2^{\frac{13}{6}}$ ⑤ $2^{\frac{5}{2}}$

[11~12] 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \le x \le 2$ 일 때, $f(x) = 2^x$
(나) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = f(-x)$
(다) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = f(x+4)$

11번과 12번의 두 물음에 답하시오.

11. $-10 \le x \le 10$ 에서 부등식 $\left(\frac{1}{3}\right)^{f(x)} - \frac{1}{27} \ge 0$ 을 만족시키는 모든 정수 x 의 개수는? [3점]

① 9 ② 11 ③ 13 ④ 15 ⑤ 17

12. 자연수 n 에 대하여 세 점 $(0,\ 2)$, $(2n,\ 4)$, $(-2n,\ 4)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 둘레와 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 교점의 개수를 a_n 이라 하자. 예를 들어 $a_2 = 6$ 이다. 이때, $a_9 + a_{10}$ 의 값은? [4점]

① 52 ② 56 ③ 60 ④ 64 ⑤ 68

13. 6개의 섬 A, B, C, D, E, F가 있다. 표는 두 섬 사이를 연결하는 교량이 있으면 1, 연결하는 교량이 없으면 0으로 나타낸 것이다.

	A	B	C	D	E	F
A	0	1	1	0	0	1
B	1	0	1	0	0	0
C	1	1	0	1	1	1
D	0	0	1	0	1	0
E	0	0	1	1	0	1
F	1	0	1	0	1	0

C섬에서 E섬으로 교량을 이용하여 갈 때, 직접 가거나 1개 섬만을 거쳐 가는 방법의 수는? (단, 이용한 교량은 다시 이용하지 않고, 2개의 섬 사이를 연결하는 교량은 많아야 1개이다.) [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

14. 철수는 마라톤 대회에 출전하기 위해 매주 일요일마다 달리기를 하기로 하였다. 첫 번째 일요일에 5 km를 달리기로 하고, 달릴 거리를 매주 일주일 전 보다 10%씩 늘려 나갈 계획이다. 이때, 달릴 거리의 총합이 처음으로 200 km 이상이 되는 날은 몇 번째 일요일인가? (단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 1.1 = 0.0414$로 계산한다.) [4점]

① 15 ② 17 ③ 19 ④ 21 ⑤ 23

15. 두 이차정사각행렬 A, B가

$$A^2 + A + E = O,\ B = A - E$$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, O는 영행렬이고, E는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $A^3 = E$
ㄴ. $AB = BA$
ㄷ. $(A+B)(A^2+B^2)(A^4+B^4) = -82A - E$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 다음은 2 이상의 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} < \frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{n^2}\right) \cdots\cdots (\bigstar)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

(i) $n=2$ 일 때,

(좌변)= $\boxed{\text{(가)}}$ 이고 (우변)= $\frac{11}{8}$ 이므로

($\bigstar$) 이 성립한다.

(ii) $n=m\ (m \geq 2)$ 일 때, ($\bigstar$) 이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^3} < \frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{m^2}\right)$ 이다.

$n=m+1$ 일 때,

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k^3} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^3} + \boxed{\text{(나)}} < \frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{m^2}\right) + \boxed{\text{(나)}}$$

한편,

$$\frac{1}{2}\left\{3-\frac{1}{(m+1)^2}\right\} - \left\{\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{m^2}\right) + \boxed{\text{(나)}}\right\}$$

$$= \frac{\boxed{\text{(다)}}}{2m^2(m+1)^3} > 0 \text{ 이므로}$$

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k^3} < \frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{(m+1)^2}\right)$$

이 성립한다.

따라서 $n=m+1$ 일 때도 ($\bigstar$) 이 성립한다.

그러므로 2 이상의 모든 자연수 n 에 대하여 ($\bigstar$) 이 성립한다.

위의 (가)에 알맞은 수를 a, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$ 이라 할 때, $\frac{g(a)}{f(1)}$ 의 값은? [4점]

① 35 ② 36 ③ 37 ④ 38 ⑤ 39

17. 어느 비누 회사에서 생산한 정육면체 모양의 비누의 생산비용은 재료비용과 포장비용의 합으로 하고, 비누의 재료비용과 포장비용은 각각 비누의 부피와 겉넓이에 정비례한다고 한다.

부피가 $1000\,\text{cm}^3$ 인 정육면체 모양의 비누의 생산비용은 10000 원이고, 부피가 $125\,\text{cm}^3$ 인 정육면체 모양의 비누의 생산비용은 1500 원이다. 부피가 $1000\,\text{cm}^3$ 인 정육면체 모양의 비누의 재료비용이 x 원, 포장비용이 y 원일 때, x, y 의 값을 구하는 식을 행렬을 이용하여 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & -1 \\ -1 & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10000 \\ 12000 \end{pmatrix}$$

이때, 두 실수 p, q 에 대하여 $p+q$ 의 값은? [4점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

18. 함수 $f(x)=\dfrac{x+3}{x}$ 에 대하여 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1=1$
(나) $b_n=f(a_n)$
(다) $a_{n+1}=a_nb_n$

이때, $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{n}+b_n\right)$ 의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

19. 첫째항과 공차가 모두 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 다음과 같이 정의한다.

$$b_n=\frac{a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}}{a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1}}$$

이때, $\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)$ 의 값은? [4점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

20. 다음과 같이 자연수 n 에 대하여 제n 행에 첫째항이 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, 끝항이 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$, 항의 개수가 $2^{n-1}+2$ 인 등차수열이 되도록 수를 나열한다. 예를 들어 제3 행의 수들은 첫째항이 $\frac{1}{4}$, 끝항이 $\frac{1}{8}$, 항의 개수가 6 인 등차수열이다.

제1행 $1,\ \square,\ \frac{1}{2}$

제2행 $\frac{1}{2},\ \square,\ \square,\ \frac{1}{4},$

제3행 $\frac{1}{4},\ \square,\ \square,\ \square,\ \square,\ \frac{1}{8}$

제4행 $\frac{1}{8},\ \square,\ \square,\ \square,\ \square,\ \square,\ \square,\ \square,\ \square,\ \frac{1}{16}$

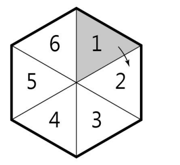
$\vdots$ $\vdots$

제n 행에 있는 수 중에서 첫째항과 끝항을 제외한 나머지 모든 수의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{40} S_n$의 값은? [4점]

① 26 ② 28 ③ 30 ④ 32 ⑤ 34

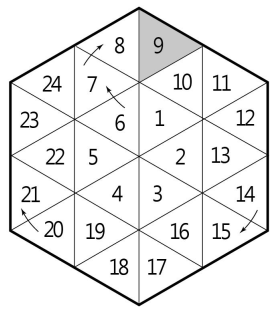
21. 자연수가 적혀있는 크기가 같은 정삼각형들이 있다. 이 정삼각형들을 그림과 같이 붙여 만들어진 정육각형 모양의 도형을 A_1이라 하고 어두운 정삼각형에 적혀있는 수를 a_1이라 하자.

A_1



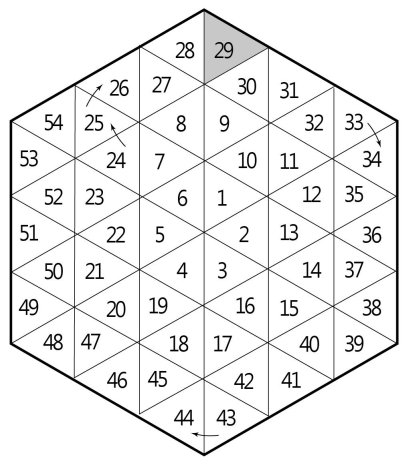
도형 A_1에 정삼각형들을 그림과 같이 붙여 만들어진 정육각형 모양의 도형을 A_2라 하고 어두운 정삼각형에 적혀있는 수를 a_2라 하자.

A_2



도형 A_2에 정삼각형들을 그림과 같이 붙여 만들어진 정육각형 모양의 도형을 A_3이라 하고 어두운 정삼각형에 적혀있는 수를 a_3이라 하자.

A_3



이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 만들어진 도형 A_n에서 어두운 정삼각형에 적혀있는 수를 a_n이라 할 때, a_{10}의 값은? [4점]

① 465 ② 475 ③ 485 ④ 495 ⑤ 505

단답형(22 ~ 30)

22. $\sum_{k=1}^{20}(k-1)$의 값을 구하시오. [3점]

23. 로그방정식 $\log_2(6-x)=2\log_2 x$의 해를 구하시오. [3점]

24. 자연수 n에 대하여 x에 대한 이차방정식

$$x^2-10nx+n^2+1=0$$

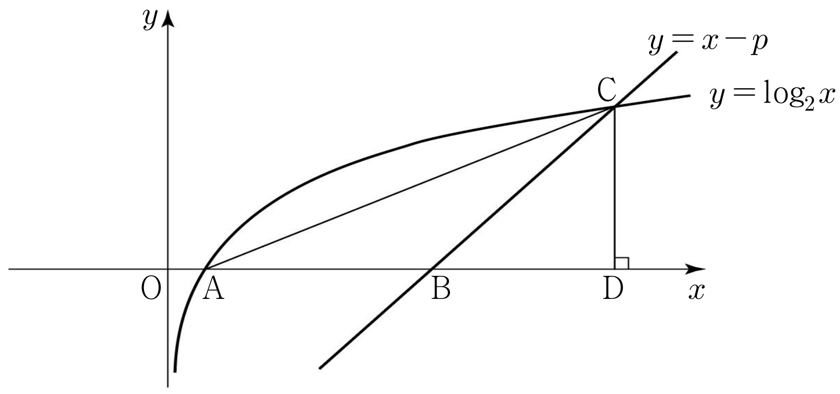
의 두 근을 α_n, β_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n}+\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)$의 값을 구하시오. [3점]

25. x에 대한 연립부등식

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_2(10-x) \le 4 \\ x^2 - ax < 0 \end{cases}$$

을 만족시키는 x의 값 중 정수가 2개가 되도록 하는 모든 자연수 a의 값의 합을 구하시오. [3점]

26. 그림과 같이 곡선 $y=\log_2 x$와 직선 $y=x-p$가 x축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 곡선 $y=\log_2 x$와 직선 $y=x-p$가 제1사분면에서 만나는 점을 C라 하고 점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 D라 하자. $\triangle$BDC의 넓이가 $\frac{9}{2}$일 때, $\triangle$ABC의 넓이를 구하시오. (단, $p>1$) [4점]

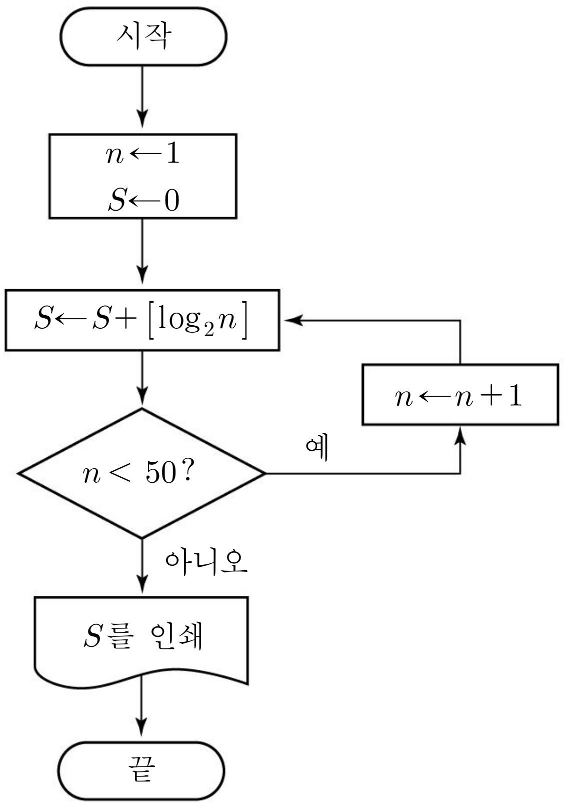


27. 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_9의 값을 구하시오. [3점]

(가) $a_1 = 1$

(나) $a_{n+1} = a_n + 2^n$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

28. 다음 순서도에서 인쇄되는 S의 값을 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점]

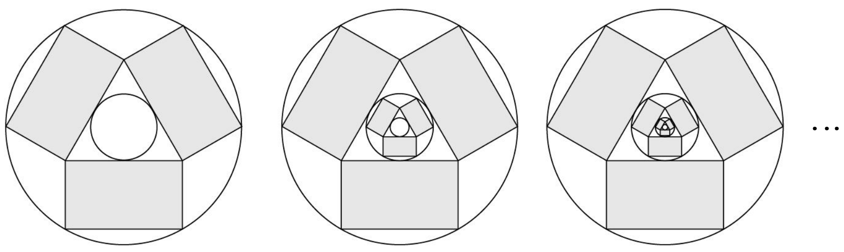


29. 그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$ 인 원 O의 내부에 가로, 세로의 길이의 비가 $1 : \sqrt{3}$ 인 크기가 같은 직사각형 3개를 각각의 긴 변 중 한 변은 원 O의 현이 되고 나머지 긴 변은 다른 두 직사각형과 각각 한 꼭짓점에서 만나도록 그리고 세 직사각형의 변에 의해 만들어진 정삼각형에 내접하는 원을 O_1이라 하고 세 직사각형을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 원 O_1의 내부에 가로, 세로의 길이의 비가 $1 : \sqrt{3}$ 인 크기가 같은 직사각형 3개를 그리고 세 직사각형의 변에 의해 만들어진 정삼각형에 내접하는 원을 O_2라 하고 세 직사각형을 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

그림 R_2에 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 원 O_2의 내부에 가로, 세로의 길이의 비가 $1 : \sqrt{3}$ 인 크기가 같은 직사각형 3개를 그리고 세 직사각형의 변에 의해 만들어진 정삼각형에 내접하는 원을 O_3이라 하고 세 직사각형을 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에서 색칠된 모든 직사각형의 넓이의 합을 S_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{q}{p}\sqrt{3}$ 일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



R_1 R_2 R_3 ⋯

30. 2보다 큰 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 m중 최솟값을 $f(n)$이라 하자.

(가) $m \geq 2$
(나) 두 점 $(m,\ \log_n m)$, $(m+1,\ \log_n(m+1))$을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{1}{3}$보다 작다.

이때, $f(3)+f(4)+f(5)+f(6)$의 값을 구하시오. [4점]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입( )는지 확인 하시오.