2013학년도 9월 고2 전국연합학력평가

정답 및 해설(국어, 수학 영역)

수학 영역

A형 정답

1	④	2	③	3	②	4	④	5	①
6	②	7	⑤	8	④	9	②	10	⑤
11	②	12	②	13	③	14	④	15	①
16	①	17	③	18	③	19	⑤	20	⑤
21	③	22	22	23	26	24	36	25	33
26	6	27	20	28	10	29	29	30	4

수학 영역

A형 해설

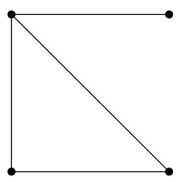
1. [출제의도] 지수 계산하기
$3^{\frac{1}{3}} \times \sqrt[3]{3^2} = 3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = 3$

2. [출제의도] 행렬 계산하기
$A = \frac{1}{2}\{(A+B)+(A-B)\}$
$= \frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

3. [출제의도] 지수방정식 계산하기
$2^{2x} - 2^{x+1} - 8 = 0$
$(2^x - 4)(2^x + 2) = 0$
$2^x + 2 > 0$이므로 $2^x - 4 = 0$
따라서 $x = 2$

4. [출제의도] 로그방정식 계산하기
진수조건에서
$x+3>0$, $3x+13>0$ $\therefore$ $x>-3$
$(x+3)^2 = 3x+13$, $x^2+3x-4=0$
$(x+4)(x-1)=0$ $\therefore$ $x=-4, 1$
따라서 $x=1$

5. [출제의도] 그래프와 행렬의 성질 이해하기
주어진 행렬
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
에서 $a=1$, $b=1$
꼭짓점의 개수 $p=4$, 변의 개수 $q=4$
따라서 $a+b+p+q=10$



<주어진 행렬로 그려진 그래프의 예>

6. [출제의도] 지수부등식 이해하기
$3^{2x} - 9 \cdot 3^x - 22 < 0$
$(3^x+2)(3^x-11) < 0$, $3^x + 2 > 0$이므로
$3^x < 11$ 을 만족시키는 자연수 x의 개수는 2

7. [출제의도] 로그함수의 역함수 이해하기
$f(x) = \log_2 x + 1$ 의 역함수가 $g(x)$일 때,
$g(5) = p$라 하면 $f(p) = 5$
$\log_2 p + 1 = 5$, $\log_2 p = 4$이므로 $p = 16$
따라서 $g(5) = 16$

8. [출제의도] 지수방정식에서 근의 성질 이해하기
$3^x = t\,(t>0)$라 하면
$t^2 - 6t - 3k = 0$이 서로 다른 두 양의 실근 α, β를 갖기 위해서는
i) $D = 36 + 12k > 0$ $\therefore$ $k > -3$
ii) $\alpha\beta = -3k > 0$ $\therefore$ $k < 0$
따라서 i), ii)에 의해 $-3 < k < 0$

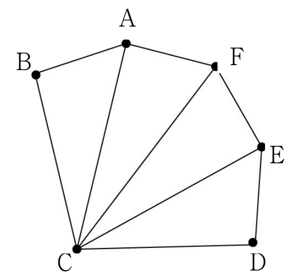
9. [출제의도] 지수를 이용하여 수학 외적 문제해결하기
첫 번째 일요일 하루 동안 달릴 거리는 5 km
두 번째 일요일 하루 동안 달릴 거리는
$5(1+0.1) = 5(1.1)$ km
세 번째 일요일 하루 동안 달릴 거리는
$5(1+0.1)^2 = 5(1.1)^2$ km
⋮
x 번째 일요일 하루 동안 달릴 거리는
$5 \times (1.1)^{x-1}$ km 이므로
$5 \times (1.1)^{x-1} \geq 20$ 에서
$(x-1) \times \log 1.1 \geq 2\log 2$
$x - 1 \geq \frac{0.6020}{0.0414} = 14.541\cdots$
$\therefore$ $x \geq 15.541\cdots$
따라서 16 번째 일요일

10. [출제의도] 행렬을 이용하여 추론하기
ㄱ. $A(A-B) = E$이므로 $A^{-1} = A - B$ (거짓)
ㄴ. ㄱ에 의해 $A(A-B) = (A-B)A = E$이므로 $AB = BA$ (참)
ㄷ. ㄱ, ㄴ에 의해
$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B) = O$, $A - B = A^{-1}$
$\therefore$ $A + B = O$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ

11. [출제의도] 지수함수 이해하기
점 $\mathrm{A}(-\log_2(k-6), k)$, 점 $\mathrm{B}(\log_2 k, k)$를 $1:2$로 내분하는 점이 y축 위에 있으므로
$\left(\frac{\log_2 k - 2\log_2(k-6)}{3}, k\right) = (0, k)$에서
$k = (k-6)^2$이므로
$k^2 - 13k + 36 = (k-4)(k-9) = 0$
$k=4$일 때, 점 A가 존재하지 않는다.
따라서 $k = 9$
(별해) 점 A, 점 B를 $1:2$로 내분하는 점이 y축 위에 있으므로 $\mathrm{A}(-\alpha, 2^\alpha + 6)$, $\mathrm{B}(2\alpha, 2^{2\alpha})$
또한 점 A, 점 B는 $y = k$위에 있으므로
$2^{2\alpha} = 2^\alpha + 6$,
$2^{2\alpha} - 2^\alpha - 6 = (2^\alpha - 3)(2^\alpha + 2) = 0$
$\therefore$ $2^\alpha = 3$
따라서 $k = 2^\alpha + 6 = 9$

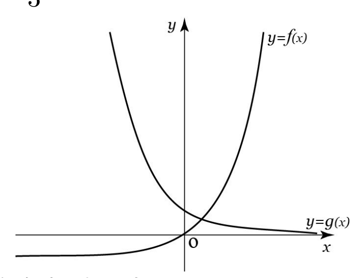
12. [출제의도] 역행렬과 연립일차방정식을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기
$\begin{pmatrix} b-4a & 4 \\ b-4a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 에서
$x=0$, $y=0$이외의 해를 갖기 위해서는
$\begin{pmatrix} b-4a & 4 \\ b-4a & b \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 하므로
$(b-4a)b - 4(b-4a) = (b-4a)(b-4) = 0$
영역 D에 속한 점 중 $b = 4a$ $(6<b<13)$을 만족시키는 점은 $(2, 8)$, $(3, 12)$
따라서 $\mathrm{P}(a, b)$의 개수는 2

13. [출제의도] 그래프와 행렬을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기
주어진 표를 행렬로 나타내면
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
i) 직접 가는 방법
행렬 M의 (3, 5)성분과 같으므로 방법의 수는 1
ii) 1개의 섬만을 거쳐 가는 방법
교량을 이용하여 C섬에서 1개의 섬만을 거쳐 E섬으로 가는 방법의 수는
행렬 M^2의 (3, 5)성분과 같으므로
$$(1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$
따라서 i), ii)에 의해 방법의 수는 3
(별해)

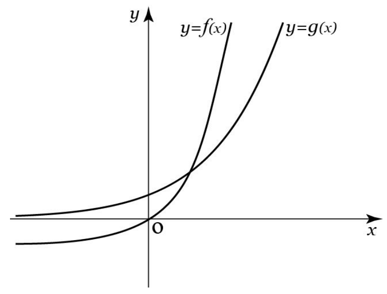


i) 직접 가는 방법 : CE
ii) 1개의 섬만을 거쳐 가는 방법 :
CDE, CFE
따라서 i), ii)에 의해 방법의 수는 3

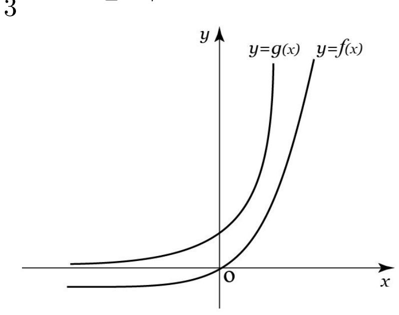
14. [출제의도] 지수함수 이해하기
i) $0 < \frac{a-1}{3} < 1$일 때



$\therefore$ 한 점에서 만난다.
ii) $1 < \frac{a-1}{3} < 2$일 때

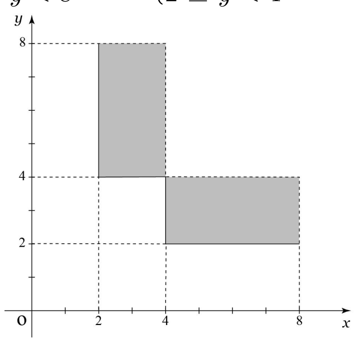


$\therefore$ 한 점에서 만난다.
iii) $\frac{a-1}{3} \geq 2$일 때



∴ 만나지 않는다.
ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의해
$0 < \frac{a-1}{3} < 1$, $1 < \frac{a-1}{3} < 2$
∴ $1 < a < 4$, $4 < a < 7$
따라서 정수 a의 최솟값은 2, 최댓값은 6이므로 합은 8

15. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기
$x > 1$, $y > 1$에 대하여 $N(x) > 0$, $N(y) > 0$
$N(x)N(y) = 2$이므로
$\begin{cases} N(x)=1 \\ N(y)=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} N(x)=2 \\ N(y)=1 \end{cases}$
∴ $\begin{cases} 2 \le x < 4 \\ 4 \le y < 8 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} 4 \le x < 8 \\ 2 \le y < 4 \end{cases}$



따라서 영역의 넓이는 16

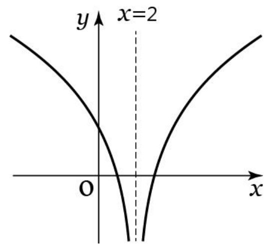
16. [출제의도] 행렬의 연산을 이용하여 추론하기

A가 $A^2 = E$를 만족시키므로
$A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & 2b\times(a+3) \\ 2c\times(a+3) & (a+6)^2+bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
이다.
따라서 $b\times(a+3) = c\times(a+3) = 0$이다.
(ⅰ) $a \ne \boxed{-3}$ 인 경우
$b = 0$이고 $c = 0$이므로
$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & (a+6)^2 \end{pmatrix}$ …… ㉠
이다.
㉠에서 $A^2 \ne E$이므로 주어진 조건에 모순이다.
(ⅱ) $a = \boxed{-3}$ 인 경우
주어진 조건 $A^2 = E$에서 $bc = \boxed{-8}$이다.
b, c가 정수이고 8의 약수의 개수가 4개이므로 $bc = \boxed{-8}$을 만족시키는 순서쌍 (b, c)의 개수는 $\boxed{8}$이다.
따라서 $A^2 = E$를 만족시키는 행렬 A의 개수는 $\boxed{8}$이다.

∴ $p = -3$, $q = -8$, $r = 8$
따라서 $p + q + r = -3$

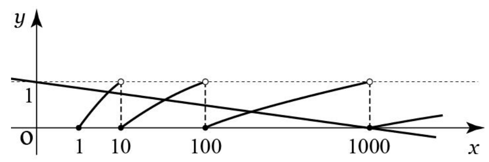
17. [출제의도] 로그를 이용하여 수학 외적 문제 해결하기
$5 = 10\log\frac{S_i \times N_o}{S_o \times N_i} = 10\log\left(10^{\frac{1}{3}} \times \frac{N_o}{N_i}\right)$에서
$\frac{1}{2} = \log\left(10^{\frac{1}{3}} \times \frac{N_o}{N_i}\right)$ ∴ $\frac{N_o}{N_i} = 10^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$
따라서 $\frac{N_o}{N_i} = 10^{\frac{1}{6}}$

18. [출제의도] 로그함수를 이용하여 수학 내적문제 해결하기
$(f \circ g)(x) = \log_2|x-2|$의 정의역은
$\{x \mid x \ne 2$인 실수$\}$이므로
$(f \circ g)(x) = \begin{cases} \log_2(x-2) & (x > 2) \\ \log_2(2-x) & (x < 2) \end{cases}$
따라서 $y = (f \circ g)(x)$의 그래프의 개형은



19. [출제의도] 상용로그의 성질 이해하기
$\log m = n + \alpha$ (n는 정수, $0 \le \alpha < 1$)에서
$\log 10m^2 = 2n + 1 + 2\alpha$
ⅰ) $0 \le \alpha < \frac{1}{2}$일 때
$\log 10m^2$의 지표가 $2n+1$이므로 $n = 2$
$10^2 \le m < 10^{2+\frac{1}{2}}$이므로
∴ $m = 100, 101, \cdots, 316$
ⅱ) $\frac{1}{2} \le \alpha < 1$일 때
$\log 10m^2$의 지표가 $2n+2$이므로 $n = 1$
$10^{1+\frac{1}{2}} \le m < 10^2$이므로
∴ $m = 32, 33, \cdots, 99$
ⅰ), ⅱ)에 의해 자연수 m의 최댓값은 316, 최솟값은 32
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 348

20. [출제의도] 로그함수 추론하기
ㄱ. $f(50) = \log 50 - [\log 50] = \log 5$
$f(5) = \log 5 - [\log 5] = \log 5$ (참)
ㄴ. $f(a) + f(b) = 1$이고
$\log a = [\log a] + f(a)$, $\log b = [\log b] + f(b)$
이므로 $\log ab = [\log a] + [\log b] + 1$는 정수
∴ $f(ab) = 0$ (참)
ㄷ. $y = f(x)$와 $y = -\frac{1}{10^3}x + 1$의 그래프는 다음과 같다.



∴ 교점은 모두 4개이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

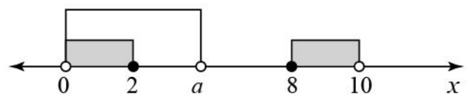
21. [출제의도] 지수함수를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기
(직선 QO의 기울기)
$= \frac{b}{\log(b+1)} = \frac{1}{\log(b+1)^{\frac{1}{b}}}$ ……㉠
(직선 PO의 기울기)
$= \frac{a}{\log(a+1)} = \frac{1}{\log(a+1)^{\frac{1}{a}}}$ ……㉡
(직선 PQ의 기울기)
$= \frac{b-a}{\log(b+1) - \log(a+1)}$
$= \frac{1}{\log\left(\frac{b+1}{a+1}\right)^{\frac{1}{b-a}}}$ ……㉢
㉠>㉡>㉢ 이므로
$\log(b+1)^{\frac{1}{b}} < \log(a+1)^{\frac{1}{a}} < \log\left(\frac{b+1}{a+1}\right)^{\frac{1}{b-a}}$
$(b+1)^{\frac{1}{b}} < (a+1)^{\frac{1}{a}} < \left(\frac{b+1}{a+1}\right)^{\frac{1}{b-a}}$
따라서 $B < A < C$

22. [출제의도] 행렬의 성분 이해하기
행렬 $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$
따라서 A의 모든 성분의 합은 22

23. [출제의도] 로그부등식 계산하기
$(\log_3 x)^2 - 2\log_3 x - 3 < 0$
$(\log_3 x + 1)(\log_3 x - 3) < 0$
$-1 < \log_3 x < 3$
∴ $\frac{1}{3} < x < 27$
따라서 자연수 x의 개수는 26

24. [출제의도] 행렬의 연산 이해하기
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & p \\ q & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$이므로
$p = 0$, $q = -6$
따라서 $p^2 + q^2 = 36$

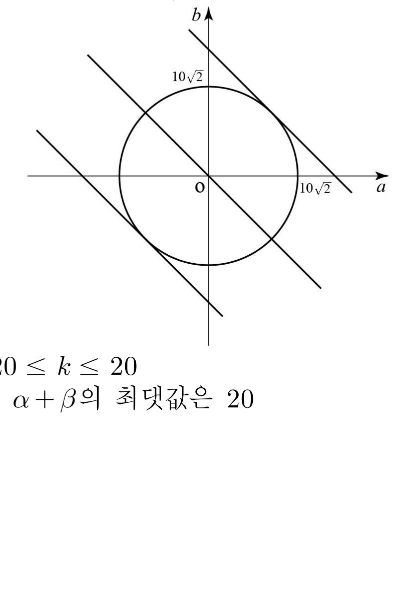
25. [출제의도] 로그부등식을 이용하여 수학 내적문제 해결하기
ⅰ) $\log_2 x + \log_2(10-x) \le 4$에서
진수조건에서 $0 < x < 10$이고
$x^2 - 10x + 16 \ge 0$이므로
∴ $0 < x \le 2$, $8 \le x < 10$ …… ㉠
ⅱ) $x^2 - ax < 0$에서 $x(x-a) < 0$
∴ $0 < x < a$ …… ㉡



㉠, ㉡에서 x의 값 중 정수가 2개가 되도록 하는 a값의 범위는 $2 < a \le 8$
따라서 자연수 a의 값의 합은 33

26. [출제의도] 로그함수 이해하기
점 $\mathrm{D}(a, 0)$이라 하면
점 $\mathrm{A}(1, 0)$, 점 $\mathrm{B}(p, 0)$, 점 $\mathrm{C}(a, a-p)$이고
점 C는 $y = \log_2 x$ 위에 있으므로
∴ $a - p = \log_2 a$ …… ㉠
$\triangle\mathrm{BDC}$의 넓이$= \frac{1}{2}(a-p)^2 = \frac{9}{2}$
∴ $a - p = 3$ $(a > p)$ …… ㉡
㉠, ㉡에 의해 $a = 8$, $p = 5$
따라서 $\triangle\mathrm{ABC}$의 넓이$= \frac{1}{2}(p-1)(a-p) = 6$

27. [출제의도] 역행렬과 연립일차방정식의 관계 이해하기
$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a \\ 3b \end{pmatrix}$에서
$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3a \\ 3b \end{pmatrix}$ 이므로
$\alpha + \beta = (2a - b) + (-a + 2b) = a + b$
점 (a, b)는 원 $x^2 + y^2 = 200$ 위의 점이므로
$a^2 + b^2 = 200$
$a + b = k$라 할 때, $\frac{|k|}{\sqrt{2}} \le 10\sqrt{2}$



∴ $-20 \le k \le 20$
따라서 $\alpha + \beta$의 최댓값은 20

28. [출제의도] 지수함수를 이용하여 수학 내적문제 해결하기

$2^x = 10 - 2^{4-x}$ 에서
$2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 16 = (2^x - 2)(2^x - 8) = 0$ 이므로
$x = 1,\ 3$
$\mathrm{A}(1, 2),\ \mathrm{B}(3, 8)$ 이다.
따라서 사다리꼴 ACDB 의 넓이는
$\frac{1}{2} \times (2+8) \times 2 = 10$

29. [출제의도] 역행렬과 연립일차방정식을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

(거리)=(속력)×(시간)이므로
$\begin{cases} 20x + 20y = 300 \\ 300x - 300y = 300 \end{cases}$
연립방정식을 행렬로 나타내면
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 \\ 1 \end{pmatrix}$
$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\therefore\ a = -1,\ b = -1$
따라서 $b - 30a = 29$

30. [출제의도] 지수함수를 이용하여 수학 내적문제 해결하기

점 $\mathrm{B}(m,\ a^m)$ 라 하면 점 $\mathrm{A}(a^m,\ m)$
점 A와 점 B는 원 위의 점이고 반지름이 $\sqrt{8}$ 인 원에 내접하는 정삼각형의 무게중심이 원점과 일치하므로 정삼각형의 한 변의 길이는 $2\sqrt{6}$
$\begin{cases} m^2 + a^{2m} = 8 & \cdots ㉠ \\ \sqrt{2(a^m - m)^2} = 2\sqrt{6} & \cdots ㉡ \end{cases}$
㉡에서 $a^m - m = \pm 2\sqrt{3}$
$a^m - m > 0$ 이므로 $a^m - m = 2\sqrt{3} \cdots ㉢$
㉠에 ㉢을 대입하면 $a^{2m} + (a^m - 2\sqrt{3})^2 = 8$
$a^{2m} - 2\sqrt{3}a^m + 2 = 0$
$\therefore\ a^m = 1 + \sqrt{3}\ (a^m > 1)$
A의 x좌표는 $1 + \sqrt{3} = p + \sqrt{q}$
$\therefore p = 1,\ q = 3$
따라서 $p + q = 4$