

제 2교시

수학 영역 (A형)

1. $3^{\frac{1}{3}} \times \sqrt[3]{3^2}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 3 ⑤ $3\sqrt{3}$

2. 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여

$$A+B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad A-B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

일 때, 행렬 A는? [2점]

- ① $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
 ④ $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

3. 지수방정식 $2^{2x} - 2^{x+1} - 8 = 0$ 의 해는? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. 로그방정식 $2\log_2(x+3) = \log_2(3x+13)$ 의 해는? [3점]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

5. 한 꼭짓점에서 자기 자신으로 가는 변이 없고, 두 꼭짓점 사이에
 많아야 한 개의 변이 존재하는 어떤 그래프 G 의 연결 관계를
 나타내는 행렬은 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

그래프 G 의 꼭짓점의 개수를 p , 변의 개수를 q 라 할 때,
 $a+b+p+q$ 의 값은? (단, a, b, p, q 는 상수이다.) [3점]

- ① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

6. 지수부등식 $(3^x + 1)(3^x - 10) < 12$ 를 만족시키는 모든 자연수
 x 의 개수는? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

7. 로그함수 $f(x) = \log_2 x + 1$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g(5)$ 의
 값은? [3점]

- ① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

8. 지수방정식 $3^{2x} - 2 \cdot 3^{x+1} - 3k = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 상수 k 의 값의 범위는? [3점]

- ① $-6 < k < -3$ ② $-5 < k < -2$ ③ $-4 < k < -1$
- ④ $-3 < k < 0$ ⑤ $-2 < k < 1$

9. 철수는 마라톤 대회에 출전하기 위해 매주 일요일마다 달리기를 하기로 하였다. 첫 번째 일요일에 5 km 를 달리기로 하고, 달릴 거리를 매주 일주일 전 보다 10%씩 늘려 나갈 계획이다. 이때, 하루 동안 달릴 거리가 처음으로 20 km 이상이 되는 날은 몇 번째 일요일인가? (단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 1.1 = 0.0414$ 로 계산한다.) [3점]

- ① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

10. 두 이차정사각행렬 A, B 가

$$A^2 - AB = E, \quad A^2 - B^2 = O$$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E 는 단위행렬이고 O 는 영행렬이다.) [3점]

<보 기>

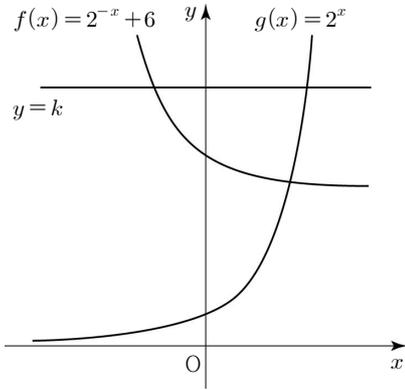
ㄱ. $A^{-1} = B - A$

ㄴ. $AB = BA$

ㄷ. $A + B = O$

- ① ㄴ
- ② ㄷ
- ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄱ, ㄷ
- ⑤ ㄴ, ㄷ

- [11~12] 그림은 좌표평면 위에 두 함수 $f(x) = 2^{-x} + 6$, $g(x) = 2^x$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 를 나타낸 것이다. 11번과 12번의 두 물음에 답하시오.



11. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 선분 AB가 y 축에 의해 1:2로 내분될 때, 실수 k 의 값은? [3점]

- ① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

12. 연립부등식

$$y > f(x), y > g(x), y < 13$$

의 영역을 D 라 하자. 영역 D 에 속한 점 중 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점 $P(a, b)$ 에 대하여 x, y 에 대한 연립방정식

$$\begin{pmatrix} b & 4 \\ b-4a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4ax \\ -by \end{pmatrix}$$

가 $x=0, y=0$ 이외의 해를 갖도록 하는 점 $P(a, b)$ 의 개수는? [4점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

13. 6개의 점 A, B, C, D, E, F가 있다. 표는 두 점 사이를 연결하는 교량이 있으면 1, 연결하는 교량이 없으면 0으로 나타낸 것이다.

	A	B	C	D	E	F
A	0	1	1	0	0	1
B	1	0	1	0	0	0
C	1	1	0	1	1	1
D	0	0	1	0	1	0
E	0	0	1	1	0	1
F	1	0	1	0	1	0

C 점에서 E점으로 교량을 이용하여 갈 때, 직접 가거나 1개 섬만을 거쳐 가는 방법의 수는? (단, 이용한 교량은 다시 이용하지 않고, 2개의 섬 사이를 연결하는 교량은 많아도 1개이다.)

[3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

14. 두 지수함수 $f(x) = 2^x - 1$ 과 $g(x) = \left(\frac{a-1}{3}\right)^x$ 의 그래프가 한 점에서 만나도록 하는 정수 a 의 최댓값과 최솟값의 합은?

[4점]

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

15. 양수 a 에 대하여 $N(a)$ 를 $\log_2 a$ 의 정수부분이라 하자. 1보다 큰 두 실수 x, y 에 대하여 $N(x)N(y) = 2$ 를 만족시키는 점 (x, y) 가 존재하는 영역의 넓이는? [4점]

- ① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

16. 다음은 이차정사각행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a+6 \end{pmatrix}$ 에 대하여 $A^2 = E$ 를 만족시키는 행렬 A 의 개수를 구하는 과정이다. (단, a, b, c 는 정수이고 E 는 단위행렬이다.)

A 가 $A^2 = E$ 를 만족시키므로

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & 2b \times (a+3) \\ 2c \times (a+3) & (a+6)^2+bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
 이다.

(i) $a \neq$ [가] 인 경우

$b=0$ 이고 $c=0$ 이므로 $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & (a+6)^2 \end{pmatrix}$ ㉠

이다.

㉠에서 $A^2 \neq E$ 이므로 주어진 조건에 모순이다.

(ii) $a =$ [가] 인 경우

주어진 조건 $A^2 = E$ 에서 $bc =$ [나]이다.

b, c 가 정수이므로

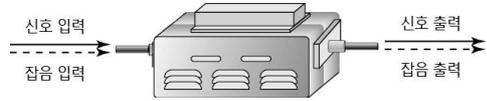
$bc =$ [나]를 만족시키는 순서쌍 (b, c) 의 개수는 [다]이다.

따라서 $A^2 = E$ 를 만족시키는 행렬 A 의 개수는 [다]이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r 라 할 때, $p+q+r$ 의 값은? [4점]

- ① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

17. 그림과 같은 전송기기가 있다.



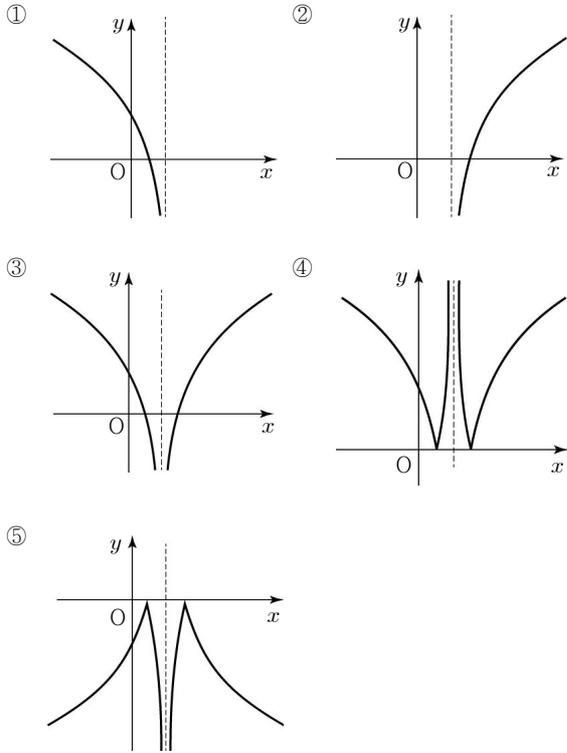
이 전송기기의 신호 입력을 S_i , 잡음 입력을 N_i 라 하고, 신호 출력을 S_o , 잡음 출력을 N_o 라 할 때, 잡음 지수 F (dB)은 다음과 같다.

$$F = 10 \log \frac{S_i \times N_o}{S_o \times N_i}$$

이 전송기기의 S_i 와 S_o 의 비가 $10^{\frac{1}{3}}:1$ 이고 잡음 지수가 5(dB)일 때, $\frac{N_o}{N_i}$ 의 값은? [4점]

- ① $10^{\frac{1}{10}}$ ② $10^{\frac{1}{8}}$ ③ $10^{\frac{1}{6}}$ ④ $10^{\frac{1}{4}}$ ⑤ $10^{\frac{1}{2}}$

18. 함수 $f(x) = \log_2|x|$ 와 함수 $g(x) = x-2$ ($x \neq 2$)에 대하여 함수 $y = (f \circ g)(x)$ 의 그래프의 개형은? [4점]



19. 자연수 m 에 대하여 $\log m$ 의 지표와 $\log 10m^2$ 의 지표의 차가 3이 되도록 하는 자연수 m 의 최댓값과 최솟값의 합은?

(단, $3.162 < 10^{\frac{1}{2}} < 3.163$) [4점]

- ① 340 ② 342 ③ 344 ④ 346 ⑤ 348

20. $x \geq 1$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = \log x - [\log x]$$

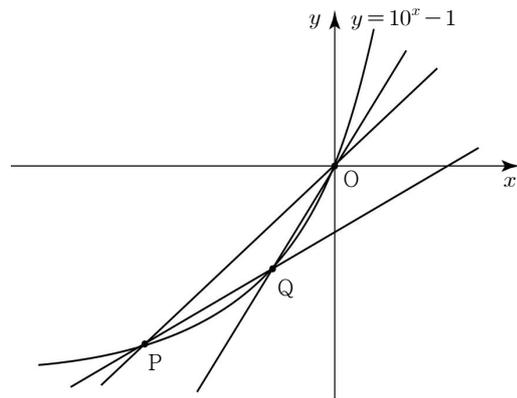
라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(5) = f(50)$
 ㄴ. $f(a) + f(b) = 1$ 이면 $f(ab) = 0$ 이다.
 ㄷ. 두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = -\frac{1}{10^3}x + 1$ 의 그래프의 교점은 모두 4개이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. $-1 < a < b < 0$ 인 두 실수 a, b 에 대하여 함수 $y = 10^x - 1$ 의 그래프 위에 두 점 $P(\log(a+1), a)$, $Q(\log(b+1), b)$ 가 있다. 세 직선 PO, QO, PQ 를 이용하여 세 실수 $A = (a+1)^{\frac{1}{a}}$, $B = (b+1)^{\frac{1}{b}}$, $C = \left(\frac{b+1}{a+1}\right)^{\frac{1}{b-a}}$ 의 대소를 비교할 때, A, B, C 의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은? (단, O 는 원점이다.) [4점]



- ① $A < B < C$ ② $A < C < B$ ③ $B < A < C$
 ④ $B < C < A$ ⑤ $C < A < B$

단답형(22 ~ 30)

22. 이차정사각행렬 A 의 (i, j) 성분 a_{ij} 가

$$a_{ij} = 2i + j + 1 \quad (i = 1, 2, j = 1, 2)$$

이다. 행렬 A 의 모든 성분의 합을 구하시오. [3점]

23. 로그부등식 $(\log_3 x)^2 < 3 + 2\log_3 x$ 를 만족시키는 모든 자연수 x 의 개수를 구하시오. [3점]

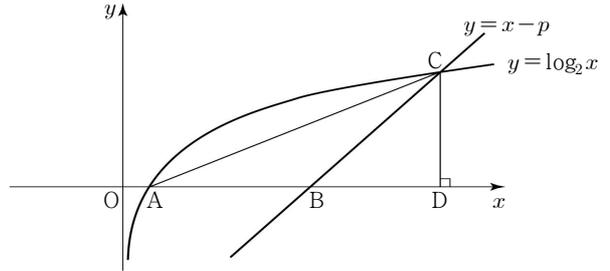
24. 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & p \\ q & 3 \end{pmatrix}$ 가 $AB = 3E$ 를 만족시킬 때, 두 상수 p, q 에 대하여 $p^2 + q^2$ 의 값을 구하시오. (단, E 는 단위행렬이다.) [3점]

25. x 에 대한 연립부등식

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_2(10-x) \leq 4 \\ x^2 - ax < 0 \end{cases}$$

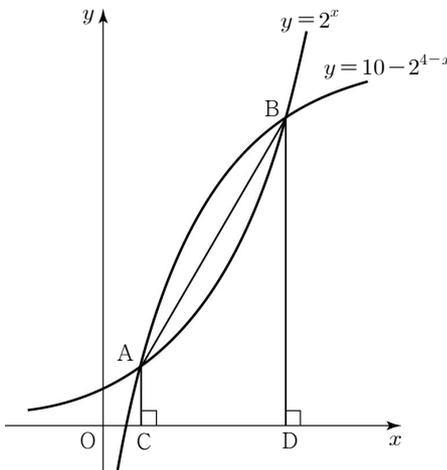
을 만족시키는 x 의 값 중 정수가 2개가 되도록 하는 모든 자연수 a 의 값의 합을 구하시오. [3점]

26. 그림과 같이 곡선 $y = \log_2 x$ 와 직선 $y = x - p$ 가 x 축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 곡선 $y = \log_2 x$ 와 직선 $y = x - p$ 가 제1사분면에서 만나는 점을 C라 하고 점 C에서 x 축에 내린 수선의 발을 D라 하자. $\triangle BDC$ 의 넓이가 $\frac{9}{2}$ 일 때, $\triangle ABC$ 의 넓이를 구하시오. (단, $p > 1$) [4점]



27. 중심이 원점이고 반지름의 길이가 $10\sqrt{2}$ 인 원 위의 점 (a, b) 에 대하여 x, y 에 대한 연립방정식 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a \\ 3b \end{pmatrix}$ 의 해를 $x = \alpha, y = \beta$ 라 하자. 이때, $\alpha + \beta$ 의 최댓값을 구하시오.
[3점]

28. 두 함수 $f(x) = 2^x$ 과 $g(x) = 10 - 2^{4-x}$ 의 그래프의 교점을 각각 A, B 라 하고 A 와 B 에서 x 축에 내린 수선의 발을 각각 C, D 라 할 때, 사다리꼴 ACDB 의 넓이를 구하시오.
[4점]

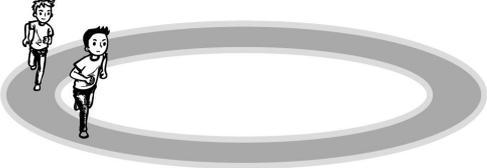


29. 트랙의 길이가 300m인 원형 트랙을 따라 두 선수 P와 Q가 각각 일정한 속력으로 달리는 [상황 1]과 [상황 2]는 다음과 같다.

[상황 1]
같은 지점에서 동시에 반대 방향으로 출발한 P와 Q가 출발 후 처음 만나는데 걸린 시간은 20초이다.



[상황 2]
같은 지점에서 동시에 같은 방향으로 출발한 P와 Q가 [상황 1]과 같은 속력으로 달릴 때, 출발 후 처음 만나는데 걸린 시간은 300초이다.

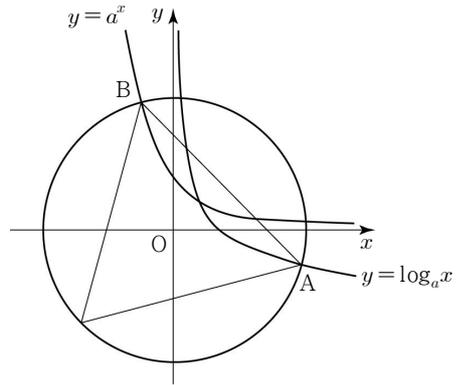


이때, P와 Q의 속력을 각각 x (m/초), y (m/초) ($x > y$)라 하고 이를 구하는 식을 행렬을 이용하여 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 1 \end{pmatrix}$$

두 실수 a, b 에 대하여 $b - 30a$ 의 값을 구하시오. (단, 원형 트랙의 폭은 무시한다.) [4점]

30. $0 < a < 1$ 인 실수 a 에 대하여 곡선 $y = \log_a x$ 와 원 $x^2 + y^2 = 8$ 이 제4사분면에서 만나는 점을 A, 곡선 $y = a^x$ 과 원 $x^2 + y^2 = 8$ 이 제2사분면에서 만나는 점을 B라 하자. 그림과 같이 두 점 A, B를 꼭짓점으로 하고 원에 내접하도록 그린 삼각형이 정삼각형이 될 때, 점 A의 x 좌표는 $p + \sqrt{q}$ 이다. 이때, $p + q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 정수이다.) [4점]



* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입()했는지 확인하시오.