2013학년도 7월 고3 전국연합학력평가

정답 및 해설

수학 영역

B형 정답

1	①	2	④	3	②	4	①	5	①
6	④	7	⑤	8	②	9	②	10	⑤
11	③	12	①	13	⑤	14	④	15	③
16	③	17	④	18	③	19	⑤	20	⑤
21	③	22	70	23	240	24	16	25	52
26	160	27	48	28	50	29	9	30	12

B형 해설

1. [출제의도] 행렬 계산하기

$(2A)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore$ 행렬의 모든 성분의 합은 1

2. [출제의도] 함수의 극한값 계산하기

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{2x-2}{(x-1)(x+1)(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3})}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{2}{(x+1)(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3})}=\frac{1}{4}$$

3. [출제의도] 공간좌표의 내분점 계산하기

선분AB를 2:1로 내분하는 점의 z좌표는 $\frac{2a+2}{3}$

$\frac{2a+2}{3}=0$이므로 $a=-1$

4. [출제의도] 정적분 계산하기

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin2x\,dx=-\frac{1}{2}\left[\cos2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}$$

5. [출제의도] 삼각함수의 성질 이해하기

$\sin^2\frac{A}{2}+\cos2A$

$=\frac{1-\cos A}{2}+2\cos^2A-1=-\frac{1}{2}$

6. [출제의도] 확률의 기본 성질 이해하기

$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{3}{4}$, $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\frac{3}{4}=\frac{1}{3}+\mathrm{P}(B)-\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)$

$\frac{2}{3}\mathrm{P}(B)=\frac{5}{12}$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{5}{8}$

7. [출제의도] 일차변환의 성질 이해하기

일차변환 f를 나타내는 행렬을 T라 하면

$T\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

$T\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}+T\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$

$\therefore a+b=10$

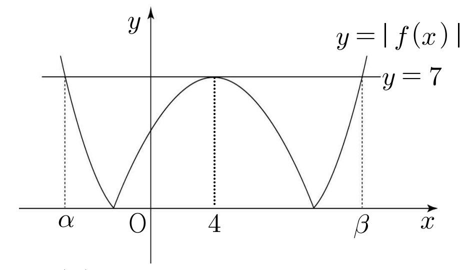
8. [출제의도] 무리방정식의 성질 이해하기

방정식 $|f(x)|-3=\sqrt{|f(x)|+9}$의 양변을 제곱하면

$|f(x)|^2-6|f(x)|+9=|f(x)|+9$

$|f(x)|^2-7|f(x)|=0$

$\therefore |f(x)|=7$ ($\because |f(x)|\geq 3$)



$y=|f(x)|$와 $y=7$이 만나는 점의 x좌표를 α, 4, β라 하면 $y=|f(x)|$의 그래프가 직선 $x=4$에 대하여 대칭이므로 $\frac{\alpha+\beta}{2}=4$

$\therefore\ \alpha+4+\beta=12$

9. [출제의도] 조건부 확률과 역행렬의 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

행렬A의 역행렬이 존재하지 않는 사건을 P, a가 홀수인 사건을 Q라 하자.

$A=\begin{pmatrix}a & b\\ b & 2c\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않으려면

$2ac-b^2=0$이므로, 순서쌍(a,b,c)는 $(1,2,2)$, $(2,2,1)$, $(2,4,4)$, $(4,4,2)$, $(3,6,6)$, $(6,6,3)$ 6개이고, 이 중에서 a가 홀수인 경우는 2개이므로

$\therefore \mathrm{P}(Q|P)=\frac{1}{3}$

10. [출제의도] 일차변환의 성질 이해하기

일차변환 f, g를 나타내는 행렬을 각각 A, B라 하면

$A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 3 & -1\end{pmatrix}$

합성변환 $g\circ f$를 나타내는 행렬은

$BA=B\begin{pmatrix}2 & -3\\ 3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$이므로

$B^{-1}=\begin{pmatrix}7 & -12\\ 7 & -11\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}7 & -12\\ 7 & -11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-4\end{pmatrix}$

$\therefore a+b=-9$

11. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

$b=\left(\frac{1+0.32}{\log_2 l^3}\right)\times R$ ...... ㉠

$4b=\left(\frac{1+k}{\log_2 l}\right)\times R$ ...... ㉡

㉠과 ㉡에 의하여

$4=\frac{3(1+k)}{1.32}$ $\quad\therefore k=0.76$

12. [출제의도] 합성함수의 미분법 이해하기

$f(\cos x)=\sin2x+\tan x$의 양변을 미분하면,

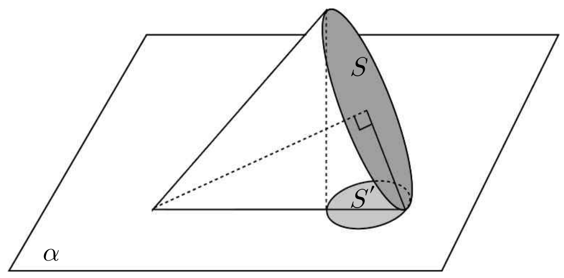
$-\sin x\cdot f'(\cos x)=2\cos2x+\sec^2x$

$x=\frac{\pi}{3}$일 때, $\cos x=\frac{1}{2}$이므로

$-\frac{\sqrt{3}}{2}f'\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(-\frac{1}{2}\right)+4$

$\therefore f'\left(\frac{1}{2}\right)=-2\sqrt{3}$

13. [출제의도] 정사영을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

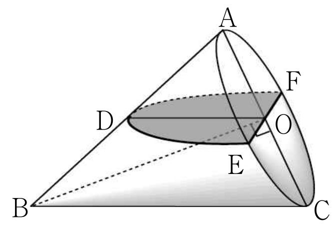


원뿔의 밑면을 포함한 평면과 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ라 하고

원뿔의 밑면의 평면 α위로의 정사영의 넓이를 S'이라 하자.

$\therefore S'=S\cdot\cos\theta=\pi\cdot\frac{1}{3}=\frac{\pi}{3}$

14. [출제의도] 정적분을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

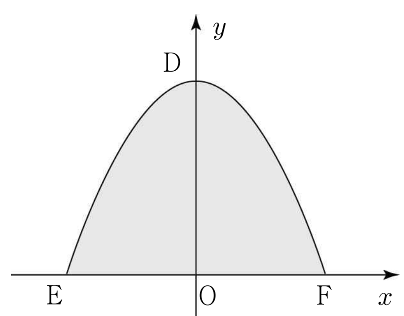


삼각형 ABC에 대하여 $\overline{\mathrm{BC}}=3$이고 $\overline{\mathrm{BC}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{DO}}$, $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OC}}$이므로

삼각형의 중점연결정리에 의하여

$\overline{\mathrm{DO}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}=\frac{3}{2}$

좌표평면에 포물선을 나타내면



이 포물선은 $\left(0,\frac{3}{2}\right)$을 꼭짓점으로 하고 $(1,0)$을 지나므로, 포물선의 방정식은 $y=-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}$

따라서 구하고자 하는 단면의 넓이는

$$S=\int_{-1}^{1}\left(-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}\right)dx=2$$

15. [출제의도] 수학적 귀납법을 이용하여 증명과정 추론하기

$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n}\leq\frac{1}{\sqrt{3n+1}}\cdots(\bigstar)$

(i) $n=1$일 때

$\frac{1}{2}\leq\frac{1}{\sqrt{4}}$ 이므로 $(\bigstar)$이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 $(\bigstar)$이 성립한다고 가정하면

$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{2k-1}{2k}\times\frac{2k+1}{2k+2}$

$\leq\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}=\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{1}{1+\boxed{\frac{1}{2k+1}}}$

$=\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(1+\boxed{\frac{1}{2k+1}}\right)^2}}$

$=\frac{1}{\sqrt{3k+1+2(3k+1)\cdot\left(\boxed{\frac{1}{2k+1}}\right)+(3k+1)\cdot\left(\boxed{\frac{1}{2k+1}}\right)^2}}$

$$< \frac{1}{\sqrt{3k+1+2(3k+1)\cdot\left(\boxed{\frac{1}{2k+1}}\right)+(\boxed{2k+1})\cdot\left(\boxed{\frac{1}{2k+1}}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3(k+1)+1}}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 (★)이 성립한다.
그러므로 (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 (★)이 성립한다.

$f(k)=\frac{1}{2k+1}$, $g(k)=2k+1$

$\therefore f(4)\times g(13)=\frac{1}{9}\cdot 27=3$

16. [출제의도] 함수의 연속성 추론하기

ㄱ. $f(-1)-g(-1)=1-1=0$

$\lim\limits_{x\to -1-0}\{f(x)-g(x)\}=-1-(-1)=0$

$\lim\limits_{x\to -1+0}\{f(x)-g(x)\}=1-1=0$

$\lim\limits_{x\to -1}\{f(x)-g(x)\}=f(-1)-g(-1)$

함수 $f(x)-g(x)$는 $x=-1$ 에서 연속 (참)

ㄴ. $f(-1)g(-1)=1$

$\lim\limits_{x\to -1-0}f(x)g(x)=(-1)\cdot(-1)=1$

$\lim\limits_{x\to -1+0}f(x)g(x)=1\cdot 1=1$

$\lim\limits_{x\to -1}f(x)g(x)=f(-1)g(-1)$

함수 $f(x)g(x)$는 $x=-1$에서 연속 (참)

ㄷ. $\lim\limits_{x\to 1-0}f(g(x))=\lim\limits_{t\to -0}f(t)=0$

$\lim\limits_{x\to 1+0}f(g(x))=f(1)=-1$

함수 $(f\circ g)(x)$는 $x=1$에서 극한값이 존재하지 않으므로 불연속 (거짓)

17. [출제의도] 확률을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

모든 경우의 수는 ${}_{15}\mathrm{P}_5$이고,
5명이 어느 누구와도 서로 이웃하지 않게 타는 경우의 수는 빈자리 10개 사이의 9자리와 양끝 2자리를 포함한 11자리에 5명이 앉는 경우의 수 ${}_{11}\mathrm{P}_5$ 와 같으므로

$\therefore \frac{{}_{11}\mathrm{P}_5}{{}_{15}\mathrm{P}_5}=\frac{2}{13}$

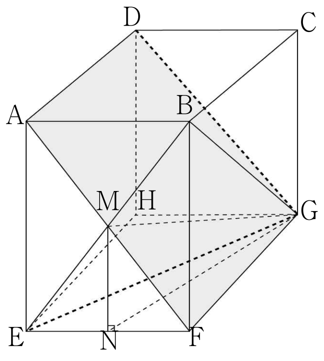
18. [출제의도] 도함수를 이용하여 그래프의 개형 추론하기

$f(x)$에 대한 증감표를 작성하면

x	−	b	−	0	+	c	+	d	+
$g(x)$	+	0	−		+	0	−	0	+
$f'(x)$	−		+		+		−		+
$f(x)$	↘	극소	↗		↗	극대	↘	극소	↗

ㄱ. $f(x)$는 열린 구간 $(b,\ 0)$에서 증가한다.(참)
ㄴ. $f(x)$는 $x=b$에서 극솟값을 갖는다.(참)
ㄷ. $f(x)$는 닫힌 구간 $[a,\ e]$에서 $x=b,\ c,\ d$에서 극값을 가지므로 3개의 극값을 갖는다. (거짓)

19. [출제의도] 공간도형의 성질 이해하기



선분 AF와 선분 BE의 교점을 점 M이라 하면, 평면 AFGD와 평면 BEG의 교선은 직선 GM이다.
점 M에서 평면 EFGH에 내린 수선의 발을 N이라 하자.
$\overline{\mathrm{GF}}=3$, $\overline{\mathrm{FN}}=1$, $\overline{\mathrm{MN}}=2$이므로
$\overline{\mathrm{GN}}=\sqrt{10}$, $\overline{\mathrm{GM}}=\sqrt{14}$

$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{GN}}}{\overline{\mathrm{GM}}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$ $\quad\therefore \cos^2\theta=\frac{5}{7}$

20. [출제의도] 행렬의 성질 추론하기

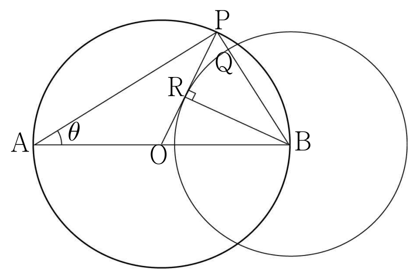
$AB=A$가 성립하므로

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & b \\ c & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ad+bc & 2ab \\ 2cd & ad+bc\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$

$a=d$이므로 $A=B$
$A^2=A$, $B^2=B$
ㄱ. $AB=BA$ (참)
ㄴ. $A^{2014}+B^{2014}=2A$ (참)
ㄷ. B^{-1}이 존재하면 A^{-1}이 존재하고
$A^2=A$이 성립하므로 $A=E$이다. (참)

21. [출제의도] 삼각함수의 극한을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

원 C_2와 선분 OP의 접점을 점 R라 하자.



$\overline{\mathrm{BP}}=2\sin\theta$,
$\angle\mathrm{ROB}=2\theta$이므로, $\overline{\mathrm{BR}}=\sin 2\theta=\overline{\mathrm{BQ}}$
$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PB}}-\overline{\mathrm{BQ}}=2\sin\theta-\sin 2\theta$

$=2\sin\theta-2\sin\theta\cos\theta=2\sin\theta(1-\cos\theta)$

$$\lim_{\theta\to +0}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\theta^3}=\lim_{\theta\to +0}\frac{2\sin\theta(1-\cos\theta)}{\theta^3}$$

$$=\lim_{\theta\to +0}2\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}$$

$$=2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=1$$

22. [출제의도] 미분계수 계산하기

$f'(x)=200-3x-x^2$
$f'(10)=70$

23. [출제의도] 이항계수의 성질 이해하기

$\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항

${}_6\mathrm{C}_r(x^2)^{6-r}\left(-\frac{2}{x}\right)^r$에서 상수항은 $r=4$인 경우이므로 ${}_6\mathrm{C}_4(-2)^4=240$

24. [출제의도] 쌍곡선의 성질 이해하기

쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$이라 할 때, 주어진 조건에 의해서 $\frac{b}{a}=\frac{3}{4}$, $a^2+b^2=100$ 이므로 $a=8$
∴ 주축의 길이는 16

25. [출제의도] 계차수열 이해하기

$a_9=a_1+\sum\limits_{k=1}^{8}(2k-3)=100$

$a_1=52$

26. [출제의도] 정적분의 성질 이해하기

$y=\sqrt{x}$와 $y=x-2$의 교점은 $(4,2)$

$$V=\pi\int_0^4 x\,dx-\pi\int_2^4(x-2)^2\,dx$$

$$=\pi\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^4-\pi\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_2^4$$

$$=8\pi-\pi\left(\frac{56}{3}-24+8\right)=\frac{16}{3}\pi$$

$\therefore \frac{30V}{\pi}=160$

27. [출제의도] 원순열을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

(i) 남학생 4명 중 2명씩 조를 만드는 경우의 수 ${}_4\mathrm{C}_2\times\frac{1}{2!}$
(ii) 2명의 학생과 1개의 빈자리를 묶어서 생각하면 3개의 묶음을 원형으로 배열하는 원순열의 경우의 수 $(3-1)!$
(iii) 같은 조의 학생끼리 서로 자리를 바꾸는 경우의 수 2^3
(i), (ii), (iii)에 의하여

$\therefore {}_4\mathrm{C}_2\times\frac{1}{2!}\times(3-1)!\times 2^3=48$

28. [출제의도] 타원의 성질 이해하기

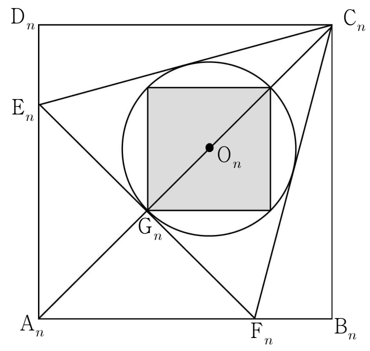
장축의 길이는 정삼각형의 한 변의 길이의 5배와 같으므로 $a^2=25$이고
[그림2]에서 점 A의 좌표가 $(4,\ \sqrt{3})$이므로
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 대입하여 정리하면

$b^2=\frac{25}{3}$

$\therefore a^2+3b^2=50$

29. [출제의도] 무한급수를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

그림과 같이 정사각형 R_n의 꼭짓점을 각각 A_n, B_n, C_n, D_n이라 하고, 문제의 조건에 따라 그린 정삼각형의 꼭짓점을 각각 C_n, E_n, F_n이라 하자.



정사각형 R_n의 한 변의 길이를 a_n, 정삼각형 $\mathrm{C}_n\mathrm{E}_n\mathrm{F}_n$의 한 변의 길이를 b_n이라 하자.
$\overline{\mathrm{C}_n\mathrm{G}_n}+\overline{\mathrm{G}_n\mathrm{A}_n}=\sqrt{2}\,a_n$

$\frac{\sqrt{3}}{2}b_n+\frac{1}{2}b_n=\sqrt{2}\,a_n$

$b_n=(\sqrt{6}-\sqrt{2})a_n$
원 O_n의 반지름의 길이 r_n은

$r_n=\frac{\sqrt{3}}{2}b_n\times\frac{1}{3}$

정사각형 R_{n+1}의 한 변의 길이는 $\sqrt{2}r_n$이므로

$a_{n+1}=\sqrt{2}\,r_n=\frac{\sqrt{6}}{6}b_n=\frac{\sqrt{6}}{6}(\sqrt{6}-\sqrt{2})\,a_n$

$\therefore a_{n+1}=\frac{3-\sqrt{3}}{3}a_n$

수열$\{S_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{4-2\sqrt{3}}{3}$인 등비수열이다.

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{1}{1-\frac{4-2\sqrt{3}}{3}}=\frac{3+6\sqrt{3}}{11}$

$\therefore a+b=9$

30. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$$\log\frac{1}{k^n}=-n\log k=-n(1+0.08)$$
$$=-n\left(1+\frac{2}{25}\right)=-n-\frac{2n}{25}$$

(i) $n=1,2,3,\cdots,12$ 이면
$\log\frac{1}{k^n}$ 의 가수는 $1-\frac{2n}{25}$,

(ii) $n=13,14,15,\cdots,24$ 이면
$\log\frac{1}{k^n}$ 의 가수는 $2-\frac{2n}{25}$,

(iii) $n=25$ 이면 $\log\frac{1}{k^n}$ 의 가수는 0,

(iv) $n\geq 26$ 에서는 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 25$ 일 때의 가수가 반복하여 나타난다.

그러므로 집합 X의 원소의 개수는 25이다.
집합 X의 모든 원소의 합은

$$0+\frac{1}{25}+\frac{2}{25}+\cdots+\frac{24}{25}=12$$