2013학년도 7월 고3 전국연합학력평가
정답 및 해설

수학 영역

A형 정답

1	③	2	④	3	②	4	①	5	④
6	②	7	①	8	①	9	④	10	⑤
11	②	12	①	13	②	14	③	15	③
16	③	17	⑤	18	⑤	19	②	20	③
21	⑤	22	12	23	14	24	36	25	60
26	24	27	616	28	32	29	42	30	9

A형 해설

1. [출제의도] 로그 계산하기

$\log_2\frac{4}{3}+\log_2 6=\log_2\left(\frac{4}{3}\cdot 6\right)=\log_2 8=3$

2. [출제의도] 행렬 계산하기

$2A+B=2\begin{pmatrix}5&0\\1&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&2\\1&6\end{pmatrix}$

$\therefore$ 행렬의 모든 성분의 합은 20

3. [출제의도] 수열의 극한 계산하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+5}{n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^2}{n^2}+\frac{5}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{2}{n^2}}=2$$

4. [출제의도] 확률의 기본 성질 이해하기

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{1}{12}$

5. [출제의도] 정적분 계산하기

$$\int_{-1}^{1}(3x^2+6x+7)dx$$
$$=2\int_0^1(3x^2+7)dx=2(1+7)=16$$

6. [출제의도] 수열의 극한 이해하기

$\frac{a_n}{n+1}=b_n$이라 하면 $a_n=(n+1)b_n$이고

$\lim_{n\to\infty}b_n=3$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)a_n}{3n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(n+1)b_n}{3n^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(n+1)}{3n^2}\times\lim_{n\to\infty}b_n$$
$$=\frac{2}{3}\times 3=2$$

7. [출제의도] 접선의 방정식 이해하기

$f(x)=x^3+6x^2-11x+7$이라 하면

$f'(x)=3x^2+12x-11$ 이므로 $f'(1)=4$

접선의 방정식은 $y-3=4(x-1)$

$y=4x-1$

$\therefore m-n=4-(-1)=5$

8. [출제의도] 함수의 연속성 추론하기

ㄱ. $\lim_{x\to1-0}f(x)=1$, $\lim_{x\to1-0}g(x)=2$이므로

$\lim_{x\to1-0}f(x)g(x)=2$ (참)

ㄴ. $f(3)g(3)=1\times2=2$,

$\lim_{x\to3-0}f(x)g(x)=3$, $\lim_{x\to3+0}f(x)g(x)=3$에서

$\lim_{x\to3}f(x)g(x)=3$

$\lim_{x\to3}f(x)g(x)\neq f(3)g(3)$ (거짓)

ㄷ. $\lim_{x\to1+0}f(x)g(x)=4$

ㄱ에 의하여 $\lim_{x\to1-0}f(x)g(x)=2$

$\lim_{x\to1-0}f(x)g(x)\neq\lim_{x\to1+0}f(x)g(x)$이므로

함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 극한값이 존재하지 않으므로 불연속이다.

ㄴ에 의해 $x=3$에서도 불연속이므로

함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$, $x=3$에서 불연속이다. (거짓)

9. [출제의도] 무한급수와 정적분의 관계 이해하기

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{6}{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)=6\int_1^2 f(x)dx=14$$

10. [출제의도] 무한급수와 나머지 정리를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$f(x)=a_nx^2+a_nx+2$ 라고 하면 $f(x)$를 $x-n$으로 나눈 나머지는

$f(n)=a_nn^2+a_nn+2=20$

$$a_n=\frac{18}{n(n+1)}=18\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}18\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=18\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=18$$

11. [출제의도] 도함수를 이용하여 속도와 위치 관계 이해하기

시각 t에서의 점 P의 속도는

$P'(t)=3t^2-18t+34$ 이므로,

$3t^2-18t+34=10$

$t^2-6t+8=(t-2)(t-4)=0$

$t=2$ 또는 $t=4$

$\therefore t=2$ 일 때 위치는 $P(2)=40$

12. [출제의도] 정적분 이해하기

$\int_0^1 tf(t)dt=k$라 하면, $f(x)=x^2-2x+k$

$\int_0^1 t(t^2-2t+k)dt=k$를 계산하면

$k=-\frac{5}{6}$

$f(x)=x^2-2x-\frac{5}{6}$

$\therefore f(3)=\frac{13}{6}$

13. [출제의도] 등차수열과 조합을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

1위 팀의 승리한 경기 수를 x라 하면

총 경기 수가 ${}_5\mathrm{C}_2\times9$ 이므로

${}_5\mathrm{C}_2\times9=\frac{5(x+10)}{2}$

$\therefore x=26$

14. [출제의도] 중복 조합을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

총 경기 수는 ${}_5\mathrm{C}_2\times9=90$,

주어진 두 팀(A와 B)가 승리할 것으로 예상되는 경기 수의 합은 60이고 나머지 3개의 팀의 승리할 것으로 예상되는 경기 수의 합은 30이므로 $x+y+z=30$

x, y, z가 모두 5이상 이므로

$x=x'+5$, $y=y'+5$, $z=z'+5$라 하면

$x'+y'+z'=15\,(x'\geq0, y'\geq0, z'\geq0)$

$\therefore {}_{3+15-1}\mathrm{C}_{15}={}_{17}\mathrm{C}_{15}={}_{17}\mathrm{C}_2=136$

15. [출제의도] 수학적 귀납법을 이용하여 증명과정 추론하기

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n}\leq\frac{1}{\sqrt{3n+1}}\cdots(\bigstar)$$

(i) $n=1$일 때

$\frac{1}{2}\leq\frac{1}{\sqrt{4}}$ 이므로 ($\bigstar$)이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 ($\bigstar$)이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{2k-1}{2k}\times\frac{2k+1}{2k+2}$$
$$\leq\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}=\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{1}{1+\boxed{\frac{1}{2k+1}}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(1+\boxed{\frac{1}{2k+1}}\right)^2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3k+1+2(3k+1)\cdot\left(\boxed{\frac{1}{2k+1}}\right)+(3k+1)\cdot\left(\boxed{\frac{1}{2k+1}}\right)^2}}$$
$$<\frac{1}{\sqrt{3k+1+2(3k+1)\cdot\left(\boxed{\frac{1}{2k+1}}\right)+\left(\boxed{2k+1}\right)\cdot\left(\boxed{\frac{1}{2k+1}}\right)^2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3(k+1)+1}}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 ($\bigstar$)이 성립한다.

그러므로 (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ($\bigstar$)이 성립한다.

$f(k)=\frac{1}{2k+1}$, $g(k)=2k+1$

$\therefore f(4)\times g(13)=\frac{1}{9}\cdot27=3$

16. [출제의도] 수열의 규칙성 추론하기

$\{a_n\}$: 0, 1, 3, 7, $\cdots$ 이므로

$a_{n+1}=a_n+2^{n-1}$

$a_n=0+\sum_{k=1}^{n-1}2^{k-1}=2^{n-1}-1\ (n\geq2)$

$$\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}(2^{n-1}-1)=\frac{2^{10}-1}{2-1}-10=1013$$

(별해) $a_n=(2^n-1)-2^{n-1}=2^{n-1}-1$

$$\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}(2^{n-1}-1)=\frac{2^{10}-1}{2-1}-10=1013$$

17. [출제의도] 정적분의 성질 이해하기

$f'(x)=3x^2-4x-4$이므로

$f(x)=x^3-2x^2-4x+C$

$f(2)=0$ 이므로

$f(2)=-8+C=0\ \therefore C=8$

$f(x)=(x+2)(x-2)^2$이므로

구하는 도형의 넓이는

$$\int_{-2}^{2}(x^3-2x^2-4x+8)dx=\frac{64}{3}$$

18. [출제의도] 행렬의 성질 추론하기

$B=\frac{1}{2}(A-E)$이므로

ㄱ. $AB=\frac{1}{2}A(A-E)=\frac{1}{2}A^2-\frac{1}{2}A$

$BA = \frac{1}{2}(A-E)A = \frac{1}{2}A^2 - \frac{1}{2}A$

$\therefore AB = BA$ (참)

ㄴ. $A^2 - 2A = E$ 이므로

$A^2 - 2A + E = (A-E)^2 = 2E$

$\frac{1}{2}(A-E)(A-E) = B(A-E) = E$

$\therefore B^{-1} = A - E$ (참)

ㄷ. $A^{-1} = A - 2E$ 이므로

$B(A - A^{-1})B^{-1} = B(2E)B^{-1} = 2E$ (참)

19. [출제의도] 조건부 확률을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

임의로 선택한 상자에서 공을 하나 꺼낼 때, 상자 A에서 공을 꺼낼 사건을 X, 상자 B에서 공을 꺼낼 사건을 Y, 꺼낸 공이 검은 공일 사건을 Z라 하면, 구하는 값은

$$\mathrm{P}(Y|Z) = \frac{\mathrm{P}(Y\cap Z)}{\mathrm{P}(Z)}$$

$$= \frac{\mathrm{P}(Y\cap Z)}{\mathrm{P}(X\cap Z)+\mathrm{P}(Y\cap Z)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\times\frac{2}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{6}} = \frac{2}{5}$$

20. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

$b = \left(\frac{1+0.32}{\log_2 l^3}\right)\times R$ …… ㉠

$4b = \left(\frac{1+k}{\log_2 l}\right)\times R$ …… ㉡

㉠과 ㉡에 의하여

$4 = \frac{3(1+k)}{1.32}$ $\therefore k = 0.76$

21. [출제의도] 부정적분을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$f(x) = x(x-\alpha)^2$이고,

$g'(x) = (xf(x))'$이므로

$g(x) = xf(x) + C$

$g(x) = x^2(x-\alpha)^2 + C$

$g'(x) = 2x(x-\alpha)^2 + 2x^2(x-\alpha)$

$\quad = 2x(x-\alpha)(2x-\alpha)$

$y = g(x)$는 $x=0$, $x=\alpha$에서 극솟값,

$x = \frac{\alpha}{2}$에서 극댓값을 갖는다.

$g\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 81$, $g(0) = g(\alpha) = 0$

이를 이용하여 α와 $g(x)$를 구하면

$\alpha = 6$, $g(x) = x^2(x-6)^2$

$\therefore g\left(\frac{\alpha}{3}\right) = g(2) = 64$

(별해) 함수 $f(x)$를 구하면

$f(x) = x(x-\alpha)^2$이므로,

$f'(x) = (x-\alpha)^2 + 2x(x-\alpha)$

$g'(x) = f(x) + xf'(x)$이므로

$g'(x) = 4x^3 - 6\alpha x^2 + 2\alpha^2 x$

$\quad = 2x(x-\alpha)(2x-\alpha)$

$y = g(x)$는 $x=0$, $x=\alpha$에서 극솟값,

$x = \frac{\alpha}{2}$에서 극댓값을 갖는다.

$g\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 81$, $g(0) = g(\alpha) = 0$

이를 이용하여 α와 $g(x)$를 구하면

$\alpha = 6$, $g(x) = x^2(x-6)^2$

$\therefore g\left(\frac{\alpha}{3}\right) = g(2) = 64$

22. [출제의도] 함수의 극한 계산하기

$$\lim_{x\to2}\frac{6x^2-24}{x^2-2x} = \lim_{x\to2}\frac{6(x+2)(x-2)}{x(x-2)} = \lim_{x\to2}\frac{6(x+2)}{x} = 12$$

23. [출제의도] 그래프와 행렬의 성질 이해하기

그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬의 모든 성분의 합은 그래프에서 변의 개수의 2배이므로 행렬의 모든 성분의 합은 14

24. [출제의도] 함수의 미분가능성 이해하기

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하면 연속이므로

$-4+2a+2 = 4+b$ $\therefore b = 2a-6$

$f'(x) = \begin{cases} -2x+a & (x>2) \\ 2 & (x<2) \end{cases}$ 이고

$f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하므로 $-4+a=2$

따라서 $a=6$, $b=6$

$\therefore ab = 36$

25. [출제의도] 이항계수의 성질 이해하기

$(x-2)^6$의 전개식의 일반항

${}_6\mathrm{C}_r\, x^{6-r}(-2)^r$에서

x^4의 계수는 $r=2$인 경우이므로

${}_6\mathrm{C}_2(-2)^2 = 60$

26. [출제의도] 수열의 성질 이해하기

$x^{\frac{1}{\alpha}} = y^{-\frac{1}{\beta}} = z^{\frac{2}{\gamma}} = k$라고 하면,

$x = k^\alpha$, $y^{-1} = k^\beta$, $z^2 = k^\gamma$ 이고

α, β, γ가 등차수열이면

k^α, k^β, k^γ가 등비수열이므로

$(k^\beta)^2 = k^\alpha k^\gamma$

$\therefore$ $(y^{-1})^2 = xz^2$

$\frac{1}{y^2} = xz^2$

$\therefore$ $16xz^2 + 9y^2 = \frac{16}{y^2} + 9y^2$

$\quad \ge 2\sqrt{\frac{16}{y^2}\cdot 9y^2} = 24$

(단, 등호는 $y = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $xz^2 = \frac{3}{4}$일 때 성립한다.)

$\therefore 16xz^2 + 9y^2$의 최솟값은 24

27. [출제의도] 수열의 성질을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

$a_1 = 22$

$a_{n+1} = a_n + 2(n+2) + 4(n+2)^2 - 4(n+1)^2$

$a_{n+1} = a_n + 10n + 16$

$a_n = 22 + \sum_{k=1}^{n-1}(10k+16) = 5n^2 + 11n + 6$ $(n \ge 2)$

$\therefore a_{10} = 616$

(별해) 도형 T_n에서

위와 아래에서 바라본 넓이는 각각

$1+2+\cdots+n+(n+1)$,

정면과 뒷면에서 바라본 넓이는 각각

$2(n+1)^2$ 이므로

$a_n = 2\{1+2+\cdots+(n+1)\} + 4(n+1)^2$

$\quad = (n+1)(n+2) + 4(n+1)^2$

$\quad = 5n^2 + 11n + 6$

$\therefore a_{10} = 616$

28. [출제의도] 함수의 연속성 이해하기

함수 $f(x)g(x)$가 모든 실수에서 연속이 되기 위해서는 $x=2$에서 연속이 되어야 하므로

$\lim_{x\to2}f(x)g(x) = f(2)g(2)$를 만족하여야 한다.

$\lim_{x\to2}f(x)g(x) = \lim_{x\to2}\frac{2g(x)}{x-2} = f(2)g(2)$이므로

$g(2) = 0$

$g(x) = a(x-2)(x-\alpha)$라고 하면,

$\lim_{x\to2}f(x)g(x) = \lim_{x\to2}2a(x-\alpha) = f(2)g(2) = 0$

$\therefore \alpha = 2$

$g(x) = a(x-2)^2$ 이고 $g(0) = 8$

$\therefore a = 2$

$g(x) = 2(x-2)^2$

$\therefore$ $g(6) = 2(6-2)^2 = 32$

29. [출제의도] 상용로그의 성질 이해하기

$\log x$의 지표를 n이라 하면

$\log 10x = 1 + \log x$이므로

$\log 2x$, $\log 4x$, $\log 6x$, $\log 8x$, $\log 10x$의 지표는 각각 n 또는 $n+1$

지표가 $n+1$인 것이 m개라고 하면

$(5-m)n + m(n+1) = 5n + m = 12$,

$\therefore n = 2, m = 2$

$2 \le \log 6x < 3$, $3 \le \log 8x < 4$이므로

$100 \le 6x < 1000$, $1000 \le 8x < 10000$

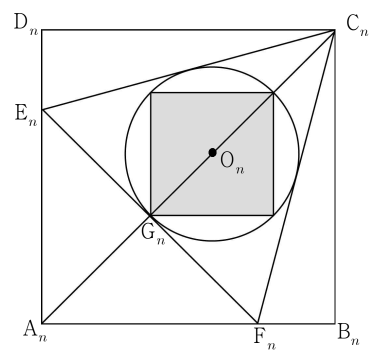
$\frac{1000}{8} \le x < \frac{1000}{6}$

이를 만족하는 자연수 x의 개수는

$166 - 125 + 1 = 42$

30. [출제의도] 무한급수를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

그림과 같이 정사각형 R_n의 꼭짓점을 각각 A_n, B_n, C_n, D_n이라 하고, 문제의 조건에 따라 그린 정삼각형의 꼭짓점을 각각 C_n, E_n, F_n이라 하자.



정사각형 R_n의 한 변의 길이를 a_n, 정삼각형 $\mathrm{C}_n\mathrm{E}_n\mathrm{F}_n$의 한 변의 길이를 b_n이라 하자.

$\overline{\mathrm{C}_n\mathrm{G}_n} + \overline{\mathrm{G}_n\mathrm{A}_n} = \sqrt{2}\,a_n$

$\frac{\sqrt{3}}{2}b_n + \frac{1}{2}b_n = \sqrt{2}\,a_n$

$b_n = (\sqrt{6} - \sqrt{2})a_n$

원 O_n의 반지름의 길이 r_n은

$r_n = \frac{\sqrt{3}}{2}b_n \times \frac{1}{3}$

정사각형 R_{n+1}의 한 변의 길이는 $\sqrt{2}\,r_n$이므로

$a_{n+1} = \sqrt{2}\,r_n = \frac{\sqrt{6}}{6}b_n = \frac{\sqrt{6}}{6}(\sqrt{6}-\sqrt{2})\,a_n$

$\therefore a_{n+1} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}a_n$

수열$\{S_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{4-2\sqrt{3}}{3}$인 등비수열이다.

$\therefore$ $\sum_{n=1}^{\infty}S_n = \frac{1}{1-\frac{4-2\sqrt{3}}{3}} = \frac{3+6\sqrt{3}}{11}$

$\therefore a+b = 9$