제 2 교시

수학 영역 (A형)

5지 선다형

1. $\log_2 \frac{4}{3} + \log_2 6$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $2A + B$의 모든 성분의 합은? [2점]

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

3. $\lim_{n \to \infty} \frac{2n^2+5}{n^2+2}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A) = \frac{3}{4}$, $\mathrm{P}(A \cap B^C) = \frac{2}{3}$일 때, $\mathrm{P}(A \cap B)$의 값은? (단, B^C는 B의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

5. $\int_{-1}^{1}(3x^2+6x+7)dx$ 의 값은? [3점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

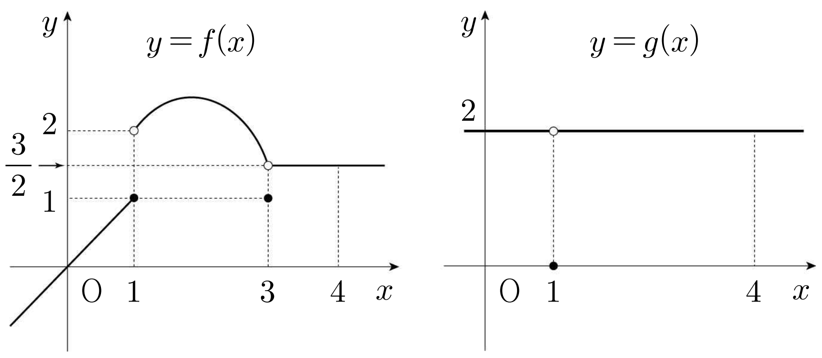
6. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n+1}=3$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)a_n}{3n^2}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

7. 곡선 $y=x^3+6x^2-11x+7$ 위의 점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 방정식을 $y=mx+n$이라 할 때, 상수 $m,\ n$에 대하여 $m-n$의 값은? [3점]

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

8. 그림은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프이다. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]



<보 기>

ㄱ. $\lim_{x\to 1-0} f(x)g(x)=2$

ㄴ. 함수 $f(x)g(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

ㄷ. 닫힌 구간 $[0, 4]$에서 함수 $f(x)g(x)$의 불연속인 점은 오직 한 개 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

9. 함수 $f(x)=x^2$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{6}{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)$의 값은? [3점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

10. 모든 자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$은 다음 두 조건을 만족시킨다. 이때 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값은? [3점]

(가) $a_n \neq 0$
(나) x에 대한 다항식 $a_n x^2 + a_n x + 2$를 $x-n$으로 나눈 나머지가 20이다.

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

11. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치는 $P(t)=t^3-9t^2+34t$이다. 점 P의 속도가 처음으로 10 이 되는 순간 점 P의 위치는? [3점]

① 38 ② 40 ③ 42 ④ 44 ⑤ 46

12. 함수 $f(x)$가 $f(x)=x^2-2x+\int_0^1 tf(t)dt$를 만족시킬 때, $f(3)$의 값은? [3점]

① $\frac{13}{6}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{17}{6}$ ④ $\frac{19}{6}$ ⑤ $\frac{7}{2}$

[13～14] 어느 지역의 5개 야구팀 A, B, C, D, E는 매년 각 팀이 서로 다른 팀들과 각각 9번씩 경기를 하여 승리한 경기 수가 많은 순서로 순위를 결정하는 대회를 한다. 13번과 14번의 두 물음에 답하시오. (단, 모든 경기에서 무승부는 없다고 한다.)

13. 2012년 대회의 최종결과에서는 1위부터 5위 팀까지의 승리한 경기 수가 등차수열을 이루었다. 5위 팀이 승리한 경기 수가 10일 때, 1위 팀이 승리한 경기 수는? [3점]

① 24 ② 26 ③ 28 ④ 30 ⑤ 32

14. 어느 야구전문가는 각 팀의 전력을 분석하여 내년 대회의 최종결과 중 우선 A, B 두 팀이 승리할 것으로 예상되는 경기 수를 발표하였다. 그 발표를 바탕으로 나머지 세 팀의 결과를 예상하여 최종결과를 다음과 같이 표로 완성할 때, 만들 수 있는 서로 다른 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는? (단, x, y, z는 모두 5이상의 자연수이다.) [4점]

팀 명	A	B	C	D	E
승리할 것으로 예상되는 경기 수	27	33	x	y	z

① 124 ② 130 ③ 136 ④ 142 ⑤ 148

15. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n}\le\frac{1}{\sqrt{3n+1}}\quad\cdots\cdots\ (\bigstar)$$

이 성립함을 증명하는 과정이다.

<증명>

(i) $n=1$일 때

$\frac{1}{2}\le\frac{1}{\sqrt{4}}$이므로 $(\bigstar)$이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 $(\bigstar)$이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{2k-1}{2k}\times\frac{2k+1}{2k+2}$$

$$\le\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}=\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{1}{1+\boxed{(\text{가})}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(1+\boxed{(\text{가})}\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3k+1+2(3k+1)\cdot\left(\boxed{(\text{가})}\right)+(3k+1)\cdot\left(\boxed{(\text{가})}\right)^2}}$$

$$<\frac{1}{\sqrt{3k+1+2(3k+1)\cdot\left(\boxed{(\text{가})}\right)+\left(\boxed{(\text{나})}\right)\cdot\left(\boxed{(\text{가})}\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3(k+1)+1}}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 $(\bigstar)$이 성립한다.

그러므로 (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(\bigstar)$이 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $f(4)\times g(13)$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

16. 다음과 같이 제n행에 첫째항이 $\frac{1}{2^n}$이고 공차가 $\frac{1}{2^n}$인 등차수열의 항을 첫째항부터 차례로 (2^n-1)개 나열한다.

제1행	$\frac{1}{2}$
제2행	$\frac{1}{2^2},\ \frac{2}{2^2},\ \frac{3}{2^2}$
제3행	$\frac{1}{2^3},\ \frac{2}{2^3},\ \frac{3}{2^3},\ \frac{4}{2^3},\ \frac{5}{2^3},\ \frac{6}{2^3},\ \frac{7}{2^3}$
⋮	⋮
제n행	$\frac{1}{2^n},\ \frac{2}{2^n},\ \frac{3}{2^n},\ \frac{4}{2^n},\ \cdots,\ \frac{2^n-2}{2^n},\ \frac{2^n-1}{2^n}$

위와 같이 나열할 때, 제n행에서 $\frac{1}{2}$보다 큰 수의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{10}a_n$의 값은? [4점]

① 1003 ② 1008 ③ 1013
④ 1018 ⑤ 1023

17. 삼차함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(x)=3x^2-4x-4$ (나) 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $(2,\ 0)$을 지난다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는? [4점]

① $\frac{56}{3}$　② $\frac{58}{3}$　③ 20　④ $\frac{62}{3}$　⑤ $\frac{64}{3}$

18. 두 이차정사각행렬 $A,\ B$에 대하여

$$A-2B=E,\ A^2=2A+E$$

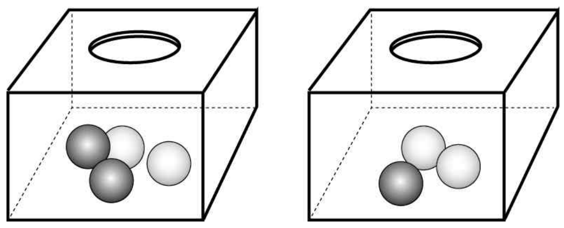
일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $AB=BA$
ㄴ. $B^{-1}=A-E$
ㄷ. $B(A-A^{-1})B^{-1}=2E$

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. 크기와 모양이 같은 공이 상자 A에는 검은 공 2개와 흰 공 2개, 상자 B에는 검은 공 1개와 흰 공 2개가 들어 있다. 두 상자 A, B 중 임의로 선택한 하나의 상자에서 공을 1개 꺼냈더니 검은 공이 나왔을 때, 그 상자에 남은 공이 모두 흰 공일 확률은? [4점]



① $\frac{3}{10}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{7}{10}$

20. 컴퓨터 통신이론에서 디지털 신호를 아날로그 신호로 바꾸는 통신장치의 성능을 평가할 때, 전송대역폭은 중요한 역할을 한다. 서로 다른 신호요소의 개수를 L, 필터링과 관련된 변수를 r, 데이터 전송률을 R(bps), 신호의 전송대역폭을 B(Hz)라고 할 때, 다음의 식이 성립한다고 한다.

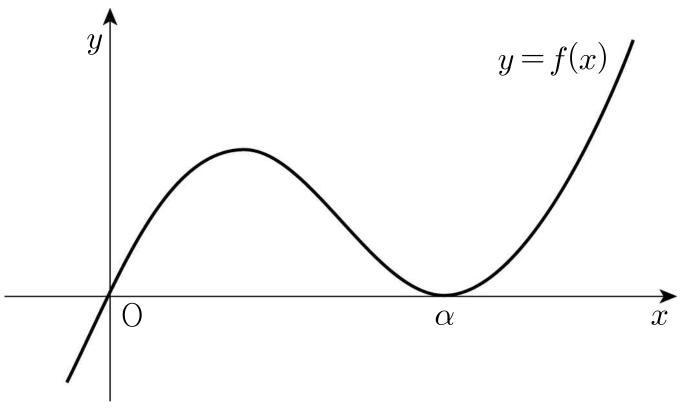
$$B=\left(\frac{1+r}{\log_2 L}\right)\times R$$

데이터 전송률이 같은 두 통신장치 P, Q의 서로 다른 신호요소의 개수, 필터링과 관련된 변수, 신호의 전송대역폭이 다음과 같을 때, k의 값은? [4점]

	서로 다른 신호요소의 개수	필터링과 관련된 변수	신호의 전송대역폭
P	l^3	0.32	b
Q	l	k	$4b$

① 0.74 ② 0.75 ③ 0.76 ④ 0.77 ⑤ 0.78

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $f(0)=0$, $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)=0$이고 함수 $g(x)$가 다음 두 조건을 만족시킬 때, $g\left(\frac{\alpha}{3}\right)$의 값은? (단, α는 양수이다.) [4점]



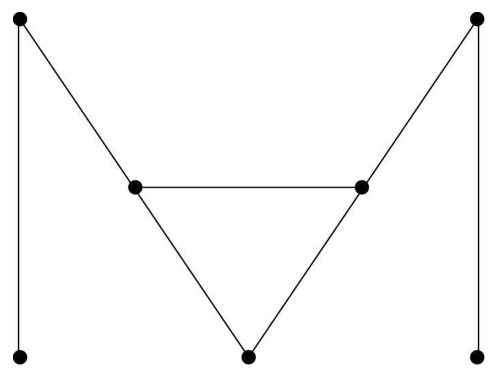
(가) $g'(x)=f(x)+xf'(x)$
(나) $g(x)$의 극댓값이 81이고 극솟값이 0이다.

① 56 ② 58 ③ 60 ④ 62 ⑤ 64

단답형

22. $\lim_{x\to 2}\frac{6x^2-24}{x^2-2x}$의 값을 구하시오. [3점]

23. 다음 그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬의 모든 성분의 합을 구하시오. [3점]



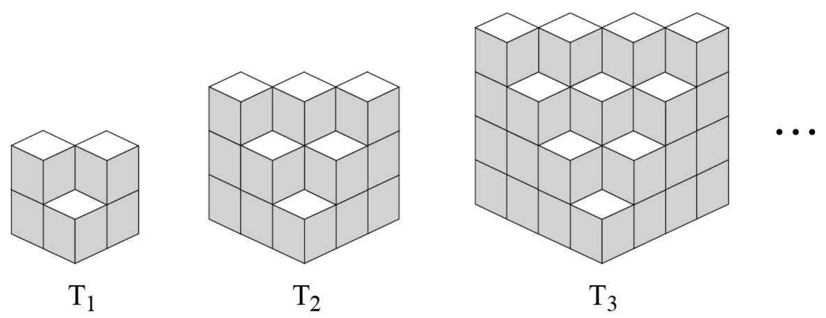
24. 함수 $f(x)=\begin{cases}-x^2+ax+2 & (x \geq 2)\\ 2x+b & (x<2)\end{cases}$가 $x=2$에서 미분가능할 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오. [3점]

25. $(x-2)^6$의 전개식에서 x^4의 계수를 구하시오. [3점]

26. 0이 아닌 세 실수 α, β, γ가 이 순서대로 등차수열을 이룬다. $x^{\frac{1}{\alpha}}=y^{-\frac{1}{\beta}}=z^{\frac{2}{\gamma}}$일 때, $16xz^2+9y^2$의 최솟값을 구하시오. (단, x, y, z는 1이 아닌 양수이다.) [4점]

27. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정육면체 모양의 블록 5개를 사용하여 입체도형 T_1을 만들고, T_1의 겉넓이를 a_1이라 하자. 입체도형 T_1에 9개의 블록을 더 쌓아서 입체도형 T_2를 만들고, T_2의 겉넓이를 a_2라 하자. 입체도형 T_2에 16개의 블록을 더 쌓아서 입체도형 T_3을 만들고, T_3의 겉넓이를 a_3이라 하자.

이와 같은 방법으로 n번째 얻은 입체도형 T_n에 $(n+2)^2$개의 블록을 더 쌓아서 도형 T_{n+1}을 만들고, T_{n+1}의 겉넓이를 a_{n+1}이라 하자. 예를 들어 $a_1=22$, $a_2=48$이다. 이때 a_{10}의 값을 구하시오. [4점]



28. 함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x-2} & (x \neq 2) \\ 1 & (x=2) \end{cases}$와 이차함수 $g(x)$가 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) $g(0)=8$ (나) 함수 $f(x)g(x)$는 모든 실수에서 연속이다.

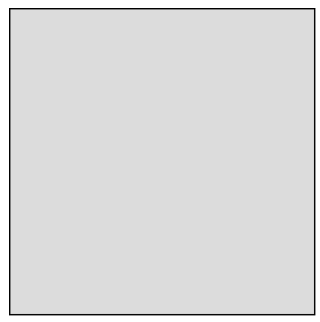
이때 $g(6)$의 값을 구하시오. [4점]

29. 상용로그 $\log 2x$, $\log 4x$, $\log 6x$, $\log 8x$, $\log 10x$의 지표의 합이 12가 되도록 하는 모든 자연수 x의 개수를 구하시오. [4점]

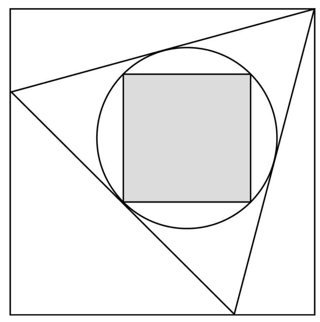
30. 한 변의 길이가 1인 정사각형을 R_1이라 하자. 그림과 같이 R_1의 한 꼭짓점과 정사각형 R_1의 변 위의 두 점을 세 꼭짓점으로 하는 정삼각형 하나를 그리고 이 정삼각형에 내접하는 원을 그린 후, 이 원에 내접하는 하나의 정사각형을 R_2라 하자.

정사각형 R_2의 한 꼭짓점과 정사각형 R_2의 변 위의 두 점을 세 꼭짓점으로 하는 정삼각형 하나를 그리고 이 정삼각형에 내접하는 원을 그린 후, 이 원에 내접하는 하나의 정사각형을 R_3이라 하자.

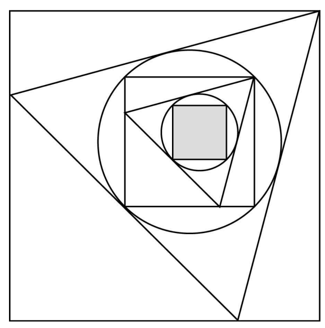
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 정사각형을 R_n이라 하자. 정사각형 R_n의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{a+b\sqrt{3}}{11}$이다. 이때 $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 자연수이다.) [4점]



R_1



R_2



R_3

⋯

※ 확인 사항
답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.