2014학년도 대수능 6월 모의평가 수학영역 A형 정답 및 해설

1.
출제의도 : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

$4^{\frac{1}{2}} \times 27^{\frac{1}{3}}$

$= (2^2)^{\frac{1}{2}} \times (3^3)^{\frac{1}{3}}$

$= 2 \times 3 = 6$

<답> ③

2.
출제의도 : 행렬의 연산을 할 수 있는가?

$2A - B = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

이므로 모든 성분의 합은 9이다.

<답> ④

3.
출제의도 : 극한값을 구할 수 있는가?

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5 \times 7^{n+1} + 3}{7^n}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \left\{ 5 \times 7 + 3\left(\dfrac{1}{7}\right)^n \right\}$

$= 5 \times 7 + 3 \times 0 = 35$

<답> ⑤

4.
출제의도 : 그래프와 행렬의 관계를 이해하는가?

행의 모든 성분의 합은 행에 해당하는 꼭짓점에 연결된 변의 개수이다.
그러므로 변의 개수가 3개인 꼭짓점은 2개이다.

<답> ②

5.
출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 로그값을 구할 수 있는가?

$\log_5(6 - \sqrt{11}) + \log_5(6 + \sqrt{11})$

$= \log_5(6 - \sqrt{11})(6 + \sqrt{11})$

$= \log_5\{6^2 - (\sqrt{11})^2\}$

$= \log_5(36 - 11)$

$= \log_5 25$

$= \log_5 5^2$

$= 2\log_5 5 = 2$

<답> ②

6.
출제의도 : 미분계수를 구할 수 있는가?

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+3h) - f(1)}{2h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \left\{ \dfrac{f(1+3h) - f(1)}{3h} \times \dfrac{3}{2} \right\}$

$= \dfrac{3}{2} f'(1)$

이때, $f'(x) = 3x^2 - 1$이므로

$\dfrac{3}{2} f'(1) = \dfrac{3}{2} \times 2 = 3$

<답> ③

7.

출제의도 : 등비중항을 이용하여 항의 값을 구할 수 있는가?

a_1, a_5, a_9는 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a_1a_9 = a_5^2 = 4$

a_2, a_5, a_8은 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a_5^2 = a_2a_8 = 4$

a_4, a_5, a_6은 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a_5^2 = a_4a_6$

$\therefore\ a_2a_8 + a_4a_6 = 4+4 = 8$

<답> ①

8.

출제의도 : 연립일차방정식을 행렬을 이용하여 풀 수 있는가?

$x=0$, $y=0$이외의 해를 가져야 하므로 행렬 $\begin{pmatrix} t & -2 \\ 3 & t-7 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않는다. 즉,

$t(t-7)-3\cdot(-2)=0$

$t^2-7t+6=0$

$(t-1)(t-6)=0$

$\therefore\ t=1$ 또는 $t=6$

따라서, 모든 실수 t의 값의 합은

$1+6=7$

<답> ④

9.

출제의도 : 함수의 극한의 성질을 이용하여 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-3}{x-2}=5$ 에서

$x\to2$일 때 (분모)$\to0$ 이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to2}\{f(x)-3\}=0$ 에서 $\lim\limits_{x\to2}f(x)=3$

$$\therefore\ \lim_{x\to2}\frac{x-2}{\{f(x)\}^2-9}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\{f(x)-3)\}\{f(x)+3\}}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{1}{\dfrac{f(x)-3}{x-2}\times\{f(x)+3\}}$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-3}{x-2}}\times\frac{1}{\lim\limits_{x\to2}\{f(x)+3\}}$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-3}{x-2}}\times\frac{1}{\lim\limits_{x\to2}f(x)+3}$$

$$=\frac{1}{5}\times\frac{1}{3+3}$$

$$=\frac{1}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{30}$$

<답> ⑤

10.

출제의도 : 함수의 연속성을 이해하고 있는가?

$x>1$일 때, $x^n>1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{n+1}+3x^n}{x^n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2x+3}{1+\dfrac{1}{x^n}}$$

$$=2x+3$$

그러므로

$$f(x)=\begin{cases} x+a & (x\le 1) \\ 2x+3 & (x>1) \end{cases}$$

따라서 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1+0} f(x)=f(1)$$

$$\lim_{x\to 1-0}(x+a)=\lim_{x\to 1+0}(2x+3)=1+a$$

$$1+a=5=1+a$$

$$\therefore\ a=4$$

<답> ②

11.

출제의도 : 함수의 그래프를 이해하여 극한값과 함수의 연속성을 판단할 수 있는가?

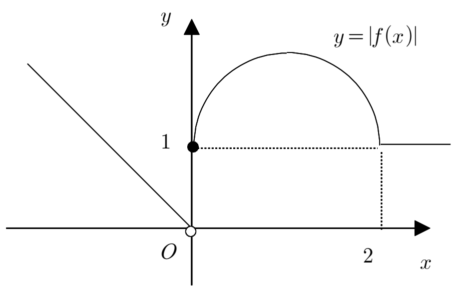
ㄱ. $x\to +0$일 때 $f(x)\to 1$ 이므로

$\lim_{x\to +0} f(x)=1$ (참)

ㄴ. $x\to 2-0$일 때 $f(x)\to 1$ 이므로

$\lim_{x\to 2-0} f(x)=1$ (거짓)

ㄷ. 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 다음과 같다.



$\therefore\ \lim_{x\to 2}|f(x)|=|f(2)|=1$

따라서, 함수 $|f(x)|$는 $x=2$에서 연속이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ 이다.

<답> ③

12.

출제의도 : 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 알고 있는가?

$n=1$일 때,

$a_1=S_1=-9$

$n\ge 2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$

$$=(n^2-10n)-\{(n-1)^2-10(n-1)\}$$

$$=2n-11$$

그러므로

$a_n=2n-11$

이때, $a_n<0$에서

$2n-11<0$

$$n<\frac{11}{2}=5.5$$

따라서, 자연수 n은 1, 2, 3, 4, 5로 5개이다.

<답> ①

13.

출제의도 : 함수의 그래프를 이해하여 주어진 함수가 연속이 될 조건을 구할 수 있는가?

(i) $g(0)=f(0)\{f(0)+k\}$

$=2(2+k)=2k+4$

(ii) $\lim_{x\to +0} g(x)$

$=\lim_{x\to +0} f(x)\{f(x)+k\}$

$=\lim_{x\to +0} f(x)\times \lim_{x\to +0}\{f(x)+k\}$

$=0\times k=0$

(iii) $\lim_{x\to -0} g(x)$

$= \lim_{x \to -0} f(x)\{f(x)+k\}$

$= \lim_{x \to -0} f(x) \times \lim_{x \to -0} \{f(x)+k\}$

$= 2 \times (2+k) = 2k+4$

(i), (ii), (iii)에 의하여 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이 되어야 하므로

$2k+4=0$

$\therefore\ k=-2$

<답> ①

14.

출제의도 : 합성함수를 이용하여 무한등비급수에 관련된 문제를 풀 수 있는가?

$a_1 = 1$

$a_2 = f(f(a_1)) = f(f(1)) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}+2$

$a_3 = f(f(a_2)) = f\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

$= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 2$

$\cdots$

$a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \cdots + 2$

$= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} 2\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

따라서,

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} 2\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right\}$

$= \dfrac{2}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{4}{3}$

<답> ④

15.

출제의도 : 지수법칙을 이용하여 식이 주어진 실생활 문제를 해결할 수 있는가?

A지역에서 지면으로부터 12m와 36m인 높이에서 풍속이 각각 2(m/초)와 8(m/초)이므로

$8 = 2 \times \left(\frac{36}{12}\right)^{\frac{2}{2-k}}$

$4 = 3^{\frac{2}{2-k}} \cdots$ ㉠

B지역에서 지면으로부터 10m와 90m인 높이에서 풍속이 각각 a(m/초)와 b(m/초)이므로

$b = a \times \left(\frac{90}{10}\right)^{\frac{2}{2-k}}$

$= a \times 9^{\frac{2}{2-k}}$

$= a \times (3^2)^{\frac{2}{2-k}}$

$= a \times \left(3^{\frac{2}{2-k}}\right)^2$

$= a \times 4^2 = 16a$ ($\because$ ㉠)

$\therefore\ \frac{b}{a} = 16$

<답> ③

16.

출제의도 : 좌표평면위의 점의 움직임을 수열을 이용하여 구할 수 있는가?

점 O를 P_0라 하면 선분 $P_{n-1}P_n$에 포함된 길이가 $\sqrt{2}$인 대각선의 개수는 n 개다.

그러므로 점 Q가 점 P_n까지 움직일 때, 대각선의 개수는

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

이때, 대각선의 개수가 55개이므로

$\dfrac{n(n+1)}{2}=55$

$\therefore\ n=10$

그러므로 점 Q는 점 P_{10}에 있다.

한편, 점 P_{2n}의 y좌표는 $-n$이므로 점 P_{10}의 y좌표는 -5이다.

<답> ①

17.

출제의도 : 두 개의 접선이 서로 평행할 조건을 이용하여 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

$f(x)=x^3-3x^2+x+1$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x+1$

이때, 점 A의 x좌표가 3이므로 점 B의 x좌표를 $k(k\neq 3)$라 하면 두 점 A, B에서의 접선이 서로 평행하므로

$f'(k)=f'(3)$

즉, $3k^2-6k+1=3\times 3^2-6\times 3+1$에서

$k^2-2k-3=0$

$(k-3)(k+1)=0$

$\therefore\ k=-1\ (\because k\neq 3)$

따라서, 점 B의 좌표는 $(-1,-4)$이므로 점 B에서의 접선의 방정식은

$y-(-4)=10\{x-(-1)\}$

$y=10x+6$

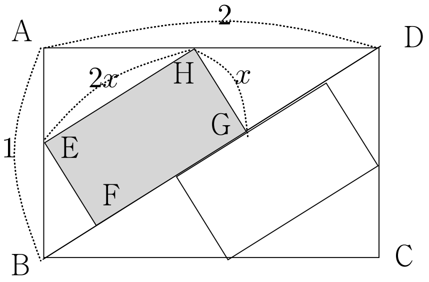
그러므로 y절편은 6이다.

<답> ②

18.

출제의도 : 도형의 넓이를 무한등비급수를 이용하여 구할 수 있는가?

아래 그림과 같이 R_1에서 사각형의 각 꼭짓점을 E, F, G, H라 하고 긴 변의 길이를 $2x$라 하자.



$\overline{BD}=\sqrt{5}$이므로 직각삼각형 ABD에서

$\cos\angle ADB=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\angle ADB=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

한편, 직각삼각형 HGD에서

$\sin\angle ADB=\dfrac{\overline{HG}}{\overline{HD}}$

$\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{x}{\overline{HD}}$

$\therefore\ \overline{HD}=\sqrt{5}\,x \quad \cdots ㉠$

또, 직각삼각형 AEH에서

$\cos\angle AHE=\dfrac{\overline{AH}}{\overline{EH}}$

이때, $\angle AHE=\angle ADB$이므로

$\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{\overline{AH}}{2x}$

$\therefore\ \overline{AH}=\dfrac{4}{\sqrt{5}}x \quad \cdots ㉡$

㉠과 ㉡에서

$\overline{AD}=\overline{AH}+\overline{HD}$

$2=\sqrt{5}\,x+\dfrac{4}{\sqrt{5}}x$

$2=\frac{9}{\sqrt{5}}x$

$\therefore\ x=\frac{2\sqrt{5}}{9}$

그러므로 R_1의 색칠된 사각형의 넓이는

$x \cdot 2x=2x^2=\frac{40}{81}$

또, 사각형 ABCD와 사각형 EFGH의 길이의 비는 $1:x$ 즉, $1:\frac{2\sqrt{5}}{9}$이므로

넓이의 비는 $1:\frac{20}{81}$이다.

마찬가지로 색칠된 사각형의 넓이의 비는 같으므로 구하는 극한값은

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{40}{81}}{1-\frac{20}{81}}=\frac{40}{61}$$

<답> ④

19.

출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열의 일반항을 구할 수 있는가?

$b_n=\frac{n-1}{n}a_n$이므로

$b_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_{n+1}$

따라서,

$a_{n+1}=\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}a_n+\frac{n+1}{n}2^n$에서

$\frac{n}{n+1}a_{n+1}=\frac{n-1}{n}a_n+2^n$

이므로

$b_{n+1}=b_n+\boxed{2^n}$

이때, $b_{n+1}-b_n=2^n$ 이므로

$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k$

$=0+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^n-2\ (n\geq 2)\cdots$㉠

그런데, ㉠에 $n=1$을 대입하면 $b_1=0$ 이므로

$b_n=\boxed{2^n-2}\ (n\geq 1)$

그러므로

$$a=\begin{cases} 2 & (n=1) \\ \frac{n}{n-1}\times\left(\boxed{2^n-2}\right) & (n\geq 2)\end{cases}$$

따라서 $f(n)=2^n$, $g(n)=2^n-2$ 이므로

$f(5)+g(10)$

$=2^5+(2^{10}-2)$

$=32+1022=1054$

<답> ⑤

20.

출제의도 : 함수의 그래프에 관련된 문제를 지수방정식과 로그 부등식을 이용하여 풀 수 있는가?

점 $\mathrm{A}(a,\ 2^a)$와 점 B의 y좌표가 같으므로

$15\cdot 2^{-x}=2^a$

양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 15+(-x)=a$

$\therefore\ x=\log_2 15-a$

그러므로

$\overline{\mathrm{AB}}=a-(\log_2 15-a)$

$=2a-\log_2 15$

$1<\overline{\mathrm{AB}}<100$에서

$1<2a-\log_2 15<100$

$1+\log_2 15<2a<100+\log_2 15$

한편 $\log_2 2^3<\log_2 15<\log_2 2^4$이므로

$4.\times\times\times < 2a < 103.\times\times\times$

따라서, 자연수 a는 3이상 51이하이므로 구하는 개수는 49개다.

<답> ④

21.

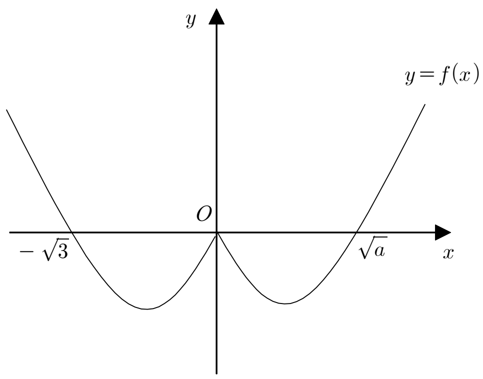
출제의도 : 극댓값을 가질 조건을 이용하여 함수를 정하고 함숫값을 구할 수 있는가?

$$f(x)=\begin{cases} a(3x-x^3) & (x<0) \\ x^3-ax & (x\geq 0) \end{cases}$$ 에서

(i) $a>0$ 인 경우

$$f(x)=\begin{cases} a(3x-x^3) & (x<0) \\ x^3-ax & (x\geq 0) \end{cases}$$
$$=\begin{cases} ax(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x) & (x<0) \\ x(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a}) & (x\geq 0) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

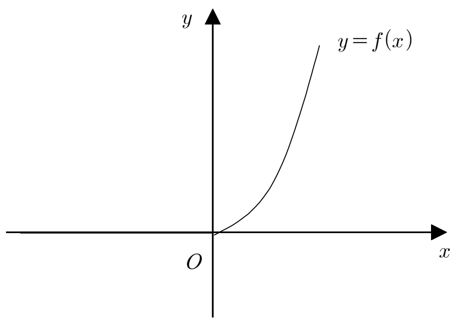


따라서, 함수 $f(x)$의 극댓값은 $x=0$에서 존재하지만 극댓값은 5가 아니다.

(ii) $a=0$ 인 경우

$$f(x)=\begin{cases} a(3x-x^3) & (x<0) \\ x^3-ax & (x\geq 0) \end{cases}$$
$$=\begin{cases} 0 & (x<0) \\ x^3 & (x\geq 0) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

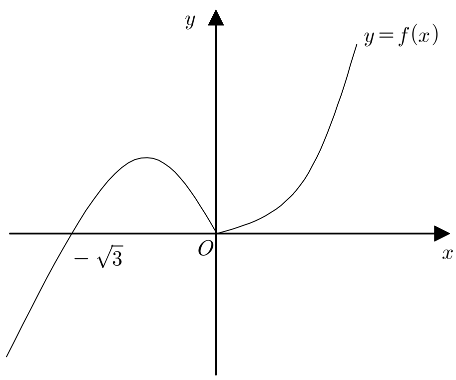


따라서, 함수 $f(x)$의 극댓값은 존재하지 않는다.

(iii) $a<0$ 인 경우

$$f(x)=\begin{cases} a(3x-x^3) & (x<0) \\ x^3-ax & (x\geq 0) \end{cases}$$
$$=\begin{cases} -ax(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) & (x<0) \\ x(x^2-a) & (x\geq 0) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



따라서, $x<0$에서 함수 $f(x)$의 극댓값이 존재하므로 $x<0$일 때,

$f'(x)=a(3-3x^2)=3a(1-x)(1+x)$

이고 $f'(x)=0$ 에서

$x=-1$ ($\because$ $x<0$)

즉, $x=-1$에서 극대이므로

$$f(-1)=a\{3(-1)-(-1)^3\}$$
$$=-2a=5$$

$$\therefore\ a=-\frac{5}{2}$$

$$\therefore\ f(2)=2^3-(-\frac{5}{2})\times 2=13$$

<답> ⑤

22.
출제의도 : 등차수열에 관련된 문제를 해결할 수 있는가?

등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.
$a_3=8$에서
$a+2d=8 \quad \cdots ㉠$
또, $a_6-a_4=12$에서
$(a+5d)-(a+3d)=12$
$2d=12$
$\therefore\ d=6 \quad \cdots ㉡$
㉠과 ㉡에서 $a=-4$, $d=6$이므로
$a_6=(-4)+(6-1)\times 6$
$=26$

<답> 26

23.
출제의도 : 미분계수를 구할 수 있는가?

$f(x)=5x^2+3x-1$ 에서 $f'(x)=10x+3$ 이므로
$f'(1)=13$

<답> 13

24.
출제의도 : 수열의 극한의 대소 관계를 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

$3n^2+2n<a_n<3n^2+3n$
에서 각 변을 n^2으로 나누면

$$3+\frac{2}{n}<\frac{a_n}{n^2}<3+\frac{3}{n}$$

이때, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{3}{n}\right)=3$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=3$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5a_n}{n^2+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5\times\frac{a_n}{n^2}}{1+\frac{2}{n}}=5\times 3=15$$

<답> 15

25.
출제의도 : 함수의 극한의 성질을 이용하여 미정계수를 구할 수 있는가?

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+a}-2}{x-2}=b$에서
$x\to 2$일 때, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.
즉, $\lim\limits_{x\to 2}(\sqrt{x+a}-2)=\sqrt{2+a}-2=0$
$\sqrt{a+2}=2$, $a+2=4$
$\therefore\ a=2$

$$\therefore\ b=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}$$

$\therefore\ 10a+4b=10\times 2+4\times\frac{1}{4}=21$

<답> 21

26.

출제의도 : 미분계수의 기하학적 의미를 알고 도함수를 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

곡선 $y=f(x)$위에 점 $(2,1)$이 있으므로

$f(2)=1$

또, 접선의 기울기가 2이므로

$f'(2)=2$

한편, $g(x)=x^3f(x)$에서

$g'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$

이므로

$g'(2)=12f(2)+8f'(2)$

$\quad=12\cdot 1+8\cdot 2=28$

<답> 28

27.

출제의도 : 로그방정식을 풀 수 있는가?

$x^{\log_2 x}=8x^2\cdots$㉠에서

$\log_2 x^{\log_2 x}=\log_2 8x^2$

$(\log_2 x)(\log_2 x)=\log_2 8+\log_2 x^2$

$(\log_2 x)^2=\log_2 2^3+2\log_2 x$

$(\log_2 x)^2-2\log_2 x-3=0$

이때, $\log_2 x=t$라 하면

$t^2-2t-3=0\cdots$㉡

따라서, ㉠의 두 실근이 α, β이므로 ㉡의 두 실근은 $\log_2\alpha$, $\log_2\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2\alpha+\log_2\beta$

$=\log_2\alpha\beta=2$

$\therefore\ \alpha\beta=2^2=4$

<답> 4

28.

출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열을 이해하고 활용할 수 있는가?

(가)에서 $a_{n+2}=a_n-4$이므로 $a_2=p$라 놓으면

$a_1=7$

$a_2=p$

$a_3=a_1-4=7-4=3$

$a_4=a_2-4=p-4$

$a_5=a_3-4=-1$

$a_6=a_4-4=p-8$

(나)에서 $a_{n+6}=a_n$이므로

$\sum_{k=1}^{50}a_k=8\sum_{k=1}^{6}a_k+a_1+a_2$

$\quad=8\{7+p+3+(p-4)+(-1)+(p-8)\}$

$\qquad+7+p$

$\quad=8(3p-3)+7+p$

$\quad=25p-17=258$

$25p=275$

$\therefore\ p=11$

<답> 11

29.

출제의도 : 역행렬이 존재할 조건을 이

용하여 행렬에 대한 관계식을 간단히 한 후 행렬의 성분의 합을 구할 수 있는가?

조건 (가)에서

$A^3-E=(A-E)(A^2+A+E)=O$

이고 조건 (나)에서 $A-E$의 역행렬이 존재하므로

$(A-E)^{-1}(A-E)(A^2+A+E)=O$

$A^2+A+E=O$

$\therefore\ A^2=-A-E$

따라서,

$(A-E)^2$

$=A^2-2A+E$

$=(-A-E)-2A+E$

$=-3A$

이므로

$(A-E)^6=(-3A)^3$

$=-27A^3$

$=-27E$

$\therefore\ (A-E)^{60}=(-27E)^{10}$

$=27^{10}E$

$=27^{10}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}27^{10}&0\\0&27^{10}\end{pmatrix}$

따라서, 행렬 $(A-E)^{60}$의 모든 성분의 합은

$27^{10}+27^{10}=2\times27^{10}$

$=2\times(3^3)^{10}$

$=2\times3^{30}$

$\therefore\ a=1,\ b=30$

$\therefore\ a+b=31$

<답> 31

30.

출제의도 : 지표와 가수를 이해하고 활용할 수 있는가?

자연수 m의 지표와 가수를 각각 $n_1,\ \alpha_1$, 자연수 n의 지표와 가수를 각각 $n_2,\ \alpha_2$라 하면

$\mathrm{P}_m(n_1,\ \alpha_1),\ \mathrm{P}_n(n_2,\ \alpha_2)$

(나)에서 $\overline{\mathrm{P}_m\mathrm{P}_n}=\sqrt{1+(\log2)^2}$ 이므로

$\overline{\mathrm{P}_m\mathrm{P}_n}^2=1+(\log2)^2$

$(n_2-n_1)^2+(\alpha_2-\alpha_1)^2=1+(\log2)^2$

이때, n_1, n_2은 정수이고 $0\le\alpha_1<1$

$0\le\alpha_2<1$이므로

$|n_2-n_1|=1,\ |\alpha_2-\alpha_1|=\log2$

한편, $m<n$이므로

$n_2=n_1+1$

(i) $\alpha_2>\alpha_1$일 때,

$\alpha_2=\alpha_1+\log2$이므로

$\log m=n_1+\alpha_1$ …㉠

$\log n=n_1+1+\alpha_1+\log2$ …㉡

㉡에서 ㉠을 변변 빼면

$\log\frac{n}{m}=1+\log2$

$\log\frac{n}{m}=\log20$

$\therefore\ \frac{n}{m}=20$

$\therefore\ n=20m$

이 조건을 만족하는 순서쌍 $(m,\ n)$은

$(1, 20)$, $(2, 40)$, $(3, 60)$, $(4, 80)$

로 4개이다.

(ii) $\alpha_2 < \alpha_1$일 때,

$\alpha_2 = \alpha_1 - \log 2$이므로

$\log m = n_1 + \alpha_1$ …㉢

$\log n = n_1 + 1 + \alpha_1 - \log 2$ …㉣

㉣에서 ㉢을 변변 빼면

$$\log \frac{n}{m} = 1 - \log 2$$

$$\log \frac{n}{m} = \log 5$$

$$\therefore \ \frac{n}{m} = 5$$

$$\therefore \ n = 5m$$

이 조건을 만족하는 순서쌍 $(m,\ n)$은

$(2, 10)$, $(3, 15)$, $(4, 20)$, $(5, 25)$, $(6, 30)$, $(7, 35)$, $(8, 40)$, $(9, 45)$

로 8개이다.

따라서, 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 12개다.

<답> 12