2013학년도 6월 고2 전국연합학력평가 정답 및 해설

수학 B형 정답

1	①	2	③	3	③	4	④	5	②
6	②	7	④	8	⑤	9	②	10	③
11	②	12	①	13	②	14	⑤	15	③
16	①	17	④	18	⑤	19	①	20	④
21	⑤	22	96	23	4	24	34	25	32
26	440	27	120	28	160	29	5	30	35

해 설

1. [출제의도] 지수가 유리수인 수들의 곱을 계산한다.

$2^{\frac{2}{3}} \times 54^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{3}{3}}$

$= 6$

2. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 로그를 계산한다.

$\log_3 18 - \log_3 4 + \log_3 6$

$= \log_3\left(\frac{18\times 6}{4}\right)$

$= \log_3 27$

$= \log_3 3^3$

$= 3$

3. [출제의도] 그래프를 나타내는 행렬과 그래프의 관계를 이용하여 변의 개수를 구한다.

그래프에서 변의 개수가 9이므로 이 그래프를 나타내는 행렬의 성분 중 1의 개수는 9의 2배인 18이다.

4. [출제의도] 그래프의 평행이동을 이용하여 로그함수의 값을 구한다.

함수 $y=\log_5 x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동시키면

$y-2=\log_5(x-a)$

이 그래프가 점 $(9, 3)$을 지나므로

$3-2=\log_5(9-a)$

$\log_5(9-a)=1$

$9-a=5$

$\therefore\ a=4$

5. [출제의도] 등차수열의 일반항을 구한다.

수열 $\{a_n\}$은 공차가 2인 등차수열이므로

$a_n = a_1 + 2(n-1)$

$a_3 a_5 = a_2 a_8$ 이므로

$(a_1+4)(a_1+8) = (a_1+2)(a_1+14)$

${a_1}^2 + 12a_1 + 32 = {a_1}^2 + 16a_1 + 28$

$4a_1 = 4$

$a_1 = 1$

따라서 $a_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1$이다.

$\therefore\ a_7 = 13$

6. [출제의도] 로그부등식의 해를 구한다.

로그의 진수 조건에서

$x-10>0$이고 $x-20>0$

$\therefore\ x>20$ … ㉠

$\log(x-10)+\log(x-20)<2+\log 6$에서

$\log(x-10)(x-20)<\log 600$

$(x-10)(x-20)<600$

$x^2-30x-400<0$

$(x+10)(x-40)<0$

$-10<x<40$ … ㉡

㉠, ㉡에서 부등식의 해는 $20<x<40$이다.

$\therefore\ \alpha+\beta=20+40=60$

7. [출제의도] 행렬의 역행렬을 구한다.

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$pA+qE = \begin{pmatrix} 3p+q & 2p \\ -2p & -p+q \end{pmatrix}$

$A^{-1}=pA+qE$에서

$3p+q=-1,\ 2p=-2$

$p=-1,\ q=2$

$\therefore\ pq=-2$

8. [출제의도] 행렬과 로그를 이용하여 연립방정식의 해를 갖지 않도록 하는 조건을 구한다.

주어진 연립방정식이 해를 갖지 않으므로

행렬 $\begin{pmatrix} \log_3 a & 3 \\ 1 & \log_3 \frac{a}{9} \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않는다.

$\log_3 a \times \log_3 \frac{a}{9} - 3\times 1 = 0$

$\log_3 a(\log_3 a - 2) - 3 = 0$

$(\log_3 a)^2 - 2\log_3 a - 3 = 0$

$t=\log_3 a$로 놓으면

$t^2-2t-3=0$

$(t+1)(t-3)=0$

$t=-1$ 또는 $t=3$

$\log_3 a=-1$ 또는 $\log_3 a=3$

$a=\frac{1}{3}$ 또는 $a=27$

(ⅰ) $a=\frac{1}{3}$일 때,

$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$이므로

$\frac{-1}{1} = \frac{3}{-3} = \frac{1}{-1}$이다.

따라서 주어진 연립방정식은 무수히 많은 해를 갖는다.

(ⅱ) $a=27$일 때,

$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$이므로

$\frac{3}{1} = \frac{3}{1} \neq \frac{1}{-1}$이다.

따라서 주어진 연립방정식은 해를 갖지 않는다.

$\therefore\ a=27$

9. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

$P_1 = \frac{72-65}{14} \times (1.05)^{10}$

$= \frac{1}{2} \times 1.05^{10}$ … ㉠

$4P_1 = \frac{79-65}{14} \times (1.05)^x$

$= 1.05^x$ … ㉡

㉠, ㉡에서

$4 \times \frac{1}{2} \times 1.05^{10} = 1.05^x$

$1.05^{x-10} = 2$

$1.05^{14} = 2$이므로

$1.05^{x-10} = 1.05^{14}$

$x-10=14$

$\therefore\ x=24$

10. [출제의도] 상용로그의 지표를 이용하여 수열의 합을 구한다.

(ⅰ) $1 \le n < 10$일 때,

$\log 1 \le \log n < \log 10$

$0 \le \log n < 1$

$a_n = 0$

(ⅱ) $10 \le n < 100$일 때,

$\log 10 \le \log n < \log 100$

$1 \le \log n < 2$

$a_n = 1$

(ⅲ) $100 \le n \le 200$일 때,

$\log 100 \le \log n \le \log 200 < \log 1000$

$2 \le \log n < 3$

$a_n = 2$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{200} (-1)^{a_k}$

$= (-1)^{a_1} + (-1)^{a_2} + (-1)^{a_3} + \cdots + (-1)^{a_{200}}$

$= (-1)^0 \times 9 + (-1)^1 \times 90 + (-1)^2 \times 101$

$= 9 - 90 + 101$

$= 20$

11. [출제의도] 행렬의 성질을 이용하여 명제의 참, 거짓을 판단한다.

ㄱ. $AB+A^2 = A(B+A) = E$

$A^{-1} = B+A$

따라서 A의 역행렬이 존재한다. (참)

ㄴ. $AB+A^2=E$에서

$AB = E-A^2$ … ㉠

ㄱ에서 $A^{-1}=B+A$이므로

$A(B+A)=(B+A)A=E$

$BA+A^2=E$

$BA=E-A^2$ … ㉡

㉠, ㉡에서 $AB=BA$ (참)

ㄷ. ㄴ에서 $AB=BA$이므로

$AB+BA=A^2+B^2$에서

$2AB=A^2+B^2$ … ㉢

$AB+A^2=E$에서

$A^2=E-AB$ … ㉣

㉣을 ㉢에 대입하면

$2AB=E-AB+B^2$

$3AB-B^2=E$

$(3A-B)B=E$

$B^{-1}=3A-B$

$p=3,\ q=-1$

$p+q=2$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

12. [출제의도] 지수함수를 활용하여 조건에 맞는 행렬을 찾아 역행렬을 구한다.

$\mathrm{A}(1, 2),\ \mathrm{B}(2, 4),\ \mathrm{C}\left(1, \frac{1}{2}\right),\ \mathrm{D}\left(2, \frac{1}{4}\right)$이므로

$a=2,\ b=4,\ c=\frac{1}{2},\ d=\frac{1}{4}$

행렬 $P=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$이므로

$P^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{2}-2}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -4 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} = -\frac{2}{3}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -4 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{8}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$

따라서 P^{-1}의 모든 성분의 합은

$-\frac{1}{6}+\frac{8}{3}+\frac{1}{3}-\frac{4}{3}=\frac{3}{2}$

13. [출제의도] 곡선 위의 두 점을 잇는 직선의 기울기를 구한다.

직선 AB의 기울기는

$m_1 = \frac{4-2}{2-1} = 2$

직선 CD의 기울기는

$m_2 = \frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}{2-1} = -\frac{1}{4}$

$m_2 = km_1$에서 $-\frac{1}{4} = 2k$

$\therefore\ k=-\frac{1}{8}$

14. [출제의도] 지수함수의 그래프에서 조건을 만족하는 원의 개수를 추론한다.

반지름의 길이가 r이고 x축, y축에 모두 접하는 원의 중심의 좌표는

(r, r), $(r, -r)$, $(-r, r)$, $(-r, -r)$

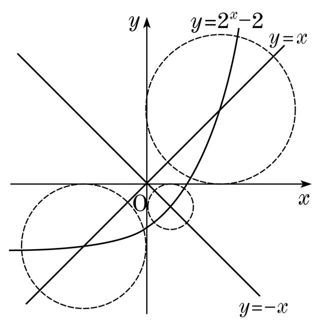
꼴이므로 원의 중심이 직선 $y=x$ 또는 $y=-x$ 위에 있다.

그러므로 원의 중심이 곡선 $y=2^x+n$ 위에 있고 x축, y축에 모두 접하는 원의 개수는 곡선 $y=2^x+n$과 직선 $y=x$ 또는 $y=-x$의 교점 중 원점이 아닌 점의 개수와 같다.

(i) $n=-2$일 때,

곡선 $y=2^x-2$는 직선 $y=x$와 원점이 아닌 서로 다른 두 점에서 만나고, 직선 $y=-x$와 원점이 아닌 한 점에서 만난다.

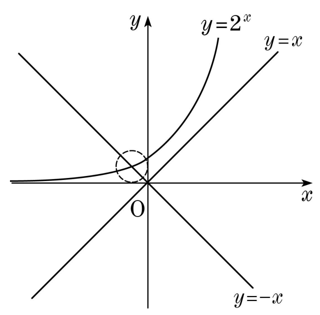
$\therefore\ f(-2)=2+1=3$



(ii) $n=0$일 때,

곡선 $y=2^x$은 직선 $y=x$와 만나지 않고, 직선 $y=-x$와 원점이 아닌 한 점에서 만난다.

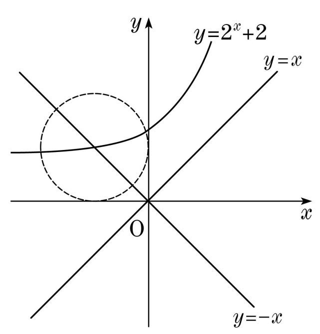
$\therefore\ f(0)=1$



(iii) $n=2$일 때,

곡선 $y=2^x+2$는 직선 $y=x$와 만나지 않고, 직선 $y=-x$와 원점이 아닌 한 점에서 만난다.

$\therefore\ f(2)=1$



(i), (ii), (iii)에 의하여

$f(-2)+f(0)+f(2)$

$=3+1+1=5$

15. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 삼각형 넓이의 일반항을 구하여 그 합을 구한다.

곡선 $y=4^x$ 위의 점 P의 좌표를 $(a_n, 4^{a_n})$이라 하면 삼각형 OAP의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\sqrt[3]{2}\times 4^{a_n}=2^{-1}\times 2^{\frac{1}{3}}\times 2^{2a_n}$$

$$=2^{2a_n-\frac{2}{3}}$$

$\triangle\mathrm{OAP}=4^n$이므로

$$2^{2a_n-\frac{2}{3}}=4^n=2^{2n}$$

$$2a_n-\frac{2}{3}=2n$$

$$a_n=n+\frac{1}{3}$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{9}a_k=\sum_{k=1}^{9}\left(k+\frac{1}{3}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{9}k+\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{3}$$

$$=\frac{9\times 10}{2}+9\times\frac{1}{3}$$

$$=48$$

16. [출제의도] 수열의 합과 일반항과의 관계를 이용하여 일반항을 구한다.

$$\sum_{k=1}^{15}(S_{2k}-S_{2k-1})$$

$$=(S_2-S_1)+(S_4-S_3)+\cdots+(S_{30}-S_{29})$$

$$=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{30}$$

이때, 수열 $\{a_n\}$의 공차가 3이므로 수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 $a_2=a_1+3$이고 공차가 6인 등차수열이다.

$$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{30}$$

$$=\frac{15\{2(a_1+3)+(15-1)\times 6\}}{2}$$

$$=15(a_1+45)$$

$$=750$$

$$a_1+45=50$$

$$a_1=5$$

$$\therefore\ a_{30}=a_1+29\times 3$$

$$=5+87$$

$$=92$$

17. [출제의도] 행렬의 연산과 등비수열의 합을 이용하여 행렬의 거듭제곱을 추론한다.

$A^2-3A+2E=O$에서

$$A^2-A=2(A-E)$$

$$A^3-A^2=A(A^2-A)=2A(A-E)=2(A^2-A)$$

$$=4(A-E)$$

$$=2^2(A-E)$$

$$A^4-A^3=A(A^3-A^2)=4A(A-E)=4(A^2-A)$$

$$=8(A-E)$$

$$=2^3(A-E)$$

$$\vdots$$

$$A^n-A^{n-1}=\boxed{2^{n-1}}(A-E)$$

위 등식들을 변끼리 더하면 좌변은

$$(A^2-A)+(A^3-A^2)+(A^4-A^3)+\cdots+(A^n-A^{n-1})$$

$$=A^n-A$$

이고, 우변은

$$(2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1})(A-E)$$

$$=\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}(A-E)$$

$$=(2^n-2)(A-E)$$

이다. 그러므로

$$A^n-A=\boxed{(2^n-2)}(A-E)$$

$$\therefore\ A^n=\boxed{(2^n-2)}(A-E)+A$$

$f(n)=2^{n-1}$, $g(n)=2^n-2$

$$\therefore\ f(9)+g(9)=2^8+2^9-2$$

$$=766$$

18. [출제의도] 접선의 기울기를 이용하여 부분분수로 표현된 수열의 합을 구한다.

점 $(2n, 0)$에서 원에 그은 접선 l의 기울기를 m이라 하면

$$y=m(x-2n)$$

$$mx-y-2mn=0$$

이 직선이 중심이 $(-1, 0)$이고 반지름의 길이가 1인 원에 접하므로

$$\frac{|-m-2mn|}{\sqrt{m^2+1}}=1$$

$$m^2(2n+1)^2=m^2+1$$

$$m^2(4n^2+4n+1)=m^2+1$$

$$4n(n+1)m^2=1$$

$$m^2=\frac{1}{4n(n+1)}$$

$a_n=$(접선 l의 기울기의 제곱)이므로

$$a_n=\frac{1}{4n(n+1)}$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{40}a_k=\sum_{k=1}^{40}\frac{1}{4k(k+1)}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{40}\frac{1}{(k+1)-k}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{40}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{40}-\frac{1}{41}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{41}\right)$$

$$=\frac{10}{41}$$

[다른 풀이]

점 A_n을 $(2n, 0)$, 원의 중심을 $\mathrm{C}(-1, 0)$이라 하자. 점 A_n에서 원에 그은 두 개의 접선 l_1, l_2의 접점을 각각 T_1, T_2라 하면 삼각형 $\mathrm{CA}_n\mathrm{T}_1$은 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}}=2n+1$, $\overline{\mathrm{CT}_1}=1$인 직각삼각형이므로 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{T}_1\mathrm{A}_n}=\sqrt{(2n+1)^2-1}=\sqrt{4n(n+1)}$$

$\angle\mathrm{CA}_n\mathrm{T}_1=\theta$라 하면 접선 l_1의 기울기는

$$\tan(180^\circ-\theta)=-\tan\theta$$

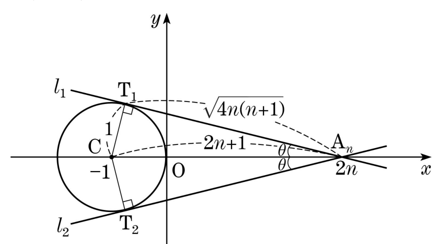
$\angle\mathrm{CA}_n\mathrm{T}_1=\angle\mathrm{CA}_n\mathrm{T}_2$이므로

접선 l_2의 기울기는

$$\tan(180^\circ+\theta)=\tan\theta$$

$$a_n=\tan^2\theta$$

$$=\frac{1}{4n(n+1)}$$



19. [출제의도] 상용로그의 지표의 성질을 이용하여 조건을 만족하는 자연수를 구한다.

$\log 4N$의 지표와 $\log N^2$의 지표가 같으려면 $4N$과 N^2의 자리수가 같아야 한다.

(i) $1\le 4N<10$이고 $1\le N^2<10$일 때,

$N=1,\ 2$

(ii) $10\le 4N<100$이고 $10\le N^2<100$일 때,

$N=4,\ 5,\ \cdots,\ 9$

(iii) $100\le 4N<1000$이고 $100\le N^2<1000$일 때,

$N=25,\ 26,\ \cdots,\ 31$

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족하는 N은

$1, 2, 4, 5, \cdots, 9, 25, 26, \cdots, 31$

이므로 N의 개수는 15이다.

[참고]

(i) $31^2=961$, $32^2=(2^5)^2=2^{10}=1024$이므로

$N\ge 32$인 두 자리 자연수 N에 대하여 $4N$은 세 자리의 자연수, N^2은 네 자리의 자연수이므로 조건을 만족시키는 N은 존재하지 않는다.

(ii) N이 n자리수이면 $4N$은 최대 $(n+1)$자리수이고, N^2은 최소 $(2n-1)$자리수이다.

따라서 $n\ge 3$이면 $n+1<2n-1$이므로 조건을 만족하는 자연수 N은 존재하지 않는다.

20. [출제의도] 수열의 규칙을 발견하여 조건을 만족시키는 일반항을 구한다.

조건 (나)에서

$a_2=8+a_1$

$a_3=8+(a_1+a_2)=2a_2$

$a_4=8+(a_1+a_2+a_3)=2a_3=2^2a_2$

$\vdots$

$a_{10}=2^8a_2$

조건 (가)에 의해 $a_{10}=2^8a_2\le 5120$

$a_2=8+a_1\le 20$

$a_1\le 12$

따라서 a_1의 최댓값은 12이다.

[다른 풀이]

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$라 하면 조건 (나)에 의해

$a_n=8+S_{n-1}\ (n\ge 2)$ … ㉠

㉠에 n대신 $n+1$을 대입하면

$a_{n+1}=8+S_n$ … ㉡

㉡−㉠을 하면

$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=a_n\ (n\ge 2)\end{aligned}$$

$a_{n+1}=2a_n\ (n\ge 2)$

$\therefore\ a_n=a_2\cdot 2^{n-2}\ (n\ge 2)$

조건 (가)에 의해 $a_{10}=2^8a_2\le 5120$

$a_2=8+a_1\le 20$

$a_1\le 12$

따라서 a_1의 최댓값은 12이다.

21. [출제의도] 등차수열을 이용하여 물통을 채우는 시간을 구한다.

물통 A, B, C, D의 반지름의 길이는 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d$ (단, $a,\ d$는 양의 실수)

라 하고, 물통의 높이를 h라 하자.

물통 A, B, C, D의 부피는 각각

$a^2h\pi,\ (a+d)^2h\pi,\ (a+2d)^2h\pi,\ (a+3d)^2h\pi$

이고, 물통에 매분 π L의 물을 넣어 물통 A, B, C, D를 채우는 데 걸리는 시간은 각각

$\dfrac{a^2h\pi}{\pi}=a^2h$

$\dfrac{(a+d)^2h\pi}{\pi}=(a+d)^2h$

$\dfrac{(a+2d)^2h\pi}{\pi}=(a+2d)^2h$

$\dfrac{(a+3d)^2h\pi}{\pi}=(a+3d)^2h$

이다. 조건 (가), (나)에 의해

$(a+d)^2h=a^2h+8$

$(a+2d)^2h=(a+d)^2h+16$

두 식을 연립하면 $adh=2,\ d^2h=4$이다.

a와 d는 모두 양수이므로 $d=2a,\ h=\dfrac{1}{a^2}$

따라서 물통 D를 채우는 데 걸리는 시간은

$(a+3d)^2h=(7a)^2\cdot\dfrac{1}{a^2}=49$ (분)

[다른 풀이]

물통 A를 채우는 데 걸리는 시간을 t(분)이라 놓자. 물통의 높이와 물통에 들어가는 물의 양이 일정하므로 물통의 부피의 비는 밑면의 넓이의 비와 같고 각 물통을 채우는 데 걸리는 시간의 비와 같다.

따라서

$\dfrac{(a+d)^2}{a^2}=\dfrac{t+8}{t}$ … ㉠

$\dfrac{(a+2d)^2}{(a+d)^2}=\dfrac{t+24}{t+8}$ … ㉡

㉠, ㉡을 변끼리 곱하면

$\dfrac{(a+2d)^2}{a^2}=\dfrac{t+24}{t}$ … ㉢

㉠, ㉢에서

$3\times\dfrac{(a+d)^2}{a^2}-\dfrac{(a+2d)^2}{a^2}=\dfrac{3(t+8)}{t}-\dfrac{t+24}{t}$

$\dfrac{2a^2+2ad-d^2}{a^2}=2$

$2a^2+2ad-d^2=2a^2$

$d(2a-d)=0$

$d\ne 0$이므로 $d=2a$

㉠에 대입하면 $\dfrac{9a^2}{a^2}=\dfrac{t+8}{t}$

$9=\dfrac{t+8}{t}$

$\therefore\ t=1$

물통 D를 채우는 데 걸리는 시간을 t_D라 하면

$\dfrac{t_D}{t}=\dfrac{(a+3d)^2}{a^2}=49$

$\therefore\ t_D=49$

22. [출제의도] $\sum$의 성질을 이용하여 수열의 합을 구한다.

$$\begin{aligned}\sum_{k=5}^{10}(2k+1)&=\sum_{k=1}^{10}(2k+1)-\sum_{k=1}^{4}(2k+1)\\&=2\times\frac{10\times 11}{2}+10-\left(2\times\frac{4\times 5}{2}+4\right)\\&=96\end{aligned}$$

[다른 풀이]

$\sum_{k=5}^{10}(2k+1)$은 첫째항이 11, 끝항이 21, 항의 개수가 6인 등차수열의 합이므로

$\sum_{k=5}^{10}(2k+1)=\dfrac{6(11+21)}{2}=96$

23. [출제의도] 행렬의 거듭제곱을 구한다.

$$\begin{aligned}A^2&=\begin{pmatrix}2&-1\\5&-2\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}2&-1\\5&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\5&-2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-E\end{aligned}$$

$A^4=(-E)^2=E$

$A^{2013}=(A^4)^{503}A=E^{503}A=A$

따라서 A^{2013}의 모든 성분의 합은

$2-1+5-2=4$

[참고]

n이 자연수일 때,

$A^{4n-3}=A,\ A^{4n-2}=-E,\ A^{4n-1}=-A,\ A^{4n}=E$

24. [출제의도] 계차수열을 이용하여 수열의 일반항을 구한다.

$a_{n+1}-a_n=2n+3$이므로

$$\begin{aligned}a_5&=a_1+\sum_{k=1}^{4}(2k+3)\\&=2+2\times\frac{4\times 5}{2}+3\times 4\\&=34\end{aligned}$$

[다른 풀이]

$a_{n+1}-a_n=2n+3$에서

$a_{n+1}=a_n+2n+3$이고

$a_1=2$이므로

$a_2=a_1+5=7$

$a_3=a_2+7=14$

$a_4=a_3+9=23$

$a_5=a_4+11=34$

25. [출제의도] 연립방정식의 해가 무수히 많을 조건을 구한다.

$\begin{pmatrix}5&2\\4&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}5&2\\4&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k&0\\0&k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}5-k&2\\4&8-k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

이 연립방정식이 $x=0,\ y=0$ 이외의 해를 가지므로

행렬 $\begin{pmatrix}5-k&2\\4&8-k\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않는다.

$(5-k)(8-k)-8=0$

$k^2-13k+32=0$

이 이차방정식의 두 실근을 각각 $\alpha,\ \beta$라 하면 근과 계수와의 관계에 의해

$\alpha\beta=32$

26. [출제의도] 약수의 개수와 관련하여 수열의 합을 구한다.

$6^n=(2\times 3)^n=2^n\cdot 3^n$에서 6^n의 전체 양의 약수의 개수는 $(n+1)(n+1)=(n+1)^2$이다.

한편, 짝수인 양의 약수의 개수는 전체 양의 약수의 개수에서 홀수인 양의 약수의 개수를 뺀 것과 같다.

이때, 홀수인 양의 약수는 3^n의 양의 약수와 같으므로 그 개수는 $n+1$이다. 즉,

$a_n=(n+1)^2-(n+1)=n^2+n$

$$\begin{aligned}\therefore\ \sum_{k=1}^{10}a_k&=\sum_{k=1}^{10}(k^2+k)\\&=\frac{10\times 11\times 21}{6}+\frac{10\times 11}{2}\\&=385+55\\&=440\end{aligned}$$

[다른 풀이]

$6^n=2^n\cdot 3^n$의 짝수인 양의 약수는 반드시 2를 인수로 가진다. 그러므로 6^n의 짝수인 양의 약수의 개수는 $2^{n-1}\cdot 3^n$의 양의 약수의 개수와 같다.

따라서 조건을 만족하는 양의 약수의 개수는

$\{(n-1)+1\}(n+1)=n(n+1)$

[참고]

자연수 N을 소인수분해하였을 때,

$N=p^\alpha q^\beta r^\gamma$

($p,\ q,\ r$는 서로 다른 소수, $\alpha\ge 1,\ \beta\ge 1,\ \gamma\ge 1$)

이라고 하면 N의 양의 약수의 개수는

$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$

27. [출제의도] 등비수열의 합을 이용하여 등식을 만족시키는 조건을 구한다.

주어진 등비수열의 일반항을 b_n, 공비를 r라 하면 $b_1=3$이므로 $b_n=3r^{n-1}$이고, 수열 $\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$은 첫째항이 $\dfrac{1}{3}$, 공비가 $\dfrac{1}{r}$인 등비수열이다.

$3+a_1+a_2+\cdots+a_{10}+40=\dfrac{3(r^{12}-1)}{r-1}$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{10}}+\frac{1}{40}\\&=\frac{\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{r}\right)^{12}\right\}}{1-\frac{1}{r}}\\&=\frac{r(r^{12}-1)}{3r^{12}(r-1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&3+a_1+a_2+\cdots+a_{10}+40\\&=k\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{10}}+\frac{1}{40}\right)\end{aligned}$$

$\dfrac{3(r^{12}-1)}{r-1}=\dfrac{kr(r^{12}-1)}{3r^{12}(r-1)}$

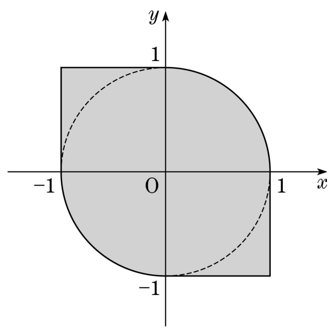
$\therefore\ k=9r^{11}$

$b_{12}=3r^{11}=40$이므로

$k=9r^{11}=3\cdot 3r^{11}=3\times 40=120$

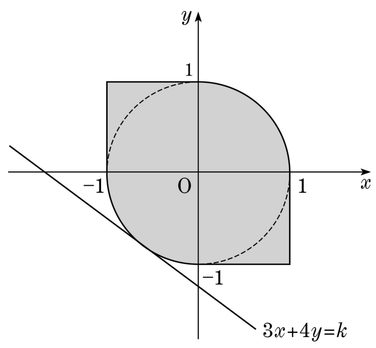
28. [출제의도] 부등식의 영역을 이용하여 지수함수의 최댓값을 구한다.

집합 $A\cup B$를 나타내는 영역은 그림과 같다.



$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+4y}$에서 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 $3x+4y$가 최솟값을 가질 때, $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+4y}$은 최댓값을 갖는다.

$3x+4y=k$로 놓으면 직선 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{k}{4}$가 제3사분면에서 원과 접할 때, k의 값이 최소이다.

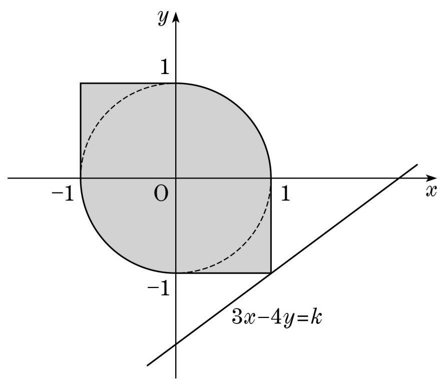


따라서 $\frac{|-k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$, $k=-5$ ($\because$ $k<0$)

$\therefore$ $M_1=\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}=32$

또, 2^{3x-4y}에서 $2>1$이므로 $3x-4y$가 최댓값을 가질 때, 2^{3x-4y}은 최댓값을 갖는다.

$3x-4y=k$로 놓으면 직선 $y=\frac{3}{4}x-\frac{k}{4}$가 점 $(1, -1)$을 지날 때, k의 값이 최대이다.



$k=3\cdot 1-4\cdot(-1)=7$

$\therefore$ $M_2=2^7=128$

따라서 $M_1+M_2=32+128=160$

29. [출제의도] 등차수열의 성질을 이용하여 여러 가지 수열의 일반항을 구한다.

수열 $\{b_n\}$의 첫째항과 공차가 같으므로

$b_2=2b_1$, $b_3=3b_1$

$b_1=\frac{a_2}{a_1}$에서 $a_2=a_1b_1$

$b_2=\frac{a_3}{a_2}=2b_1$에서 $a_3=2a_2b_1=2a_1{b_1}^2$

$b_3=\frac{a_4}{a_3}=3b_1$에서 $a_4=3a_3b_1=6a_1{b_1}^3$

$a_4=144$에서 $a_1{b_1}^3=24$

이때, $24=2^3\times 3$이고 네 개의 수 a_1, a_2, a_3, a_4와 b_1이 자연수이고 $a_1<a_2<a_3<a_4$이므로

$a_1=3$, $b_1=2$

$\therefore$ $a_1+b_1=5$

30. [출제의도] 규칙성을 찾아 여러 가지 수열의 일반항을 구한다.

표에 나열된 수를 다음과 같이 묶어보자.

$(1, 2, 3, 4, 5)$

$(6, 7, 8, \cdots, 14)$

$(15, 16, 17, \cdots, 27)$

$\vdots$

n번째 묶음의 첫째항을 a_n이라 하면

$\{a_n\}$: $1, 6, 15, 28, \cdots$

$b_n=a_{n+1}-a_n$이라 하면

$\{b_n\}$: $5, 9, 13, \cdots$

수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 5이고 공차가 4인 등차수열이므로

$b_n=5+4(n-1)=4n+1$

$\therefore$ $a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}(4k+1)=2n^2-n$

$a_9=153<174<190=a_{10}$이므로 174는 9번째 묶음의 22번째 수이다.

n번째 묶음에 포함된 수의 개수를 나열하면

$5, 9, 13, \cdots$

즉, 첫째항이 5이고 공차가 4인 등차수열을 이룬다.

따라서 9번째 묶음에 포함된 수의 개수는

$5+(9-1)\times 4=37$

이때, 9번째 묶음은 제19행의 제1열부터 제18열까지 앞에서부터 18개의 수가 배열되고 제18행, 제18열에 하나의 수가 배열되고 제18행, 제19열부터 위쪽으로 18개의 수가 배열된다.

따라서 174는 제16행, 제19열의 수이다.

$\therefore$ $16+19=35$

	⋯	제14열	제15열	제16열	제17열	제18열	제19열
⋮							⋮
제16행							174
제17행							173
제18행						171	172
제19행	⋯	166	167	168	169	170	

[다른 풀이]

제$2n$행, 제$2n$열에 있는 수를 a_n이라 하자.

제2행, 제2열에 있는 수는 3이고, 제4행, 제4열로 이동하기 위해서는 제3열의 2칸, 제5행의 5칸을 지나온 것과 같으므로 제4행, 제4열의 수는

$3+(2+5)=10$

같은 방법으로 제4행, 제4열의 수가 제6행, 제6열의 수로 이동하기 위해서는 제5열의 4칸, 제7행의 7칸을 지나온 것과 같으므로 제6행, 제6열의 수는

$10+(4+7)=21$

같은 방법으로 제6행, 제6열의 수가 제8행, 제8열의 수로 이동하기 위해서는 제6열의 6칸, 제9행의 9칸을 지나온 것과 같으므로 제8행, 제8열의 수는

$21+(6+9)=36$

그러므로 수열 $\{a_n\}$의 계차수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 7이고 공차가 4인 등차수열이다.

$b_n=7+4(n-1)$

$=4n+3$

$a_1=3$이므로

$a_n=3+\sum_{k=1}^{n-1}(4k+3)$

$=2n^2+n$

$a_9=171$이고 3칸을 더 이동해야 174가 되므로 오른쪽으로 1칸 이동한 후 위로 2칸 이동한 빈칸에 174가 배열된다.

따라서 174는 제16행, 제19열의 수이다.