2013학년도 6월 고1 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

정 답

1	⑤	2	②	3	①	4	③	5	④
6	①	7	④	8	③	9	⑤	10	④
11	②	12	②	13	④	14	⑤	15	③
16	②	17	①	18	①	19	③	20	⑤
21	②	22	6	23	10	24	66	25	256
26	36	27	12	28	135	29	24	30	20

해 설

1. [출제의도] i의 정의를 이용하여 식의 값을 구한다.

i의 정의에 의해 $\sqrt{-1}=i$이므로

$\sqrt{14^2}+(\sqrt{-1})^2=14+i^2$

$=14+(-1)$

$=14-1$

$=13$

2. [출제의도] 곱셈공식을 이용하여 식의 값을 구한다.

$x=2\sqrt{3}$, $y=\sqrt{5}$ 이므로

$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$

$=(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2$

$=12-5$

$=7$

3. [출제의도] 다항식의 연산법칙을 이용하여 식을 간단히 한다.

두 다항식 $A=3x^2+xy+y^2$, $B=x^2+2y^2$ 을 $A-2B$에 대입하면

$A-2B=(3x^2+xy+y^2)-2(x^2+2y^2)$

$=3x^2+xy+y^2-2x^2-4y^2$

$=x^2+xy-3y^2$

4. [출제의도] 절댓값의 정의를 이용하여 식을 간단히 한다.

$1<x<3$ 의 범위에서

$x-1>0$ 이므로 $|x-1|=x-1$

$x-4<0$ 이므로 $|x-4|=-(x-4)=-x+4$

따라서 $1<x<3$일 때

$|x-1|+|x-4|=x-1-x+4$

$=3$

5. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 식의 값을 구한다.

이차방정식 $x^2-3x+1=0$ 의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=1$

따라서 $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$

$=3$

[다른 풀이]

$x\neq0$이므로 방정식 $x^2-3x+1=0$ 의 양변을 x^2 으로 나누면

$1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$

이다.

$\dfrac{1}{x}=t$ 로 치환하면

$1-3t+t^2=0$

$t^2-3t+1=0$ ⋯ ㉠

$\dfrac{1}{\alpha}$, $\dfrac{1}{\beta}$ 은 ㉠의 근이 된다.

따라서 근과 계수의 관계에 의해

$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=3$

6. [출제의도] 인수분해하여 다항식의 약수를 구한다.

$x^2-x=A$ 로 놓으면

$(x^2-x)(x^2-x-1)-2=A(A-1)-2$

$=A^2-A-2$

$=(A-2)(A+1)$

$=(x^2-x-2)(x^2-x+1)$

$=(x-2)(x+1)(x^2-x+1)$

따라서 $x-2$는 주어진 식의 약수이다.

7. [출제의도] 주어진 조건을 만족하는 부분집합의 개수를 구한다.

집합 A의 원소의 개수가 5이므로 부분집합의 개수는 $2^5=32$이고, 이 중에서 홀수인 원소 $1, 3, 5$를 제외한 원소로 이루어진 집합 $\{2, 4\}$의 부분집합의 개수는 $2^2=4$이므로, 홀수가 한 개 이상 속해 있는 부분집합의 개수는 $32-4=28$

[참고]

(ⅰ) 홀수 원소가 1개 속해 있는 집합

$\{1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 2, 4\}$,

$\{3\}$, $\{3, 2\}$, $\{3, 4\}$, $\{3, 2, 4\}$,

$\{5\}$, $\{5, 2\}$, $\{5, 4\}$, $\{5, 2, 4\}$

∴ 12개

(ⅱ) 홀수 원소가 2개 속해 있는 집합

$\{1, 3\}$, $\{1, 3, 2\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{1, 3, 2, 4\}$,

$\{3, 5\}$, $\{3, 5, 2\}$, $\{3, 5, 4\}$, $\{3, 5, 2, 4\}$,

$\{1, 5\}$, $\{1, 5, 2\}$, $\{1, 5, 4\}$, $\{1, 5, 2, 4\}$

∴ 12개

(ⅲ) 홀수 원소가 3개 속해 있는 집합

$\{1, 3, 5\}$, $\{1, 3, 5, 2\}$, $\{1, 3, 5, 4\}$, $\{1, 3, 5, 2, 4\}$

∴ 4개

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해 홀수가 한 개 이상 속해 있는 집합의 개수는

$12+12+4=28$

8. [출제의도] 판별식을 이용하여 이차방정식이 중근을 가질 조건을 구한다.

방정식 $x^2-kx+k-1=0$이 중근을 가지므로

판별식을 D라 하면

$D=k^2-4(k-1)$

$=k^2-4k+4$

$=(k-2)^2$

$=0$

∴ $k=2$

$k=2$를 $x^2-kx+k-1=0$에 대입하면

$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$

$x=1$

∴ $\alpha=1$

따라서 $k+\alpha=3$

[다른 풀이]

문자를 여러 개 포함한 식은 차수가 가장 낮은 문자에 대하여 정리한 후 인수분해하면 편리하다.

그러므로 $x^2-kx+k-1=0$을 k에 대하여 정리하면

$-k(x-1)+x^2-1=0$

$-k(x-1)+(x+1)(x-1)=0$

$(x-1)\{-k+(x+1)\}=0$

$(x-1)(x+1-k)=0$

이 방정식은 중근을 갖고 근이 $x=1, k-1$이므로

$1=k-1$

∴ $k=2$

그러므로 $k=2$, $\alpha=1$

따라서 $k+\alpha=2+1=3$

[다른 풀이]

주어진 방정식의 중근이 α이므로

$x^2-kx+k-1=(x-\alpha)^2$ 으로 인수분해 된다.

그러므로 $x^2-kx+k-1=x^2-2\alpha x+\alpha^2$

이 식은 항등식이므로

$k=2\alpha$ ⋯ ㉠

$k-1=\alpha^2$ ⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$2\alpha-1=\alpha^2$

$\alpha^2-2\alpha+1=0$

$(\alpha-1)^2=0$

∴ $\alpha=1$

㉠에 $\alpha=1$을 대입하면 $k=2$

따라서 $k+\alpha=2+1=3$

9. [출제의도] 교집합의 원소 개수의 범위를 구한다.

학급 학생 전체의 집합을 U, 토요일에 축구 경기를 시청한 학생의 집합을 A, 일요일에 축구 경기를 시청한 학생의 집합을 B라고 하면

$n(A)=25$, $n(B)=17$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로

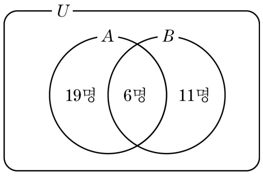
$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=25+17-n(A\cup B)$

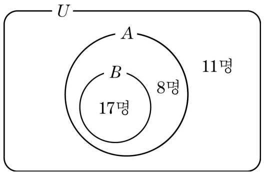
$=42-n(A\cup B)$

$n(A\cup B)$의 최댓값은 학급 학생 전체 인원 수인 36이고, 최솟값은 $A\cup B=A$일 때의 인원 수인 25이다.

그러므로 $n(A\cap B)$의 최솟값 m은 $n(A\cup B)$가 최대인 경우이므로 $m=42-36=6$



$n(A\cap B)$의 최댓값 M은 $n(A\cup B)$가 최소인 경우이므로 $M=42-25=17$



따라서 $M+m=17+6=23$

10. [출제의도] 실수의 성질을 이용하여 미정계수를 정한다.

'p, q가 실수일 때, $p^2+q^2=0$이면 $p=q=0$' ⋯ ㉠

주어진 방정식의 실근을 $x=\alpha$라고 하면

$(\alpha+2)^2+(2\alpha+a)^2=0$이므로 ㉠에 의해

$\alpha+2=0$ ⋯ ㉡

$2\alpha+a=0$ ⋯ ㉢

㉡에서 $\alpha=-2$

이 값을 ㉢에 대입하면 $-4+a=0$

따라서 $a=4$

[다른 풀이]

$(x+2)^2+(2x+a)^2=0$ 을 전개하면

$x^2+4x+4+4x^2+4ax+a^2=0$

$5x^2+4(1+a)x+4+a^2=0$

이차방정식 $5x^2+4(1+a)x+4+a^2=0$ 이 실근을 가지므로

$\dfrac{D}{4}=\{2(1+a)\}^2-5(4+a^2)\geq0$

$4+8a+4a^2-20-5a^2\geq0$

$-a^2+8a-16\geq0$

양변에 -1을 곱하면 부등호의 방향이 바뀌므로

$a^2-8a+16\leq0$

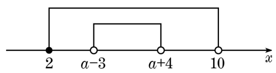
$(a-4)^2\leq0$

그런데 실수의 제곱은 음수가 아니므로

$(a-4)^2 \geq 0$
두 식을 동시에 만족하려면
$(a-4)^2 = 0$
따라서 실수 a의 값은 4

11. [출제의도] 진리집합을 이용하여 충분조건이 되도록 하는 미지수의 값을 정한다.

조건 p의 진리집합은 $\{x|a-3<x<a+4\}$이고
조건 q의 진리집합은 $\{x|2 \leq x < 10\}$이므로
p가 q이기 위한 충분조건이 되려면
$\{x|a-3<x<a+4\} \subset \{x|2 \leq x < 10\}$
이것을 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.



그러므로 $a-3 \geq 2$, $a+4 \leq 10$
$a \geq 5$, $a \leq 6$
$5 \leq a \leq 6$
∴ 정수 a는 5, 6이다.
따라서 a의 개수는 2

12. [출제의도] 소수와 약수의 성질을 이용하여 집합 사이의 관계를 추론한다.

ㄱ. 3이하의 소수는 2, 3이므로 $A_3 = \{2, 3\}$
4의 양의 약수는 1, 2, 4이므로 $B_4 = \{1, 2, 4\}$
그러므로 $A_3 \cap B_4 = \{2\}$ (참)
ㄴ. $a \in A_n$이면 $a \leq n$이고 a는 소수이다.
$a \leq n < n+1$이고 a는 소수이므로 $a \in A_{n+1}$
그러므로 $A_n \subset A_{n+1}$ (참)
ㄷ. (반례) $m=4$, $n=8$이면
$B_4 = \{1, 2, 4\}$, $B_8 = \{1, 2, 4, 8\}$이므로 $B_4 \subset B_8$
그런데 4는 8의 배수가 아니다. (거짓)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

13. [출제의도] 수의 성질을 이용하여 세 실수의 대소 관계를 판단한다.

조건 (가)에서 $b+c<a$ ⋯ ㉠
조건 (나)에서 $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\dfrac{b}{a}}$
그러므로 $a<0$, $b>0$
즉, $a<b$ ⋯ ㉡
㉠에서
$c<b+c<a$ ($\because$ $b>0$) ⋯ ㉢
따라서 ㉡, ㉢에 의해서 $c<a<b$
[참고]
제곱근의 곱셈과 나눗셈
(i) $\sqrt{a}\sqrt{b}$의 계산
$a>0$, $b>0$인 경우에는 $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$
$a>0$, $b<0$인 경우에는 $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$
$a<0$, $b>0$인 경우에는 $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$
$a<0$, $b<0$인 경우에는 $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$
(ii) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$의 계산
$a>0$, $b>0$인 경우에는 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$
$a>0$, $b<0$인 경우에는 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{a}{b}}$
$a<0$, $b>0$인 경우에는 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$
$a<0$, $b<0$인 경우에는 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

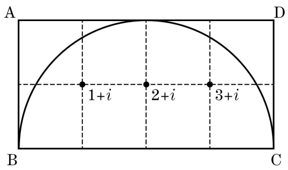
14. [출제의도] 다항식의 성질을 이용하여 식의 값을 구한다.

입체도형 P, Q, R, S, T의 부피가 각각 p, q, r, s, t이므로
$p=a^3$, $q=b^3$, $r=a^2$, $s=b^2$, $t=ab(a-b)$
$p=q+r+s+t$이므로
$a^3 = b^3+a^2+b^2+ab(a-b)$
$a^3-b^3-a^2-b^2-ab(a-b)=0$
$(a-b)(a^2+ab+b^2)-(a^2+b^2)-ab(a-b)=0$
$(a-b)(a^2+b^2)-(a^2+b^2)=0$
$(a-b-1)(a^2+b^2)=0$
$a^2+b^2 \neq 0$이므로 $a-b-1=0$
따라서 $a-b=1$
[다른 풀이]
문자를 여러 개 포함한 식은 차수가 가장 낮은 문자에 대하여 정리한 후 인수분해하면 편리하다.
그러므로
$a^3-b^3-a^2-b^2-ab(a-b)=0$의 좌변을 모두 전개한 후 a에 대하여 정리하면
$a^3-b^3-a^2-b^2-ab(a-b)$
$=a^3-(b+1)a^2+b^2a-b^3-b^2$
$=a^3-(b+1)a^2+b^2a-b^2(b+1)$
$f(x)=x^3-(b+1)x^2+b^2x-b^2(b+1)$이라고 놓으면
$f(b+1)=(b+1)^3-(b+1)(b+1)^2+b^2(b+1)-b^2(b+1)=0$
그러므로 $f(x)$는 $x-b-1$을 인수로 갖는다.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -b-1 & b^2 & -b^2(b+1) \\ b+1 & & b+1 & 0 & b^2(b+1) \\ \hline & 1 & 0 & b^2 & 0 \end{array}$$

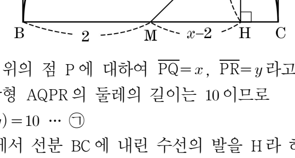
$f(x)$는 $(x-b-1)(x^2+b^2)$으로 인수분해 된다.
$f(x)$에 a를 대입하면 $(a-b-1)(a^2+b^2)$
즉, $a^3-(b+1)a^2+b^2a-b^2(b+1)=(a-b-1)(a^2+b^2)$으로 인수분해 된다.
$a^3-(b+1)a^2+b^2a-b^2(b+1)=0$에서
$(a-b-1)(a^2+b^2)=0$
$a>0$, $b>0$이므로 $a^2+b^2>0$
양변을 a^2+b^2으로 나누면 $a-b-1=0$
따라서 $a-b=1$

15. [출제의도] 주어진 조건을 만족시키는 복소수의 합을 구한다.



점 P가 반원 내부의 점이면서 선분 PQ와 선분 PR의 길이가 모두 자연수이므로
$\overline{\mathrm{PQ}}=1$, 2, 3이고 $\overline{\mathrm{PR}}=1$
즉, $S=\{1+i, 2+i, 3+i\}$
$(1+i)+(2+i)+(3+i)=(1+2+3)+(1+1+1)i$
$=6+3i$
집합 S의 모든 원소의 합은 $6+3i$이므로
$p=6$, $q=3$
따라서 $p+q=9$

16. [출제의도] 곱셈공식을 이용하여 직사각형의 넓이를 구한다.



호 BC 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}=x$, $\overline{\mathrm{PR}}=y$라고 하면
직사각형 AQPR의 둘레의 길이는 10이므로
$2(x+y)=10$ ⋯ ㉠
점 P에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하고
선분 BC의 중점을 M이라고 하면
$\overline{\mathrm{PH}}=2-y$, $\overline{\mathrm{MH}}=x-2$
직각삼각형 PMH에서 피타고라스의 정리에 의해
$4=(2-y)^2+(x-2)^2$
$=x^2+y^2-4(x+y)+8$
$=(x+y)^2-2xy-4(x+y)+8$
㉠에서 $x+y=5$이므로
$4=25-2xy-20+8$
$2xy=9$
따라서 $xy=\dfrac{9}{2}$

17. [출제의도] 연산의 성질을 이용하여 집합의 원소를 추측한다.

집합 A가 곱셈에 대하여 닫혀있으므로 집합 A의 모든 원소에 a를 곱하면 $\{a^2, ab, ac\}$
$\{a^2, ab, ac\}=\{a, b, c\}$이므로 각 집합의 모든 원소의 곱이 같다.
즉, $a^4bc=abc$
a, b, c의 곱셈에 대한 역원이 모두 존재하므로 abc의 역원 $\dfrac{1}{abc}$을 양변에 곱하면
$a^3=1$
마찬가지 방법으로 $b^3=1$, $c^3=1$
따라서 $a^3+b^3+c^3=1+1+1=3$
[다른 풀이]
(나)에서 모든 원소의 곱셈에 대한 역원이 존재하므로 곱셈에 대한 항등원 1은 집합 A의 원소이다.
이 때, $a \neq 1$, $a \in A$이면 $\dfrac{1}{a} \in A$
그러므로 $A=\left\{1, a, \dfrac{1}{a}\right\}$
집합 A가 곱셈에 대하여 닫혀있으므로 $a^2=1$ 또는 $a^2=a$ 또는 $a^2=\dfrac{1}{a}$이다.
(i) $a^2=1$이면 $a \neq 1$이므로 $a=-1$이다.
$a=-1$이면 $\dfrac{1}{a}=a$이므로 집합 A의 원소의 개수가 2가 되어 모순
(ii) $a^2=a$이면 $a \neq 1$이므로 $a=0$이다.
그러므로 a의 곱셈에 대한 역원이 존재하지 않게 되어 모순
(i), (ii)에 의해 $a^2=\dfrac{1}{a}$이므로 $a^3=1$
$A=\left\{1, a, \dfrac{1}{a}\right\}$이고 문제에서 $A=\{a, b, c\}$이므로
$b=1$, $c=\dfrac{1}{a}$이라고 할 수 있다.
따라서 $a^3+b^3+c^3=a^3+1^3+\left(\dfrac{1}{a}\right)^3$
$=a^3+1+\dfrac{1}{a^3}$
$=1+1+\dfrac{1}{1}$
$=3$

18. [출제의도] 곱셈공식을 이용하여 일차항의 계수를 구한다.

$<A, B> = A^2+AB+B^2$의 양변에 $(A-B)$를 곱하면
$(A-B) \times <A, B> = (A-B)(A^2+AB+B^2)$
$=A^3-B^3$
이 식에 $A=x^2+x+1$, $B=x^2+x$를 대입하면
$A-B=(x^2+x+1)-(x^2+x)=1$이므로
$1 \times \langle x^2+x+1, x^2+x \rangle = (x^2+x+1)^3-(x^2+x)^3$
$\langle x^2+x+1, x^2+x \rangle = (x^2+x+1)^3-(x^2+x)^3$
우변을 정리하면
$\{x^2+(x+1)\}^3-(x^2+x)^3$
$=x^6+3x^4(x+1)+3x^2(x+1)^2+(x+1)^3-(x^2+x)^3$
$(x+1)^3$ 이외의 항에는 차수가 이차 이상인 항들이 곱해져 있으므로 일차항이 나올 수 없다.
그러므로 $\langle x^2+x+1, x^2+x \rangle$의 전개식에서 x의 계수는 $(x+1)^3$의 x의 계수와 일치한다.

$(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1$에서 x의 계수는 3이다.
따라서 $\langle x^2+x+1,\ x^2+x\rangle$의 전개식에서 x의 계수는 3

[다른 풀이]

$\langle x^2+x+1,\ x^2+x\rangle$
$=(x^2+x+1)^2+(x^2+x+1)(x^2+x)+(x^2+x)^2$
$=3x^4+6x^3+6x^2+3x+1$
따라서 x의 계수는 3

[다른 풀이]

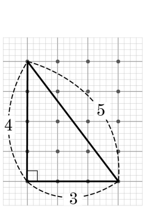
다항식 $\langle x^2+x+1,\ x^2+x\rangle$의 전개식에서 x의 계수를 구할 때, 이차항인 x^2은 의미를 갖지 않는다. 그러므로 $\langle x^2+x+1,\ x^2+x\rangle$의 전개식에서 x의 계수와 $\langle x+1,\ x\rangle$의 전개식에서 x의 계수는 같다.
$\langle x+1,\ x\rangle$의 전개식에서 x의 계수를 구하면
$\langle x+1,\ x\rangle=(x+1)^3-x^3$
$=x^3+3x^2+3x+1-x^3$
$=3x^2+3x+1$
따라서 x의 계수는 3

19. [출제의도] 수의 성질을 이용하여 무리식에 관한 증명을 완성한다.

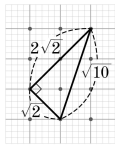
$p^2(n^2-1)=q^2$에서 q^2이 p의 배수이므로 $\dfrac{q^2}{p}$은 자연수이다.
p가 1이 아닌 자연수이면 $p,\,q$가 서로소이므로 $\dfrac{q^2}{p}$은 자연수가 아니다.
그러므로 $p=1$
$p^2(n^2-1)=q^2$에 $p=1$을 대입하면 $n^2-1=q^2$
즉, $n^2=\boxed{q^2+1}$
$\therefore\ f(q)=q^2+1$
$n\ge 2$이고 $q^2=n^2-1\ge 2^2-1=4-1=3$
그러므로 $q^2\ge 3$에서 $q>1$
자연수 k에 대하여
(ⅰ) $q=2k$일 때
$n^2=(2k)^2+1$이므로 $(2k)^2<n^2<\boxed{(2k+1)^2}$
즉, $2k<n<2k+1$을 만족하는 자연수 n은 존재하지 않는다.
(ⅱ) $q=2k+1$일 때
$n^2=(2k+1)^2+1$이므로 $\boxed{(2k+1)^2}<n^2<(2k+2)^2$
$\therefore\ g(k)=(2k+1)^2$
즉, $2k+1<n<2k+2$를 만족하는 자연수 n은 존재하지 않는다.
(ⅰ)과 (ⅱ)에 의하여 $\sqrt{n^2-1}=\dfrac{q}{p}$ ($p,\,q$는 서로소인 자연수)를 만족하는 자연수 n은 존재하지 않는다.
따라서 $\sqrt{n^2-1}$은 무리수이다.
이상에 의해서 $f(2)+g(3)=5+49=54$

20. [출제의도] 실수의 성질을 이해하고 이를 활용한 문제를 해결한다.

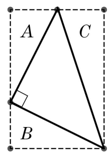
ㄱ. 세 변의 길이가 3, 4, 5인 직각삼각형을 만들 수 있다. (참)



ㄴ. 세 변의 길이가 $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$인 직각삼각형을 만들 수 있다. (참)



ㄷ. 모눈종이 위의 모든 직각삼각형에 대하여 그림과 같이 직사각형을 만들 수 있다. 직사각형의 네 꼭짓점은 간격이 일정한 모눈종이 위의 점들이므로 가로와 세로의 길이는 모두 자연수이다.
그러므로 직사각형의 넓이와 직각삼각형의 넓이 A, B, C는 유리수이다.



(직각삼각형의 넓이)
= (직사각형의 넓이) $-(A+B+C)$
유리수의 집합은 덧셈과 뺄셈에 대하여 닫혀있으므로 직각삼각형의 넓이도 유리수이다. (참)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. [출제의도] 복소수의 곱셈 결과를 추론한다.

A버튼을 한 번 누르면 화면에 나타나는 수는
$\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}$, 두 번 누르면 $\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}\right)^2=i$
세 번 누르면
$\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}\right)^3=\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}\right)^2\times\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}$
$=i\times\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}=\dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}$
두 번 누르면 i이므로 네 번 누르면 $i^2=-1$
그러므로 A버튼을 여덟 번 누르면 화면에 1이 나타난다.
B버튼을 한 번 누르면 화면에 나타나는 수는
$\dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}$, 두 번 누르면 $\left(\dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}\right)^2=-i$
세 번 누르면
$\left(\dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}\right)^3=\left(\dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}\right)^2\times\left(\dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}\right)$
$=-i\times\left(\dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}$
두 번 누르면 $-i$이므로 네 번 누르면 $(-i)^2=-1$
그러므로 B버튼을 여덟 번 누르면 화면에 1이 나타난다.
그런데 A버튼과 B버튼을 한 번씩 누른 결과는
$\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}\times\dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}=-1$
그러므로 A버튼과 B버튼을 두 번씩 누르면 화면에 1이 나타난다.
따라서 화면에 1이 다시 나타날 때까지 버튼을 누른 횟수의 최솟값은 4

[참고]

$\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$에서 $\left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right\}^2=i$이고
$\dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$에서 $\left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\right\}^2=-i$
이므로 $i\times(-i)=1$임을 이용하여 같은 결과를 얻을 수 있다.

22. [출제의도] 이중근호를 풀어 식의 값을 구한다.

$\sqrt{12+2\sqrt{27}}=\sqrt{(9+3)+2\sqrt{9\cdot 3}}$
$=\sqrt{(\sqrt{9}+\sqrt{3})^2}$
$=\sqrt{9}+\sqrt{3}$
$=3+\sqrt{3}$
따라서 $a+b=3+3=6$

23. [출제의도] 유리식을 정리하여 식의 값을 구한다.

$\dfrac{(a-5)^2}{a-b}+\dfrac{(b-5)^2}{b-a}=\dfrac{(a-5)^2}{a-b}-\dfrac{(b-5)^2}{a-b}$
$=\dfrac{(a-5)^2-(b-5)^2}{a-b}$
$=\dfrac{(a^2-10a+25)-(b^2-10b+25)}{a-b}$
$=\dfrac{a^2-10a+25-b^2+10b-25}{a-b}$
$=\dfrac{a^2-b^2-10a+10b}{a-b}$
$=\dfrac{(a+b)(a-b)-10(a-b)}{a-b}$
$=\dfrac{(a+b-10)(a-b)}{a-b}$
$=a+b-10=0$
따라서 $a+b=10$

24. [출제의도] 다항식의 최대공약수와 최소공배수의 정의를 이용하여 미정계수를 정한다.

두 다항식 A와 B를 인수분해하면
$A=(x-1)(x-3)$
$B=(x+2)(x-3)$
이므로 A와 B의 최대공약수인 $A\triangle B$는
$A\triangle B=x-3$
이고
$(A\triangle B)\nabla C=(x-3)\nabla(x^3+4x^2+x-a)$
가 된다.
$(A\triangle B)\nabla C$는 $x-3$과 x^3+4x^2+x-a의 최소공배수이고, 이 최소공배수가 x에 대한 삼차식이므로 $x-3$은 x^3+4x^2+x-a의 인수이다.
$f(x)=x^3+4x^2+x-a$라 할 때,
인수정리에 의해 $f(3)=0$이므로
$f(3)=3^3+4\times 3^2+3-a=0$
따라서 $a=27+36+3=66$

25. [출제의도] 항등식의 성질을 이용하여 나머지를 구한다.

x^4을 $x-1$로 나눈 몫이 $q(x)$, 나머지가 r_1이므로
$x^4=(x-1)q(x)+r_1$ ⋯ ㉠
$q(x)$를 $x-4$로 나눈 나머지가 r_2이므로 몫을 $q_1(x)$라 하면
$q(x)=(x-4)q_1(x)+r_2$ ⋯ ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면
$x^4=(x-1)\{(x-4)q_1(x)+r_2\}+r_1$ ⋯ ㉢
㉢의 양변에 $x=4$를 대입하면
$4^4=3\times r_2+r_1$
따라서 $r_1+3r_2=256$

[다른 풀이]

x^4을 $x-1$로 나눈 몫이 $q(x)$이고 나머지가 r_1이므로
$x^4=(x-1)q(x)+r_1$
이 식에 $x=1$을 대입하면 $r_1=1$
$x^4=(x-1)q(x)+1$에서
$x^4-1=(x-1)(x^3+x^2+x+1)$이 된다.
그러므로 $q(x)=x^3+x^2+x+1$
$q(x)$를 $x-4$로 나눈 몫을 $q_1(x)$라 하면
$x^3+x^2+x+1=(x-4)q_1(x)+r_2$
이 식에 $x=4$를 대입하면
$4^3+4^2+4+1=(4-4)\times q_1(4)+r_2$
그러므로 $r_2=64+16+4+1=85$
따라서 $r_1+3r_2=1+3\times 85=256$

[다른 풀이]

다항식 x^4을 $x-1$로 나누고 그 몫을 다시 $x-4$로 나누면

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline
 & 1 & 1 & 1 & 1 & \lfloor 1 \\
4 & & 4 & 20 & 84 & \\ \hline
 & 1 & 5 & 21 & \lfloor 85 &
\end{array}
$$

$x^4=(x-1)(x^3+x^2+x+1)+1$

$\quad=(x-1)\{(x-4)(x^2+5x+21)+85\}+1$

그러므로 $r_1=1$이고 $r_2=85$

따라서 $r_1+3r_2=1+3\times85=256$

26. [출제의도] 무리식이 서로 같음을 이용하여 b의 최댓값을 구한다.

$a-1-b=2\sqrt{b}$ 에서 a, b가 자연수이므로 $a-1-b$는 정수이다.

따라서 $\sqrt{b}$ 도 정수이므로 b는 제곱수이다.

50이하의 제곱수는 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49이다.

b의 최댓값을 구하기 위해 큰 수부터 대입해보면

(i) $b=49$인 경우

$a-1-49=2\sqrt{49}=14$

$\therefore\ a=64$

a가 50 이하이므로 $b\neq49$

(ii) $b=36$인 경우

$a-1-36=2\sqrt{36}=12$

$\therefore\ a=49$

따라서 b의 최댓값은 36

27. [출제의도] 무리식을 정리하여 실생활 문제를 해결한다.

$\omega=\dfrac{1}{2L}\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$ 에서 밀도 ρ를 다른 세 변수 L, T, ω에 대한 식으로 나타내면

$\omega^2=\dfrac{1}{4L^2}\cdot\dfrac{T}{\rho}$

$\rho=\dfrac{T}{4\omega^2L^2}$

A, B의 길이를 모두 L이라 하자.

A의 장력을 T_A, 밀도를 ρ_A, 주파수를 ω_A라 하고

B의 장력을 T_B, 밀도를 ρ_B, 주파수를 ω_B라 하면

$\rho_A=\dfrac{T_A}{4{\omega_A}^2L^2}$, $\rho_B=\dfrac{T_B}{4{\omega_B}^2L^2}$

이다.

$T_A=3T_B$, $\omega_A=\dfrac{\omega_B}{2}$ 이므로

$$
\begin{aligned}
\rho_A&=\frac{T_A}{4{\omega_A}^2L^2}\\
&=\frac{3T_B}{4\times\dfrac{{\omega_B}^2}{4}\times L^2}\\
&=\frac{12T_B}{4{\omega_B}^2L^2}\\
&=12\rho_B
\end{aligned}
$$

A의 밀도는 B의 밀도의 12배

따라서 $n=12$

28. [출제의도] 조건에 맞게 다항식을 세워 식의 값을 구한다.

조건 (가)에서 $(x-3)(y-3)(2z-3)=0$ ⋯ ㉠

조건 (나)에서 $3(x+y+2z)=xy+2yz+2zx$ ⋯ ㉡

㉠에서

$(x-3)(y-3)(2z-3)$

$=(xy-3x-3y+9)(2z-3)$

$=2xyz-6xz-6yz+18z-3xy+9x+9y-27$

$=2xyz-3(xy+2yz+2zx)+9(x+y+2z)-27=0$

㉡을 이 식에 대입하면

$2xyz-3(xy+2yz+2zx)+9(x+y+2z)-27$

$=2xyz-3\{3(x+y+2z)\}+9(x+y+2z)-27$

$=2xyz-9(x+y+2z)+9(x+y+2z)-27$

$=2xyz-27=0$

그러므로 $xyz=\dfrac{27}{2}$

따라서 $10xyz=135$

[다른 풀이]

x, y, $2z$ 중에서 적어도 하나는 3이다. (나)의 식에서 $3(x+y+2z)=xy+y(2z)+(2z)x$이므로 $x=3$을 조건 (나)의 식에 대입하여 문제를 풀어도 일반성을 잃지 않는다.

그러므로 $x=3$이라고 가정하면

$3(x+y+2z)=3(3+y+2z)$

$\qquad\qquad\quad=9+3y+6z$

$xy+2yz+2zx=3y+2yz+6z$

이므로

$9+3y+6z=3y+2yz+6z$

$\therefore\ 9=2yz$

따라서 $10xyz=10\times3\times\dfrac{9}{2}$

$\qquad\qquad=135$

29. [출제의도] 주어진 상황에 맞게 이차식을 세우고 그 값을 구한다.

$\sqrt{3}=x$라고 하면

A 색종이 한 장의 넓이는 x^2

B 색종이 한 장의 넓이는 $2x$

C 색종이 한 장의 넓이는 1

A 색종이 5장, B 색종이 11장, C 색종이 8장을 겹치지 않게 빈틈없이 이어 붙여서 만든 직사각형의 넓이는 $5x^2+22x+8$이다.

이 식을 자연수 계수를 갖는 두 일차식의 곱으로 표현하면

$5x^2+22x+8=(5x+2)(x+4)$

즉, 직사각형의 두 변의 길이는

$5x+2$, $x+4$

로 나타낼 수 있다.

$\therefore$ 구하는 직사각형의 둘레의 길이는

$2(5x+2)+2(x+4)=10x+4+2x+8$

$\qquad\qquad\qquad\quad=12x+12$

$\qquad\qquad\qquad\quad=12+12\sqrt{3}$

따라서 $a=12$, $b=12$이고 $a+b=24$

[참고]

색종이 24장 각각의 넓이의 합 S는

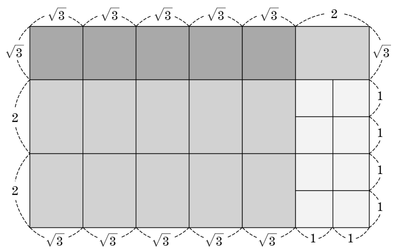
$S=5\cdot(\sqrt{3}\times\sqrt{3})+11\cdot(2\times\sqrt{3})+8\cdot(1\times1)$

$\ =5\cdot(\sqrt{3})^2+22\cdot(\sqrt{3})+8$

$\ =(5\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}+4)$

이므로 $5\sqrt{3}+2$와 $\sqrt{3}+4$를 두 변으로 하는 직사각형의 넓이 $(5\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}+4)$와 같다.

따라서 24장의 색종이를 겹치지 않게 빈틈없이 이어 붙인 직사각형의 두 변의 길이는 $5\sqrt{3}+2$와 $\sqrt{3}+4$이다.



30. [출제의도] 나머지정리를 이용하여 배수 문제를 해결한다.

$$
\begin{aligned}
n^4+n^2-2&=(n^2-1)(n^2+2)\\
&=(n-1)(n+1)(n^2+2)\\
&=(n-1)(n^3+n^2+2n+2)\\
&=(n-1)\{(n-2)(n^2+3n+8)+18\}\\
&=(n-1)(n-2)(n^2+3n+8)+18(n-1)\ \cdots\ ㉠
\end{aligned}
$$

$(n-1)(n-2)(n^2+3n+8)$이 $(n-1)(n-2)$의 배수이므로 ㉠이 $(n-1)(n-2)$의 배수가 되기 위해서는 $18(n-1)$이 $(n-1)(n-2)$의 배수가 되어야 한다.

즉, $18(n-1)=(n-1)(n-2)k$ (단, k는 자연수)

$18=(n-2)k$이고, k가 최솟값을 가질 때 n이 최댓값을 가지므로 $k=1$일 때 n이 최대이다.

따라서 $n=20$

[다른 풀이]

n^4+n^2-2를 조립제법을 사용하여 $(n-1)(n-2)$로 나누면 다음과 같다.

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\
1 & & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline
 & 1 & 1 & 2 & 2 & \lfloor 0 \\
2 & & 2 & 6 & 16 & \\ \hline
 & 1 & 3 & 8 & \lfloor 18 &
\end{array}
$$

n^4+n^2-2를 $n-1$로 나눈 몫은 n^3+n^2+2n+2, 나머지는 0이므로

$n^4+n^2-2=(n-1)(n^3+n^2+2n+2)$

n^3+n^2+2n+2를 $n-2$로 나눈 몫은 n^2+3n+8, 나머지는 18이다.

그러므로 식을 정리하면

$n^4+n^2-2=(n-1)(n-2)(n^2+3n+8)+18(n-1)$

문제의 조건에서 $(n-1)(n-2)(n^2+3n+8)+18(n-1)$은 $(n-1)(n-2)$의 배수이다.

그런데 $(n-1)(n-2)(n^2+3n+8)$이 $(n-1)(n-2)$의 배수이므로 $18(n-1)$도 $(n-1)(n-2)$의 배수가 되어야 한다.

$18(n-1)=(n-1)(n-2)k$ (단, k는 자연수)

$18=(n-2)k$

k가 최솟값을 가질 때 n이 최댓값을 가지므로 $k=1$일 때 n이 최대이다.

따라서 $n=20$

[참고]

n^4+n^2-2를 $(n-1)(n-2)$로 나누면

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & n^2 & +3n & +8 & & \\ \hline
n^2-3n+2 & n^4 & & +n^2 & & -2 \\
 & n^4 & -3n^3 & +2n^2 & & \\ \hline
 & & 3n^3 & -n^2 & & \\
 & & 3n^3 & -9n^2 & 6n & \\ \hline
 & & & 8n^2 & -6n & \\
 & & & 8n^2 & -24n & 16 \\ \hline
 & & & & 18n & -18
\end{array}
$$

$n^4+n^2-2=(n-1)(n-2)(n^2+3n+8)+18n-18$이다.

$(n-1)(n-2)(n^2+3n+8)$은 $(n-1)(n-2)$의 배수이므로 n^4+n^2-2가 $(n-1)(n-2)$의 배수가 되기 위해서는 $18n-18$이 $(n-1)(n-2)$의 배수이어야 한다.

따라서

$18n-18=18(n-1)=k(n-1)(n-2)$ (단, k는 자연수)

라고 할 수 있다.

양변을 $n-1$로 나누면

$18=k(n-2)$

$n-2=1, 2, 3, 6, 9, 18$이고

$n=3, 4, 5, 8, 11, 20$이다.

(i) $n=3$이면

$n^4+n^2-2=88$, $(n-1)(n-2)=2$이고 88은 2의 배수 $(88=2\times44)$

(ii) $n=4$이면

$n^4+n^2-2=270$, $(n-1)(n-2)=6$이고 270은 6의 배수 $(270=6\times45)$

(iii) $n=5$이면

$n^4+n^2-2=648$, $(n-1)(n-2)=12$이고 648은 12의 배수 $(648=12\times54)$

(iv) $n=8$이면

$n^4+n^2-2=4158$, $(n-1)(n-2)=42$이고 4158은 42의 배수 $(4158=42\times99)$

(ⅴ) $n=11$이면

$n^4+n^2-2=14760$, $(n-1)(n-2)=90$이고 14760은 90의 배수 ($14760=90\times164$)

(ⅵ) $n=20$이면

$n^4+n^2-2=160398$, $(n-1)(n-2)=342$이고 160398은 342의 배수 ($160398=342\times469$)

$\therefore$ $n=3, 4, 5, 8, 11, 20$일 때 n^4+n^2-2는 $(n-1)(n-2)$의 배수이다.

따라서 $n=20$