2013학년도 4월 고3 전국연합학력평가
정답 및 해설

• 2교시 수학 영역 •

[A 형]

1	①	**2**	③	**3**	②	**4**	①	**5**	⑤
6	⑤	**7**	①	**8**	⑤	**9**	③	**10**	④
11	④	**12**	③	**13**	③	**14**	②	**15**	①
16	⑤	**17**	④	**18**	④	**19**	④	**20**	③
21	②	**22**	99	**23**	4	**24**	23	**25**	14
26	15	**27**	13	**28**	3	**29**	150	**30**	252

1. [출제의도] 지수법칙을 알고 계산하기

$2\times 4^{-\frac{3}{2}}=2\times 2^{-3}=2^{-2}=\dfrac{1}{4}$

2. [출제의도] 행렬의 실수배의 뜻을 알고 계산하기

$\dfrac{1}{2}A=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\ \frac{1}{2}&\frac{3}{2}\end{pmatrix}$

따라서 행렬 $\dfrac{1}{2}A$의 모든 성분의 합은 3

3. [출제의도] 무한등비수열의 극한 이해하기

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 3^n-2}{3^{n+1}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{3}-\frac{2}{3^{n+1}}}{1+\frac{1}{3^{n+1}}}=\frac{2}{3}$

4. [출제의도] 함수의 연속의 뜻 이해하기

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=2$에서 연속이어야 한다.

$f(2)=\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+1)=3$

따라서 $a=3$

5. [출제의도] 등차수열의 일반항 이해하기

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 이 수열의 일반항

$a_n=3+(n-1)d$

$a_5=a_3+4$에서 $3+4d=(3+2d)+4$이므로 $d=2$

$\therefore\ a_n=2n+1$

$a_n=2n+1>100$이므로 $n>\dfrac{99}{2}=49.5$

따라서 자연수 n의 최솟값은 50

6. [출제의도] 무한등비수열의 수렴 이해하기

수열 $\left\{\left(\dfrac{2x-1}{5}\right)^n\right\}$이 수렴하므로 $-1<\dfrac{2x-1}{5}\le 1$

$-5<2x-1\le 5,\ -2<x\le 3$

따라서 정수 x는 $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$이므로 x의 값의 합은 5

7. [출제의도] 지수부등식 이해하기

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2+1}>\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2(x+2)}$에서 $x^2+1<2(x+2)$

$x^2-2x-3<0,\ (x+1)(x-3)<0$

$\therefore\ -1<x<3$

따라서 $\alpha=-1,\ \beta=3$이므로 $\beta-\alpha=4$

8. [출제의도] 로그의 뜻을 알고 이해하기

$a=\log_3\sqrt{7+2\sqrt{12}}=\log_3(2+\sqrt{3})$이므로

$3^a=2+\sqrt{3},\ 3^{-a}=2-\sqrt{3}$

$\dfrac{3^a-3^{-a}}{3^a+3^{-a}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

9. [출제의도] 로그부등식 이해하기

$x>4,\ x>1$이므로 $x>4$ …… ㉠

$\log_2(x-4)^2\le\log_2 4(x-1)$

$(x-4)^2\le 4(x-1)$

$x^2-12x+20\le 0,\ (x-2)(x-10)\le 0$

$2\le x\le 10$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $4<x\le 10$

따라서 자연수 x는 5, 6, 7, 8, 9, 10이므로 x의 개수는 6

10. [출제의도] 수열의 극한의 성질 이해하기

(가)에서 $\dfrac{6(2n^3+3)}{n(n+1)(2n+1)}<a_n<2b_n$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{6(2n^3+3)}{n(n+1)(2n+1)}=6$이고,

(나)에서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=3,\ \lim_{n\to\infty}2b_n=6$이므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=6$

11. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$x-1=t$라 하면

$\displaystyle\lim_{x\to 1+0}f(x-1)=\lim_{t\to+0}f(t)=0$

따라서 $\displaystyle\lim_{x\to -1}f(x)+\lim_{x\to 1+0}f(x-1)=1+0=1$

12. [출제의도] 등비중항 이해하기

$\mathrm{A}(k,3\sqrt{k}),\ \mathrm{B}(k,\sqrt{k}),\ \mathrm{C}(k,0)$에서

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{k},\ \overline{\mathrm{OC}}=k,\ \overline{\mathrm{AC}}=3\sqrt{k}$

$\sqrt{k},\ k,\ 3\sqrt{k}$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$k^2=\sqrt{k}\cdot 3\sqrt{k},\ k^2=3k,\ k(k-3)=0$

따라서 $k=3(\because\ k>0)$

13. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\displaystyle\lim_{k\to+0}\frac{\overline{\mathrm{OA}}-\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{OB}}-\overline{\mathrm{BC}}}=\lim_{k\to+0}\frac{\sqrt{k^2+9k}-3\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}-\sqrt{k}}$

$\displaystyle=\lim_{k\to+0}\frac{\sqrt{k+9}-3}{\sqrt{k+1}-1}=\lim_{k\to+0}\frac{k(\sqrt{k+1}+1)}{k(\sqrt{k+9}+3)}$

$\displaystyle=\lim_{k\to+0}\frac{\sqrt{k+1}+1}{\sqrt{k+9}+3}=\frac{1}{3}$

14. [출제의도] 등비수열의 합을 이용하여 문제해결하기

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_1a_2=a_{10}$에서 $a\cdot ar=ar^9$

$a>0,\ r>0$이므로 $a=r^8$ …… ㉠

$a_1+a_9=20$에서 $a+ar^8=20$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a+a^2=20,\ a^2+a-20=0$

$(a+5)(a-4)=0$이므로 $a=4(\because\ a>0)$

㉠에 $a=4$를 대입하면 $r^8=4,\ r^4=2$이고

$r^{20}=(r^8)^2r^4=4^2\times 2=32$

$(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)(a_1-a_3+a_5-a_7+a_9)$

$=\dfrac{a\{1-(r^2)^5\}}{1-r^2}\cdot\dfrac{a\{1-(-r^2)^5\}}{1-(-r^2)}$

$=\dfrac{a(1-r^{10})}{1-r^2}\cdot\dfrac{a(1+r^{10})}{1+r^2}=\dfrac{a^2(1-r^{20})}{1-r^4}$

$=\dfrac{4^2(1-32)}{1-2}=16\times 31=496$

15. [출제의도] 로그방정식을 이용하여 문제해결하기

어느 맥동변광성의 반지름의 길이가 $5.88\times 10^6(\mathrm{km})$, 표면온도가 $5000(\mathrm{K})$일 때의 절대등급이 0.7이었고, 이 맥동변광성이 수축하여 반지름의 길이가 $R(\mathrm{km})$, 표면온도가 $7000(\mathrm{K})$일 때의 절대등급이 -0.3이었으므로

$-0.3-0.7=5\log\dfrac{5.88\times 10^6}{R}+10\log\dfrac{5000}{7000}$

$-1=5\log\dfrac{5.88\times 10^6}{R}+10\log\dfrac{5}{7}$

$-0.2=\log\dfrac{5.88\times 10^6}{R}+2\log\dfrac{5}{7}$

$=\log\dfrac{\frac{588}{100}\times 10^6\times 25}{49R}$

$=\log\dfrac{3\times 10^6}{R}$

$10^{-0.2}=\dfrac{3\times 10^6}{R}$

따라서 $R=3\times 10^{6.2}$

16. [출제의도] 행렬의 연산을 활용하여 추론하기

ㄱ. $B^2=B-E$에서 $B-B^2=E$

$B(E-B)=(E-B)B=E$이므로 $B^{-1}=E-B$

$\therefore$ 행렬 B가 역행렬을 갖는다. (참)

ㄴ. $A^2+B=E$에서 $B=E-A^2$이므로

$AB=A-A^3$이고 $BA=A-A^3$이다.

$\therefore\ AB=BA$ (참)

ㄷ. $A^2=E-B,\ B^2=B-E$에서

$A^4=(E-B)^2=E-2B+B^2$

$=E-2B+B-E=-B$

$A^6=A^4A^2=B^2-B=-E$

$\therefore\ A^{12}=(A^6)^2=E$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. [출제의도] 행렬을 이용하여 문제해결하기

문제의 조건을 만족시키는

연립일차방정식 $\begin{cases}x+y=500\\7x+2y=2500\end{cases}$을 행렬로 나타내면

$\begin{pmatrix}1&1\\7&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}500\\2500\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=-\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}2&-1\\-7&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}500\\2500\end{pmatrix}$

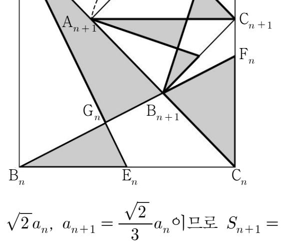
$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=100\begin{pmatrix}-2&1\\7&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$

$\therefore\ a=1,\ b=7$

따라서 $a+b=8$

18. [출제의도] 무한급수를 활용하여 추론하기

그림과 같이 n번째 정사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$의 한 변의 길이를 a_n이라 하자.



$3a_{n+1}=\sqrt{2}a_n,\ a_{n+1}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}a_n$이므로 $S_{n+1}=\dfrac{2}{9}S_n$

$\triangle A_1B_1E_1 \backsim \triangle B_1G_1E_1$에서 $\overline{A_1E_1} : \overline{B_1E_1} = \sqrt{5} : 1$이므로
$\triangle A_1B_1E_1 : \triangle B_1G_1E_1 = 5 : 1$

$\therefore\ \triangle B_1G_1E_1 = \dfrac{1}{5}$

점 B_2는 $\triangle B_1C_1D_1$의 무게중심이므로

$\triangle C_1F_1B_2 = \dfrac{1}{6}\triangle B_1C_1D_1 = \dfrac{1}{3}$

$\triangle A_1E_1C_1$과 $\triangle B_1C_1F_1$의 공통부분이 $\square E_1C_1B_2G_1$이고, $\triangle A_1E_1C_1 = \triangle B_1C_1F_1$이므로

$\triangle A_1G_1B_2 = \triangle B_1E_1G_1 + \triangle C_1F_1B_2 = \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{8}{15}$

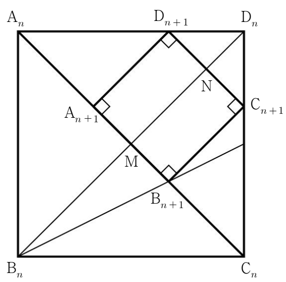
$S_1 = \triangle A_1G_1B_2 + \triangle B_1E_1G_1 + \triangle C_1F_1B_2$

$\quad = 2\triangle A_1G_1B_2 = \dfrac{16}{15}$

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\dfrac{16}{15}$이고 공비가 $\dfrac{2}{9}$인 등비수열이므로

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{16}{15}}{1-\frac{2}{9}} = \frac{48}{35}$이다.

[참고] $\square A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$은 정사각형이다.



정사각형 $A_nB_nC_nD_n$에서 두 선분 A_nC_n, $C_{n+1}D_{n+1}$이 선분 B_nD_n과 만나는 점을 각각 M, N이라 하자.

$\triangle B_{n+1}C_nC_{n+1}$이 직각이등변삼각형이므로

$\overline{B_{n+1}C_{n+1}} = \overline{C_nB_{n+1}}$이고

점 B_{n+1}은 $\triangle B_nC_nD_n$의 무게중심이므로

$\overline{C_nB_{n+1}} = 2\,\overline{B_{n+1}M}$

$\therefore\ \overline{B_{n+1}C_{n+1}} = 2\,\overline{B_{n+1}M}$ …… ㉠

$\angle B_{n+1} = \angle C_{n+1} = 90^\circ$, $\overline{A_nC_n} \perp \overline{B_nD_n}$로

$\square MB_{n+1}C_{n+1}N$이 직사각형이므로

$\overline{B_{n+1}M} = \overline{C_{n+1}N}$,

$\triangle NC_{n+1}D_n$과 $\triangle ND_nD_{n+1}$이 직각이등변삼각형이므로

$\overline{C_{n+1}N} = \overline{ND_{n+1}}$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $\overline{B_{n+1}C_{n+1}} = \overline{C_{n+1}D_{n+1}}$

따라서 $\square A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$은 정사각형

19. [출제의도] 지수함수의 그래프의 대칭이동과 평행이동을 활용하여 문제해결하기

함수 $y = 2^{x-2}$의 역함수는 $y = \log_2 x + 2$이고,
함수 $y = \log_2 x + 2$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동시키면
함수 $y = \log_2(x+2) + a + 2$의 그래프가 된다.
두 함수 $f(x) = 2^{x-2}$, $g(x) = \log_2(x+2) + a + 2$의 그래프가 직선 $y=1$과 만나는 점은
각각 $A(2, 1)$, $B(2^{-a-1}-2, 1)$이다.
선분 AB의 중점의 좌표가 $(8, 1)$이므로

$\dfrac{2+2^{-a-1}-2}{2} = 8$, $2^{-a-1} = 16 = 2^4$, $-a-1 = 4$

따라서 $a = -5$

20. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이해하여 추론하기

$p = -10$, $f(n) = 2^{n-1}$, $g(n) = 2^n - 1$

따라서

$\dfrac{2\times p\times g(10)}{5\times f(3)} = \dfrac{2\times(-10)\times(2^{10}-1)}{5\times 2^2} = -1023$

21. [출제의도] 함수의 연속의 뜻을 이해하여 추론하기

$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \neq 0) \\ 2 & (x = 0) \end{cases}$, $g(t) = \begin{cases} 0 & (t \le -1) \\ 1 & (-1 < t < 1) \\ 0 & (t \ge 1) \end{cases}$

ㄱ. $g(0) = 1$ (참)

ㄴ. $\displaystyle\lim_{x\to 1-0} g(x) + \lim_{x\to -1+0} g(x) = 1 + 1 = 2$ (참)

ㄷ. $\displaystyle\lim_{x\to -0}\frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to +0}\frac{g(x)}{f(x)} = 1$, $\dfrac{g(0)}{f(0)} = \dfrac{1}{2}$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{f(x)} \neq \frac{g(0)}{f(0)}$

$\therefore$ 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$는 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

22. [출제의도] 여러 가지 수열 이해하기

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$

이므로 $n+1 = 100$

따라서 $n = 99$

23. [출제의도] 연립방정식과 행렬 이해하기

연립일차방정식 $\begin{pmatrix} 1-k & 2 \\ 4 & 3-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$가

$x=0$, $y=0$ 이외의 해를 가지므로

$(1-k)(3-k) - 8 = 0$, $k^2 - 4k - 5 = 0$

$\therefore$ 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실근의 합은 4

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 4

24. [출제의도] 로그함수의 그래프의 성질 이해하기

함수 $y = \log_{\frac{1}{3}}(x+a)$는 밑이 $\dfrac{1}{3}$이므로

x가 증가할 때 y가 감소한다.

$\therefore$ $x = 4$일 때 최댓값 -3을 갖는다.

$-3 = \log_{\frac{1}{3}}(4+a)$, $4 + a = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3} = 27$

따라서 $a = 23$

25. [출제의도] 함수의 극한의 성질을 활용하여 문제해결하기

(가), (나)에서 함수 $f(x)$는 $x-1$을 인수로 갖는 일차함수 또는 이차함수이므로

$f(x) = (ax+b)(x-1)$이라 하면

(나)에서 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{(ax+b)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(ax+b) = 1$

$a + b = 1$ …… ㉠

(다)에서 $f(2) = 4$이므로 $2a + b = 4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a = 3$, $b = -2$

$\therefore\ f(x) = (3x-2)(x-1)$

따라서 $f(3) = 14$

26. [출제의도] 지수방정식과 로그방정식을 활용하여 문제해결하기

$\log_2(x-2) - \log_2 y = 1$에서 $\log_2\dfrac{x-2}{y} = 1$

$\dfrac{x-2}{y} = 2$, $2y = x - 2$ …… ㉠

$2^x - 2\cdot 4^{-y} = 7$에서 $2^x - 2\cdot 2^{-2y} = 7$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $(2^x)^2 - 7\cdot 2^x - 8 = 0$

$2^x = t\,(t > 0)$라 하면 $t^2 - 7t - 8 = 0$

$(t+1)(t-8) = 0$, $t = 8\ (\because\ t > 0)$

$2^x = 8$이므로 $x = 3$, ㉠에 대입하면 $y = \dfrac{1}{2}$

따라서 $\alpha = 3$, $\beta = \dfrac{1}{2}$이므로 $10\alpha\beta = 15$

27. [출제의도] 알고리즘과 순서도를 이해하여 추론하기

n	S
1	$3 = 3$
3	$3+3 = 6$
5	$3+3+5 = 11$
7	$3+3+5+7 = 18$
9	$3+3+5+7+9 = 27$
11	$3+3+5+7+9+11 = 38$
13	$3+3+5+7+9+11+13 = 51$

따라서 인쇄되는 n의 값은 13

28. [출제의도] 행렬의 정의를 이해하여 문제해결하기

$a_{ij} + a_{ji} = 0$에서 $a_{ij} = -a_{ji}$이므로

$a_{11} = 0$, $a_{12} = -a_{21}$, $a_{22} = 0$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix}$

$b_{ij} - b_{ji} = 0$에서 $b_{ij} = b_{ji}$이므로 $b_{12} = b_{21}$

$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}$

$2A - B = 2\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}$

$\qquad = \begin{pmatrix} -b_{11} & 2a_{12} - b_{12} \\ -2a_{12} - b_{12} & -b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

$-b_{11} = 1$에서 $b_{11} = -1$, $-b_{22} = 4$에서 $b_{22} = -4$

$2a_{12} - b_{12} = 2$ …… ㉠, $-2a_{12} - b_{12} = -2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a_{12} = 1$, $b_{12} = 0$

$\therefore\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

$A^2 - B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 $A^2 - B$의 $(2, 2)$성분은 3

29. [출제의도] 지표와 가수의 성질을 이해하여 문제해결하기

(가)에서 (x의 자릿수) < (y의 자릿수) < (z의 자릿수)

(나)에서 자연수 x, y, z의 숫자 배열은 모두 같다.

(다)에서 자연수 x는 두 자릿수 또는 세 자릿수이다.

i) x가 두 자릿수인 경우

① $y = 10x$, $z = 10^2x$일 때,

$x + y + z = x + 10x + 10^2x = 111x$

$111x = 15873$인 두 자릿수 자연수 x는 존재하지 않는다.

② $y = 10x$, $z = 10^3x$일 때,

$x + y + z = x + 10x + 10^3x = 1011x$

$1011x = 15873$인 자연수 x는 존재하지 않는다.

③ $y = 10^2x$, $z = 10^3x$일 때,

$x + y + z = x + 10^2x + 10^3x = 1101x$

$1101x = 15873$인 자연수 x는 존재하지 않는다.

ii) x가 세 자릿수인 경우

$y = 10x$, $z = 10^2x$일 때,

$x + y + z = x + 10x + 10^2x = 111x = 15873$

$\therefore\ x = 143$, $y = 1430$, $z = 14300$

i), ii)에 의하여 $x = 143$, $y = 1430$, $z = 14300$

따라서 $x + f(y) + f(z) = 143 + 3 + 4 = 150$

30. [출제의도] 여러 가지 수열을 이해하여 추론하기

자연수 n에 대하여 $2n$행의 첫 번째 원 안에 써넣은 수를 차례로 나열하여 만든 수열 2, 6, 12, 20, … 을

$\{a_n\}$이라 하면 이 수열의 일반항

$a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k+2) = n^2 + n$이므로

20행의 첫 번째 원 안에 써 넣은 수 $a_{10} = 110$

20행에 나열된 원 안에 써 넣은 수는

110부터 연속되는 21개의 자연수이므로 그 합

$S = \frac{21(2 \times 110 + 20)}{2} = 2520$

따라서 $\frac{1}{10}S = 252$