2014학년도 대학수학능력시험 대비

2013학년도 3월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

수학 B형 정답

1	④	2	⑤	3	④	4	⑤	5	①
6	③	7	③	8	⑤	9	①	10	②
11	②	12	⑤	13	③	14	④	15	③
16	②	17	④	18	①	19	①	20	②
21	③	22	128	23	7	24	41	25	60
26	125	27	12	28	5	29	33	30	13

해 설

1. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 로그의 뺄셈을 계산한다.

$\log_2 6-\log_2\dfrac{3}{8}$

$=\log_2\left(6\times\dfrac{8}{3}\right)$

$=\log_2 16$

$=\log_2 2^4$

$=4$

2. [출제의도] 삼차함수의 도함수를 이용하여 미분계수를 계산한다.

$f'(x)=x^2+x+1$이므로

$f'(1)=1^2+1+1=3$

3. [출제의도] 치환을 이용하여 지수함수의 극한값을 계산한다.

$-x=t$라 하면

$x\to 0$일 때 $t\to 0$이고, $x=-t$이므로

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-x}}{x}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-e^{t}}{-t}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^{t}-1}{t}$

$=1$

[다른 풀이]

$f(x)=1-e^{-x}$라 하면 $f(0)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$

$f'(x)=e^{-x}$이므로 $f'(0)=1$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-x}}{x}=1$

4. [출제의도] 삼각함수의 배각공식을 이용하여 삼각함수의 값을 구한다.

$\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$이므로

$\tan\theta=t$라 하면

$\dfrac{2t}{1-t^2}=\dfrac{3}{4}$

$8t=3-3t^2$

$3t^2+8t-3=0$

$(3t-1)(t+3)=0$

$\therefore\ t=\dfrac{1}{3}$ 또는 $t=-3$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$이므로 $t>0$

$\therefore\ \tan\theta=\dfrac{1}{3}$

5. [출제의도] 거듭제곱근의 뜻을 이해하여 지수방정식의 해를 구한다.

4의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{4}$이므로

$a=\sqrt[3]{4}=2^{\frac{2}{3}}$

따라서 주어진 방정식은

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1}=2^{\frac{2}{3}}$

$2^{-(x+1)}=2^{\frac{2}{3}}$

$-x-1=\dfrac{2}{3}$

$\therefore\ x=-\dfrac{5}{3}$

6. [출제의도] 무한급수와 수열의 극한 사이의 관계를 이용하여 극한값을 구한다.

무한급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{b_n}{n}$이 수렴하므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{n}=0$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n+4n}{b_n+3n-2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{a_n}{n}+4}{\dfrac{b_n}{n}+3-\dfrac{2}{n}}$

$=\dfrac{1+4}{0+3-0}$

$=\dfrac{5}{3}$

7. [출제의도] 역행렬의 성질을 이용하여 행렬의 성분을 구한다.

A의 역행렬이 존재하면 $AX=O$에서

$A^{-1}AX=A^{-1}O$이므로 $X=O$이다.

따라서 행렬 X가 무수히 많다는 조건에 모순이므로 A의 역행렬은 존재하지 않는다.

$(a-1)(a+1)-3a=0$

$a^2-3a-1=0$

이때 이 이차방정식의 판별식 $D>0$이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에서 모든 실수 a의 합은 3이다.

[참고]

실제로 $a^2-3a-1=0$이면

$\begin{pmatrix}a-1 & 1\\ 3a & a+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

$\begin{cases}(a-1)x+y=0 & \cdots ㉠\\ 3ax+(a+1)y=0 & \cdots ㉡\end{cases}$

이때 $3a=a^2-1$이므로

㉡에서 $(a^2-1)x+(a+1)y=0$

$(a+1)\{(a-1)x+y\}=0$

$(a-1)x+y=0\ (\because\ a\neq 1)$

따라서 직선 $(a-1)x+y=0$ 위의 모든 점 (x, y)에 대하여 $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$는 $AX=O$를 만족시키므로 등식 $AX=O$를 만족시키는 X는 무수히 많다.

8. [출제의도] 다항함수의 극한의 성질을 이용하여 함숫값을 구한다.

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-x^2}{x}=3$이므로

$f(x)-x^2$은 일차항의 계수가 3인 일차식이다.

$f(x)-x^2=3x+a$에서

$f(x)=x^2+3x+a$

이때 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{(x-1)f(x)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{f(x)}=1$이므로

$\dfrac{2}{f(1)}=1$ 즉, $f(1)=2$이다.

$f(1)=1+3+a=2$에서

$a=-2$

따라서 $f(x)=x^2+3x-2$이므로

$f(2)=2^2+3\cdot 2-2=8$

9. [출제의도] 합성함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구한다.

주어진 조건에서 $f'(2)=2$이다.

$g(x)=f(\sqrt{x})$라 하면

$g'(x)=f'(\sqrt{x})\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

따라서 구하는 미분계수는

$g'(4)=f'(\sqrt{4})\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{4}}$

$=f'(2)\cdot\dfrac{1}{4}$

$=2\cdot\dfrac{1}{4}$

$=\dfrac{1}{2}$

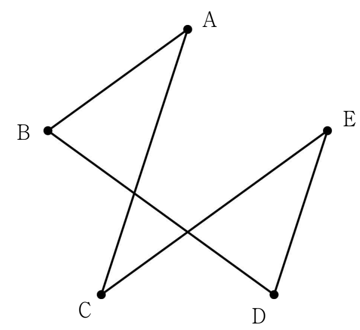
10. A형 16번과 동일

11. A형 15번과 동일

12. [출제의도] 그래프와 행렬 사이의 관계와 경로의 뜻을 이해하여 그래프의 변을 찾는다.

조건 (나)에서 ACEDBA가 그래프 G의 경로이므로 AC, CE, ED, DB, BA는 그래프 G의 변이다.

또, ABCE는 그래프 G의 경로가 아니므로 BC는 변이 아니다.



조건 (가)에서 그래프 G의 변의 개수는 $\dfrac{12}{2}=6$이므로 위 그래프에 BC가 아닌 한 개의 변이 추가되어야 한다. 그런데, 위 그래프에서 꼭짓점 A에서 출발하여 3개의 변을 지나 꼭짓점 E로 가는 경로는 ABDE뿐이므로 조건 (다)를 만족시키려면 위 그래프에서 변 CD를 추가해야 한다.

13. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 직선의 기울기를 구한다.

$2=4^x$에서 $x=\log_4 2=\dfrac{1}{2}$이므로 점 A의 좌표는

$\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2}, 2\right)$

$2=2^x$에서 $x=1$이므로 점 B의 좌표는

$\mathrm{B}(1, 2)$

C의 y좌표는 $y=4^1=4$이므로

$\mathrm{C}(1, 4)$

$4=2^x$에서 $x=2$이므로 점 D의 좌표는

$\mathrm{D}(2, 4)$

따라서 직선 AD의 기울기는

$\dfrac{4-2}{2-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{2}{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{4}{3}$

14. [출제의도] 함수의 미분법을 이용하여 넓이의 순간변화율을 구한다.

네 점 A, B, C, D의 좌표는

$\mathrm{A}(\log_4 a,\ a)$, $\mathrm{B}(\log_2 a,\ a)$, $\mathrm{C}(\log_2 a,\ a^2)$, $\mathrm{D}(2\log_2 a,\ a^2)$

이다.

$\overline{\mathrm{CD}}=\log_2 a$, $\overline{\mathrm{BC}}=a^2-a$이므로

삼각형 ADC의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=\frac{1}{2}(a^2-a)\cdot\log_2 a$

$\therefore\ S'(a)=\frac{1}{2}(2a-1)\log_2 a+\frac{1}{2}(a^2-a)\frac{1}{a\ln 2}$

$\qquad\quad =\frac{1}{2}(2a-1)\log_2 a+\frac{1}{2\ln 2}(a-1)$

$\therefore\ S'(4)=7+\frac{3}{2\ln 2}$

이때 $\frac{dS}{dt}=S'(a)\frac{da}{dt}$이고 $\frac{da}{dt}=1$이므로

구하는 순간변화율은

$\left(7+\frac{3}{2\ln 2}\right)\times 1=7+\frac{3}{2\ln 2}$

[다른 풀이]

점 P가 점 $(0, 2)$를 출발한 지 t초 후의 점 P의 좌표는 $(0, 2+t)$이므로 삼각형 ADC의 넓이는

$S(t)=\frac{1}{2}(t^2+3t+2)\cdot\log_2(t+2)$

$\therefore\ S'(t)=\frac{1}{2}(2t+3)\log_2(t+2)$

$\qquad\quad +\frac{1}{2}(t^2+3t+2)\frac{1}{(t+2)\ln 2}$

$\qquad\quad =\frac{1}{2}(2t+3)\log_2(t+2)+\frac{1}{2\ln 2}(t+1)$

점 P가 점 $(0,4)$를 지나는 순간은 $t=2$일 때이므로 구하는 순간변화율은

$\therefore\ S'(2)=\frac{1}{2}(2\times 2+3)\log_2(2+2)+\frac{1}{2\ln 2}(2+1)$

$\qquad\quad =7+\frac{3}{2\ln 2}$

15. A형 20번과 동일

16. A형 19번과 동일

17. [출제의도] 분수방정식을 세워 속력에 관한 실생활 문제를 해결한다.

주어진 조건을 분수방정식으로 나타내면

$\frac{16}{v+6}=\frac{10}{v-7}+\frac{2}{v}$

이 분수방정식의 양변에 분모의 최소공배수를 곱하면

$8v(v-7)=5v(v+6)+(v+6)(v-7)$

$2v^2-85v+42=0$

$(2v-1)(v-42)=0$

$\therefore\ v=42\ (\because\ v>7)$

18. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 삼각함수의 값을 구한다.

삼각형 ABD가 이등변삼각형이고, 삼각형의 한 외각은 이웃하지 않은 두 내각의 합과 같으므로

$\alpha-\theta=\theta+\beta$

$\therefore\ 2\theta=\alpha-\beta$

그런데, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\beta=\frac{\sqrt{5}}{5}$에서

$\sin\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\sin\beta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$이므로

$\sin 2\theta=\sin(\alpha-\beta)$

$\qquad =\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$\qquad =\frac{3\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{5}}{5}-\frac{\sqrt{10}}{10}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\qquad =\frac{\sqrt{2}}{10}$

19. [출제의도] 미분법을 이용하여 극솟값을 가질 조건을 찾는다.

$f(x)=\frac{\sin x}{e^{2x}}=e^{-2x}\sin x$이므로

$f'(x)=-2e^{-2x}\sin x+e^{-2x}\cos x$

$\qquad =e^{-2x}(-2\sin x+\cos x)$

이고

$f''(x)=-2e^{-2x}(-2\sin x+\cos x)+e^{-2x}(-2\cos x-\sin x)$

$\qquad =e^{-2x}(3\sin x-4\cos x)$

이다.

이때 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 가지므로

$f'(a)=0,\quad f''(a)>0$

이어야 한다.

이때 $e^{-2a}>0$이므로

$-2\sin a+\cos a=0$ … ㉠

$3\sin a-4\cos a>0$ … ㉡

이 성립해야 한다.

㉠에서 $\cos a=2\sin a$이므로

$\tan a=\frac{1}{2}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$-5\sin a>0$

따라서 $\tan a>0$이고, $\sin a<0$이므로

$\pi<a<\frac{3}{2}\pi$

$\sec^2 a=1+\tan^2 a=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$

$\cos a=\frac{1}{\sec a}=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\therefore\ \cos a=-\frac{2\sqrt{5}}{5}\ \left(\because\ \pi<a<\frac{3}{2}\pi\right)$

[다른 풀이]

미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지므로 $f'(a)=0$이어야 한다.

$f(x)=\frac{\sin x}{e^{2x}}=e^{-2x}\sin x$이므로

$f'(x)=-2e^{-2x}\sin x+e^{-2x}\cos x$

$\qquad =-e^{-2x}(2\sin x-\cos x)$

이때 $-e^{-2a}(2\sin a-\cos a)=0$에서 $\tan a=\frac{1}{2}$

ⅰ) $0<a<\frac{\pi}{2}$일 때

$0<x<a$이면

$\sin x<\sin a$이고 $\cos x>\cos a$이므로

$2\sin x-\cos x<2\sin a-\cos a=0$

$\therefore\ f'(x)>0$

$a<x<\frac{\pi}{2}$이면

$\sin x>\sin a$이고 $\cos x<\cos a$이므로

$2\sin x-\cos x>2\sin a-\cos a=0$

$\therefore\ f'(x)<0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 갖는다.

ⅱ) $\pi<a<\frac{3}{2}\pi$일 때

$\pi<x<a$이면

$\sin x>\sin a$이고 $\cos x<\cos a$이므로

$2\sin x-\cos x>2\sin a-\cos a=0$

$\therefore\ f'(x)<0$

$a<x<\frac{3\pi}{2}$이면

$\sin x<\sin a$이고 $\cos x>\cos a$이므로

$2\sin x-\cos x<2\sin a-\cos a=0$

$\therefore\ f'(x)>0$

따라서 $x=a$에서 극솟값을 갖는다.

$\sec^2 a=1+\tan^2 a=\frac{5}{4}$에서

$\sec a=-\frac{\sqrt{5}}{2}\ \left(\because\ \pi<a<\frac{3}{2}\pi\right)$

$\therefore\ \cos a=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

[다른 풀이]

$f(x)=\frac{\sin x}{e^{2x}}$는 미분가능한 함수이므로 몫의 미분법을 사용하면

$f'(x)=\frac{e^{2x}\cos x-2e^{2x}\sin x}{(e^{2x})^2}$

$\qquad =-\frac{2\sin x-\cos x}{e^{2x}}$

이때 삼각함수의 합성에 의해서

$2\sin x-\cos x=\sqrt{5}\sin(x-\alpha)$ 이므로

(단, $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$)

$f'(x)=-\frac{\sqrt{5}\sin(x-\alpha)}{e^{2x}}$

이때 $f'(x)=0$에서 $\sin(x-\alpha)=0$이므로

$x-\alpha=0$ 또는 $x-\alpha=\pi$

$\therefore\ x=\alpha$ 또는 $x=\pi+\alpha$

이때 증가와 감소를 나타내는 표는 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	$\pi+\alpha$	$\cdots$	(2π)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	$f(\alpha)$	↘	$f(\pi+\alpha)$	↗	

그러므로 함수 $f(x)$는 $x=\pi+\alpha$에서 극솟값을 갖는다.

$\therefore\ a=\pi+\alpha$

$\therefore\ \cos a=\cos(\pi+\alpha)$

$\qquad =-\cos\alpha$

$\qquad =-\frac{2}{\sqrt{5}}$

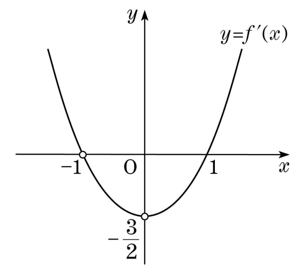
$\qquad =-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

20. [출제의도] 주어진 함수와 도함수를 이용하여 함수의 극한값을 구한다.

함수 $f(x)$는 $x=-1$과 $x=0$에서만 불연속이고,

$f'(x)=\frac{1}{2}(3x^2-3)$ (단, $x\neq -1$, $x\neq 0$)

따라서 도함수 $f'(x)$의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이므로 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. 함수 $y=f'(x)$의 그래프에서

$\lim_{x\to 0}f'(x)=-\frac{3}{2}$

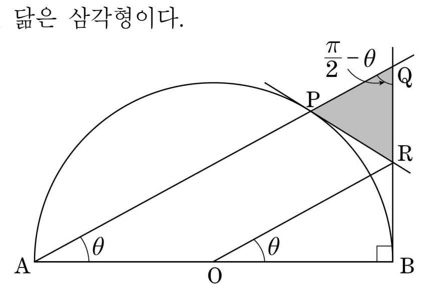
ㄷ. $f'(x)=t$라 하면 $x\to -1+0$일 때 $t\to -0$이다.

$\therefore\ \lim_{x\to -1+0}f(f'(x))=\lim_{t\to -0}f(t)=-1$

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

21. [출제의도] 도형의 성질과 삼각함수의 극한의 성질을 이용하여 극한값을 구한다.

그림에서 삼각형 ABQ와 삼각형 OBR는 닮음비가 $2:1$인 닮은 삼각형이다.



$\overline{QB}=2\tan\theta$이므로

$\overline{QR}=\frac{1}{2}\overline{QB}=\tan\theta$

$\overline{AQ}=\frac{2}{\cos\theta}$, $\overline{AP}=2\cos\theta$이므로

$\overline{QP}=\overline{AQ}-\overline{AP}$

$\qquad =2\left(\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta\right)$

이때 $\angle AQB=\frac{\pi}{2}-\theta$이므로

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{QR}\times\overline{QP}\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$\qquad =\frac{1}{2}\times\tan\theta\times 2\left(\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta\right)\times\cos\theta$

$\qquad =\tan\theta(1-\cos^2\theta)$

$=\tan\theta\sin^2\theta$

$\therefore \lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^3}$

$=\lim_{\theta\to+0}\frac{\tan\theta\sin^2\theta}{\theta^3}$

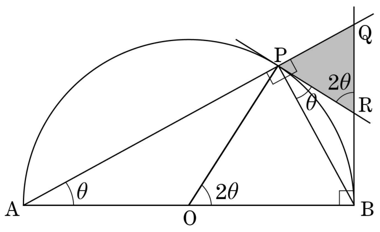
$=\lim_{\theta\to+0}\frac{\tan\theta}{\theta}\times\lim_{\theta\to+0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2$

$=1\times1^2$

$=1$

[다른 풀이]

그림과 같이 반원의 중심을 O라 하자.



$\angle\mathrm{APB}=\frac{\pi}{2}$이므로 $\angle\mathrm{PBR}=\theta$이다.

원 밖의 한 점 R에서 그은 두 접선의 길이는 서로 같으므로 $\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{RB}}$이고 $\angle\mathrm{RPB}=\theta$이다.

$\angle\mathrm{PQR}=\angle\mathrm{QPR}=\frac{\pi}{2}-\theta$이므로

$\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{QR}}$

$\overline{\mathrm{BQ}}=2\tan\theta$에서

$\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{RB}}=\overline{\mathrm{QR}}=\tan\theta$

이때 $\angle\mathrm{PRQ}=2\theta$이므로

$S(\theta)=\frac{1}{2}\tan\theta\tan\theta\sin2\theta=\frac{1}{2}\tan^2\theta\sin2\theta$

$\therefore \lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^3}$

$=\lim_{\theta\to+0}\frac{\tan^2\theta\sin2\theta}{2\theta^3}$

$=\lim_{\theta\to+0}\frac{\tan\theta\cdot\tan\theta\cdot\sin2\theta}{\theta\cdot\theta\cdot2\theta}$

$=1$

22. [출제의도] 등비수열의 일반항을 이용하여 항의 값을 구한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$\frac{a_5}{a_2}=r^3=8$에서

$r=2$

이때

a_3+a_4

$=a_1r^2+a_1r^3$

$=a_1(4+8)$

$=12$

이므로

$a_1=1$

$\therefore\ a_8=a_1r^7=2^7=128$

23. [출제의도] 무리방정식의 해를 구한다.

$\sqrt{x-3}=x-5$의 양변을 제곱하면

$x-3=x^2-10x+25$

$x^2-11x+28=0$

$(x-4)(x-7)=0$

이때 $x=4$는 주어진 방정식을 만족시키지 않으므로 무연근이다.

$\therefore\ x=7$

24. [출제의도] 분수부등식이 특정 해를 가질 조건을 구한다.

$\frac{x-2n}{(x-n)(x-3n)}\le0$

$\Leftrightarrow(x-n)(x-2n)(x-3n)\le0$ (단, $x\ne n,\ x\ne3n$)

따라서 주어진 분수부등식의 해는

$x<n$ 또는 $2n\le x<3n$

그런데 $120\in A$이므로

$120<n$ 또는 $2n\le120<3n$

따라서 자연수 n의 최솟값은 41이다.

[다른 풀이]

$x=120$을 $\frac{x-2n}{(x-n)(x-3n)}\le0$에 대입하면

$\frac{120-2n}{(120-n)(120-3n)}\le0$

$\frac{n-60}{(n-120)(n-40)}\ge0$

$\Leftrightarrow\ (n-40)(n-60)(n-120)\ge0$ (단, $n\ne40,\ n\ne120$)

$40<n\le60$ 또는 $n>120$

따라서 자연수 n의 최솟값은 41이다.

25. [출제의도] 역행렬의 성질을 이용하여 행렬의 성분의 합을 구한다.

$AB=BA$이므로

$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

따라서 $64E=A^2+4E+B^2$이므로

$A^2+B^2=60E$

$\therefore\ A^{-1}(A^2+B^2)B^{-1}$

$=A^{-1}(60E)B^{-1}$

$=60(BA)^{-1}$

$=60(2E)^{-1}$

$=30E$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은 60이다.

[다른 풀이]

$B=8E-A$를 $AB=2E$에 대입하면

$A(8E-A)=2E,\ 8A-A^2=2E$

$\therefore\ A^2=8A-2E$

마찬가지로

$B^2=8B-2E$

$\therefore\ A^2+B^2$

$=(8A-2E)+(8B-2E)$

$=8(A+B)-4E$

$=8\times(8E)-4E$

$=60E$

또, $AB=2E$에서 $AB=BA$이고,

$A^{-1}=\frac{1}{2}B,\ B^{-1}=\frac{1}{2}A$이므로

$A^{-1}(A^2+B^2)B^{-1}$

$=\frac{1}{4}B(A^2+B^2)A$

$=\frac{1}{4}B(60E)A$

$=15BA$

$=30E$

따라서 구하는 합은 60이다.

[참고]

주어진 조건을 만족시키는 행렬의 예

$A=\begin{pmatrix}4&2\\7&4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4&-2\\-7&4\end{pmatrix}$

26. A형 26번과 동일

27. [출제의도] 수열의 합과 일반항의 관계를 이용하여 수열의 극한값을 구한다.

$-a_1=1$이므로 $a_1=-1$이다.

$S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^ka_k$라 하면

$(-1)^na_n$

$=S_n-S_{n-1}$

$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^ka_k-\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^ka_k$

$=n^3-(n-1)^3$

$=3n^2-3n+1\ (n\ge2)$

따라서

$a_{2n}=12n^2-6n+1$

$a_{2n-1}=-12n^2+18n-7$

이므로

$a_{2n-1}+a_{2n}=12n-6$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n-1}+a_{2n}}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{12n-6}{n}=12$

28. [출제의도] 원의 성질과 삼각함수의 배각공식을 이용하여 삼각방정식의 해를 구한다.

$\angle\mathrm{DBA}=\theta$라 하자.

조건 (나)에서

$\angle\mathrm{CBA}=2\theta,\ 0<\theta<\frac{\pi}{4}$

조건 (가)에서

$\angle\mathrm{ADB}=\angle\mathrm{ACB}=\frac{\pi}{2}$이므로

직각삼각형 ADB에서

$\overline{\mathrm{AD}}=\sin\theta$

직각삼각형 ACB에서

$\overline{\mathrm{AC}}=\cos2\theta$

사각형 ABCD의 둘레의 길이가 $\frac{19}{8}$이므로

$\overline{\mathrm{AD}}+\overline{\mathrm{DC}}+\overline{\mathrm{CB}}+\overline{\mathrm{BA}}$

$=\sin\theta+\sin\theta+\cos2\theta+1$

$=2\sin\theta+1-2\sin^2\theta+1$

$=\frac{19}{8}$

$\sin^2\theta-\sin\theta+\frac{3}{16}=0$

$16\sin^2\theta-16\sin\theta+3=0$

$(4\sin\theta-3)(4\sin\theta-1)=0$

$\therefore\ \sin\theta=\frac{1}{4}\ \left(\because\ 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$

따라서 $\overline{\mathrm{AD}}=\sin\theta=\frac{1}{4}$이므로

$p+q=4+1=5$

29. [출제의도] 등차수열의 합과 이차함수의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

수열 $\{a_n\}$의 공차를 d(d는 정수)라 하자.

$T_{16}<T_{17},\ T_{17}>T_{18}$이 성립하므로

$a_{17}>0,\ a_{18}<0$

$a_{17}=50+16d>0$에서

$d>-\frac{25}{8}$

$a_{18}=50+17d<0$에서

$d<-\frac{50}{17}$

따라서 $-\frac{25}{8}<d<-\frac{50}{17}$이므로

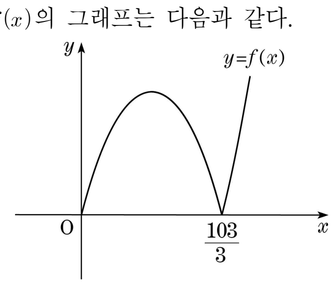
$d=-3$

$\therefore\ T_n=\left|\frac{n\{100+(n-1)(-3)\}}{2}\right|$

$=\frac{|3n^2-103n|}{2}$

이때 $f(x)=\frac{|3x^2-103x|}{2}$라 하면

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$34<\frac{103}{3}<35$이므로

T_n은 $n=34$ 또는 35일 때 최솟값을 갖는다.

$T_{34}=\frac{|3\times34^2-103\times34|}{2}=17$

$T_{35}=\frac{|3\times35^2-103\times35|}{2}=35$

따라서 $T_n > T_{n+1}$을 만족시키는 n은

$n=17,\ 18,\ 19,\ \cdots,\ 33$

이므로 구하는 n의 최댓값은 33이다.

30. [출제의도] 이차함수의 성질을 이용하여 합성함수가 불연속일 조건을 구한다.

$g(x)=(x-2)^2+k-4$이므로

$x\to 2$일 때, $g(x)\to(k-4)+0$이다.

따라서 $\lim\limits_{x\to 2} f(g(x))=\lim\limits_{t\to(k-4)+0} f(t)$이다.

이때 주어진 함수 $f(x)$의 그래프에서 $\lim\limits_{t\to(k-4)+0} f(t)$의 값은 항상 존재하므로

함수 $(f\circ g)(x)$가 $x=2$에서 불연속이려면

$\lim\limits_{t\to(k-4)+0} f(t)\neq f(g(2))$이어야 한다.

이때 $f(g(2))=f(k-4)$이므로

함수 $(f\circ g)(x)$가 $x=2$에서 불연속이려면

$\lim\limits_{t\to(k-4)+0} f(t)\neq f(k-4)$이어야 한다.

즉, 함수 $f(x)$의 $x=k-4$에서의 함숫값과 $x=k-4$에서의 우극한이 서로 달라야 한다.

따라서 $k-4=2$ 또는 $k-4=3$이므로

$k=6$ 또는 $k=7$

따라서 구하는 모든 k의 합은

$6+7=13$이다.

[다른 풀이]

$\lim\limits_{x\to 2-0} f(g(x))=\lim\limits_{x\to 2+0} f(g(x))=\lim\limits_{t\to(k-4)+0} f(t)$이고

$f(g(2))=f(k-4)$이다.

한편, $k-4\neq 1,\ k-4\neq 2,\ k-2\neq 3$일 때

함수 $f(x)$는 $x=k-4$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 2} f(g(x))=f(g(2))$이다.

따라서 $k-4\neq 1,\ k-4\neq 2,\ k-2\neq 3$일 때,

함수 $(f\circ g)(x)$는 $x=k-4$에서 연속이다.

ⅰ) $k-4=1$ 즉 $k=5$일 때,

$\lim\limits_{t\to 1+0} f(t)=3,\ f(1)=3$이므로

함수 $(f\circ g)(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

ⅱ) $k-4=2$ 즉 $k=6$일 때,

$\lim\limits_{t\to 2+0} f(t)=2,\ f(2)=1$이므로

함수 $(f\circ g)(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

ⅲ) $k-4=3$ 즉 $k=7$일 때,

$\lim\limits_{t\to 3+0} f(t)=2,\ f(3)=1$이므로

함수 $(f\circ g)(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에서 함수 $(f\circ g)(x)$는 $x=2$에서 불연속이 되도록 하는 실수 k의 값은 6과 7이다.

그러므로 구하는 합은 13이다.