2014학년도 대학수학능력시험 대비

2013학년도 3월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

수학 A형 정답

1	①	2	④	3	⑤	4	③	5	③
6	②	7	④	8	⑤	9	①	10	③
11	④	12	①	13	⑤	14	⑤	15	②
16	②	17	①	18	④	19	②	20	③
21	①	22	7	23	17	24	11	25	10
26	125	27	540	28	65	29	31	30	61

해 설

1. [출제의도] 로그의 성질을 알고, 로그의 값을 계산한다.

$$6\log_3\sqrt{3}=6\log_3 3^{\frac{1}{2}}$$
$$=6\times\frac{1}{2}\log_3 3$$
$$=6\times\frac{1}{2}$$
$$=3$$

2. [출제의도] 행렬의 곱셈과 뺄셈의 뜻을 알고, 이를 계산한다.

$AB-A$를 계산하면 다음과 같다.

$AB-A$

$=\begin{pmatrix}3&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&1\\1&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}4&4\\2&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&1\\1&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&3\\1&1\end{pmatrix}$

따라서 행렬 $AB-A$의 모든 성분의 합은 6이다.

[다른 풀이]

행렬에 대한 분배법칙을 이용하여 계산하면 다음과 같다.

$AB-A$

$=A(B-E)$

$=\begin{pmatrix}3&1\\1&1\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

$=\begin{pmatrix}3&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&3\\1&1\end{pmatrix}$

따라서 행렬 $AB-A$의 모든 성분의 합은 6이다.

3. [출제의도] 수렴하는 수열의 극한에 관한 성질을 알고, 이를 계산한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+3n}{(2n+1)(2n-1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+3n}{4n^2-1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{3}{n}}{4-\frac{1}{n^2}}$$
$$=\frac{5}{4}\quad\left(\because \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0\right)$$

4. [출제의도] 등비수열의 일반항을 이해하고, 항의 값을 구한다.

주어진 수열의 첫째항을 a라 하면

$a_3=a\cdot 2^2=4a$

$a_4=a\cdot 2^3=8a$

이므로 주어진 조건에서

$36=a_3+a_4=4a+8a=12a$

$\therefore\ a=3$

$\therefore\ a_6=3\times 2^5=96$

5. [출제의도] 지수의 성질을 이해하고, 지수방정식의 해를 구한다.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}=\sqrt[3]{4}$$

이때 $\sqrt[3]{4}=4^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}}$이므로 주어진 방정식을 고쳐 쓰면 다음과 같다.

$$2^{-(x-1)}=2^{\frac{2}{3}}$$

지수함수는 일대일함수이므로

$$-(x-1)=\frac{2}{3}$$
$$\therefore\ x=\frac{1}{3}$$

6. [출제의도] 무한등비급수를 이해하고, 무한급수의 합을 구한다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{3^n}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$
$$=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}+\frac{-\frac{1}{3}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$$
$$=\frac{1}{4}$$

[다른 풀이]

주어진 무한급수의 합을 S라 하고, 이를 덧셈으로 연결하여 나타내면

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{3^n}$$
$$=0+\frac{2}{3^2}+0+\frac{2}{3^4}+0+\frac{2}{3^6}+0+\cdots$$
$$=\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^4}+\frac{2}{3^6}+\frac{2}{3^8}+\cdots$$

이므로 이 무한급수는 첫째항이 $\frac{2}{9}$이고 공비가 $\frac{1}{9}$인 무한등비급수의 합과 같다.

$$\therefore\ S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{3^n}=\frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{4}$$

7. [출제의도] 그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬을 이해한다.

주어진 그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬을 A라고 하자. 주어진 그래프의 꼭짓점의 개수가 6이므로 행렬 A는 6차 정사각행렬이고, 그 성분은 0과 1로 구성되어 있다. 즉, 0과 1의 개수의 합은 36이다. 그런데 행렬 A의 성분의 총합은 그래프의 변의 개수의 두 배이고 변의 개수가 7이므로 행렬 A의 성분 중 1의 개수는 14이다.

따라서 $n=14$, $m=36-14=22$이므로 $m-n=8$이다.

[다른 풀이]

주어진 그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 한 행렬은 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&1\\0&1&0&1&1&0\\0&0&1&0&1&0\\0&0&1&1&0&1\\0&1&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

위 행렬의 성분 중에서 1의 개수는 14이고, 0의 개수는 22이다.

$\therefore\ n=14,\ m=22$

$\therefore\ m-n=8$

8. [출제의도] 등차수열과 계차수열을 이해하고, 항의 값을 구한다.

$b_n=a_{n+1}-a_n$이라 하면

수열 $\{b_n\}$은 수열 $\{a_n\}$의 계차수열이고, 조건 (나)에서 $\{b_n\}$은 등차수열이다.

조건 (가)에서

$b_1=a_2-a_1=2$

$b_2=a_3-a_2=4$

이므로 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 2이고 공차가 2인 등차수열이다.

$\therefore\ b_n=2n$

따라서 a_n은 다음과 같다.

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$$
$$=1+\sum_{k=1}^{n-1}2k$$
$$=1+2\times\frac{(n-1)n}{2}$$
$$=n^2-n+1\quad(n\geq 2)$$

$\therefore\ a_8=57$

[다른 풀이]

$a_{n+1}-a_n$은 수열 $\{a_n\}$의 계차수열의 제n항이다.

주어진 조건에서

$a_2-a_1=2$

$a_3-a_2=4$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 계차수열은 공차가 2인 등차수열이므로 이를 이용하면

$a_4-a_3=6$에서 $a_4=13$

$a_5-a_4=8$에서 $a_5=21$

$a_6-a_5=10$에서 $a_6=31$

$a_7-a_6=12$에서 $a_7=43$

$a_8-a_7=14$에서 $a_8=57$

9. [출제의도] 행렬을 이용하여 전력량 요금에 대한 실생활 문제를 해결한다.

전력량 요금은 다음과 같다.

$(100\times 59)+\{(a-100)\times 122\}$

주어진 행렬에서

$\begin{pmatrix}100&a\\0&x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}59\\122\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}100\times 59+a\times 122\\0\times 59+x\times 122\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}100\times 59+a\times 122\\x\times 122\end{pmatrix}$

성분의 합과 전력량 요금이 같으므로

$x=-100$

10. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이해하고, 직선의 기울기를 구한다.

$n=3$일 때,

점 A_3이 함수 $f(x)=2^x$ 위에 있으므로

$\mathrm{A}_3(\log_2 3,3)$

점 B_3의 좌표를 $(b,3)$이라고 하면 $y=2^{x-1}$위에 있으므로

$2^{b-1}=3$

$b-1=\log_2 3$이므로

$b=\log_2 3+1=\log_2(3\times 2)=\log_2 6$

즉, $\mathrm{B}_3(\log_2 6,3)$이다.

그리고 점 C_3의 좌표를 $(\log_2 6,c)$라고 하면

점 $\mathrm{C}_3(\log_2 6,c)$이 곡선 $y=2^x$ 위에 있으므로

$c=2^{\log_2 6}=6$

따라서 $\mathrm{C}_3(\log_2 6,6)$이므로 직선 $\mathrm{A}_3\mathrm{C}_3$의 기울기는

$$\frac{6-3}{\log_2 6-\log_2 3}$$

$= \dfrac{3}{\log_2 \dfrac{6}{3}}$

$= \dfrac{3}{\log_2 2}$

$= 3$

[다른 풀이]

곡선 $y=2^{x-1}$은 곡선 $y=2^x$을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 것이므로

$\overline{A_3B_3}=1$

점 B_3의 x좌표와 점 C_3의 y좌표를 각각 a, b라 하면 $2^{a-1}=3$이므로

$b=2^a=2\cdot 2^{a-1}=2\times 3=6$

따라서 $\overline{B_3C_3}=6-3=3$이므로

직선 A_3C_3의 기울기는 $\dfrac{3}{1}=3$이다.

11. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 수열의 극한에 대한 문제를 해결한다.

점 A_n이 곡선 $y=2^x$ 위에 있으므로 $A_n(\log_2 n, n)$이다. 점 B_n의 좌표를 (b_n, n)이라 하면 점 B_n이 곡선 $y=2^{x-1}$위의 점이므로 $2^{b_n-1}=n$이다.

$b_n-1=\log_2 n$, $b_n=1+\log_2 n=\log_2 2n$

$\therefore$ $B_n(\log_2 2n, n)$

또, 점 C_n이 곡선 $y=2^x$ 위에 있으므로

$C_n(\log_2 2n, 2n)$

따라서 $\overline{A_nB_n}=1$, $\overline{B_nC_n}=2n-n=n$이므로

$\overline{A_nC_n}=\sqrt{n^2+1}$이다.

$\therefore$ $f(n)=\sqrt{n^2+1}$, $g(n)=n$

$\therefore$ $\lim\limits_{n\to\infty} n\{f(n)-g(n)\}$

$=\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+1}$

$=\dfrac{1}{2}$

12. [출제의도] 지수법칙을 이해하고, 이를 이용하여 주어진 값을 구한다.

$75=5^{-\frac{1}{x}}$, $3=5^{\frac{2}{y}}$ 이므로 $5^{\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{75}$, $5^{\frac{2}{y}}=3$이다.

$5^{\frac{1}{x}+\frac{2}{y}}=5^{\frac{1}{x}}\times 5^{\frac{2}{y}}=3\times\dfrac{1}{75}=\dfrac{1}{25}=5^{-2}$

$\therefore$ $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=-2$

13. [출제의도] 무한급수의 수렴과 일반항의 극한의 관계를 이해하고, 극한값을 구한다.

무한급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n-n}{n}$ 이 수렴하므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n-n}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{n}-1\right)=0$

$\therefore$ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=1$

$\therefore$ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n+a_n}{5n-a_n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5+\dfrac{a_n}{n}}{5-\dfrac{a_n}{n}}$

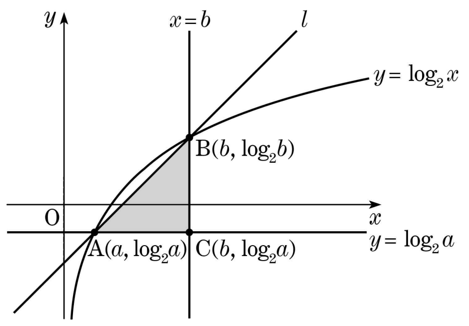
$=\dfrac{5+1}{5-1}$

$=\dfrac{3}{2}$

[참고]

무한급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$이다.

14. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 삼각형의 넓이에 대한 문제를 해결한다.



두 점 $A(a, \log_2 a)$, $B(b, \log_2 b)$가 기울기가 1인 직선 위에 있으므로 $\dfrac{\log_2 b-\log_2 a}{b-a}=1$이다.

즉, $\log_2 b-\log_2 a=b-a$ ⋯ ㉠

직선 l과 두 직선 $x=b$, $y=\log_2 a$로 둘러싸인 부분은 밑변의 길이가 $b-a$이고, 높이는 $\log_2 b-\log_2 a$인 직각삼각형이다.

$\dfrac{1}{2}(b-a)(\log_2 b-\log_2 a)=2$ ⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\dfrac{1}{2}(b-a)\times(b-a)=2$

$(b-a)^2=4$, 즉, $b-a=2$ ($\because$ $a<b$) ⋯ ㉢

또, $\log_2 b-\log_2 a=2$에서 $\log_2\dfrac{b}{a}=2$이므로

$b=4a$ ⋯ ㉣

㉢, ㉣에서 $a=\dfrac{2}{3}$, $b=\dfrac{8}{3}$

$\therefore$ $a+b=\dfrac{10}{3}$

15. [출제의도] 계차수열의 성질을 이용하여 일반항을 구할 수 있음을 증명한다.

$b_n=a_{n+1}-a_n$이라 하면

$b_1=b_2=1$이고 $b_{n+2}=b_n+1$ $(n\geq 1)$이다.

따라서 수열 $\{b_{2n-1}\}$, $\{b_{2n}\}$은 모두 첫째항이 1이고, 공차가 1인 등차수열이다. 즉,

$b_{2n-1}=b_{2n}=n$ $(n\geq 1)$

이다.

그러므로 $n\geq 2$일 때 a_n은 다음과 같다.

i) n이 홀수일 때, $n=2m-1$이라 하면

$$\begin{aligned}a_{2m-1}&=a_1+\sum_{k=1}^{2m-2}b_k\\&=a_1+\sum_{k=1}^{m-1}(b_{2k-1}+b_{2k})\\&=0+\sum_{k=1}^{m-1}k+\sum_{k=1}^{m-1}k\\&=2\times\frac{(m-1)m}{2}\\&=m^2-m\end{aligned}$$

ii) n이 짝수일 때, $n=2m$이라 하면

$$\begin{aligned}a_{2m}&=a_1+\sum_{k=1}^{2m-1}b_k\\&=a_1+\sum_{k=1}^{m-1}(b_{2k-1}+b_{2k})+b_{2m-1}\\&=0+\sum_{k=1}^{m-1}2k+m\\&=2\times\frac{(m-1)m}{2}+m\\&=m^2\end{aligned}$$

따라서 $f(n)=n$, $g(m)=m^2$이다.

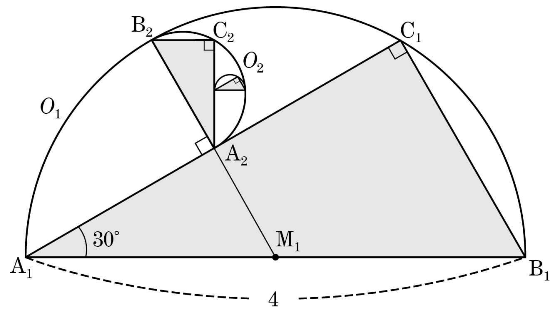
$\therefore$ $f(10)+g(10)=110$

16. [출제의도] 도형의 닮음비를 이용하여 무한등비급수 문제를 해결한다.

점 C_1이 반원 O_1 위에 있으므로 삼각형 $A_1B_1C_1$은 선분 A_1B_1이 빗변인 직각삼각형이다.

따라서 $\overline{A_1C_1}=4\cos 30°=2\sqrt{3}$, $\overline{B_1C_1}=4\sin 30°=2$이다.

$\therefore$ $S_1=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 2=2\sqrt{3}$



이때 반원 O_1의 지름의 중점을 M_1이라 하면 선분 A_2B_2는 선분 A_1C_1의 수직이등분선이고 현의 수직이등분선은 원의 중심을 지나므로 선분 A_2B_2의 연장선은 반원 O_1의 지름의 중점 M_1을 지난다.

$\overline{M_1A_2}=2\sin 30°=1$이므로

$\overline{A_2B_2}=2-1=1$

$S_2=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

마찬가지로, 삼각형 $A_nB_nC_n$은 $\overline{A_nB_n}$이 빗변인 직각삼각형이고, 삼각형 $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$의 빗변은

$\overline{A_{n-1}B_{n-1}}=\dfrac{1}{4}\times\overline{A_nB_n}$

두 닮은 삼각형의 길이의 비는 $4:1$이므로 넓이의 비는 $16:1$이다.

따라서 $\{S_n\}$은 첫째항이 $2\sqrt{3}$이고 공비가 $\dfrac{1}{16}$인 등비수열이다.

$\therefore$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\dfrac{2\sqrt{3}}{1-\dfrac{1}{16}}$

$=\dfrac{32\sqrt{3}}{15}$

17. [출제의도] 수열의 합과 일반항과의 관계를 이해하고, 수열의 합을 구한다.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{a_k}{k+1}=n^2+n$을 전개하면

$\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{3}+\dfrac{a_3}{4}+\cdots+\dfrac{a_n}{n+1}=n^2+n$ ⋯ ㉠

㉠에 의해 2이상의 자연수 n에 대하여

$\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{3}+\dfrac{a_3}{4}+\cdots+\dfrac{a_{n-1}}{n}=(n-1)^2+(n-1)$ ⋯ ㉡

㉠−㉡에서

$\dfrac{a_n}{n+1}$

$=n^2+n-\{(n-1)^2+(n-1)\}$

$=2n$

$\therefore$ $a_n=2n(n+1)$ $(n=2, 3, 4, \cdots)$

한편 ㉠에서 $\dfrac{a_1}{2}=1^2+1$, $a_1=4$

$\therefore$ $a_n=2n(n+1)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\dfrac{1}{a_n}$

$=\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\dfrac{1}{2n(n+1)}$

$=\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left\{\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{11}\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{11}\right)$

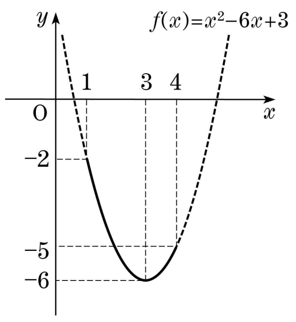
$=\dfrac{5}{11}$

18. [출제의도] 이차함수와 지수함수의 합성함수의 최

대 · 최소를 이해한다.

$f(x)=x^2-6x+3=(x-3)^2-6$ 이므로

$1 \le x \le 4$ 에서 $-6 \le f(x) \le -2$ 이다.



ⅰ) $0<a<1$ 일 때

$g(x)=a^x$ 는 감소함수이므로

$(g \circ f)(x)$ 는 $f(x)=-6$ 일 때 최댓값을 갖고,

$f(x)=-2$ 일 때 최솟값을 갖는다.

따라서 $a^{-6}=27$ 이므로

$a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore\ m=a^{-2}=3$

ⅱ) $a>1$ 일 때

$g(x)=a^x$ 는 증가함수이므로

$(g \circ f)(x)$ 는 $f(x)=-2$ 일 때 최댓값을 갖고,

$f(x)=-6$ 일 때 최솟값을 갖는다.

따라서 $a^{-2}=27$ 이므로

$a=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$

그런데 $a>1$ 을 만족시키지 않으므로 이 경우는 불가능하다.

ⅰ), ⅱ)에서 $(g \circ f)(x)$ 의 최솟값은 3 이다.

19. [출제의도] 주어진 수열의 규칙성을 추론하여 두 항의 차를 구한다.

$a_2-a_1=98-1$

$a_3-a_2=95-2\times 2$

$a_4-a_3=91-3\times 3$

$\vdots$

이므로 X를 제13행에 적힌 수 중 오른쪽 끝에 적힌 수라고 하면

$a_{13}-a_{12}=X-12^2$임을 추론할 수 있다.

이때,

$X=100-(2+3+\cdots+13)$

$=101-(1+2+3+\cdots+13)$

$=101-\dfrac{13 \cdot 14}{2}$

$=10$

$\therefore\ a_{13}-a_{12}=10-12^2=-134$

[다른 풀이]

제n행의 수 중 왼쪽 끝에 적힌 수를 l_n이라 하면

$l_n=100-1-2-\cdots-(n-1)$

$=100-\dfrac{n(n-1)}{2}$

따라서 제n행에 적힌 수의 합 a_n은

$a_n=\dfrac{n\{200-n(n-1)+(n-1)\cdot(-1)\}}{2}$

$=\dfrac{n(201-n^2)}{2}$

따라서 $a_{13}=208$, $a_{12}=342$이므로 구하는 값은

$a_{13}-a_{12}=208-342$

$=-134$

20. [출제의도] 행렬의 연산을 이해하고, 주어진 조건에 맞는 행렬의 성질을 추론한다.

ㄱ. $(A+B)^2=O$에서

$(A+B)(A+B)=O$

$A^2+AB+BA+B^2=O$

이때 $A^2+B^2=O$이므로 $AB+BA=O$

$\therefore\ AB=-BA$

ㄴ. $AB=-BA$, $A^2=-B^2$이고, 행렬의 곱셈에 대한 결합법칙이 성립하므로

$A^3B^3=(A^2A)(BB^2)$

$=(-B^2)(AB)(-A^2)$

$=(-B^2)(-BA)(-A^2)$

$=-B^3A^3$

ㄷ. 행렬 $A+B+E$에 행렬 $A+B-E$를 곱하면

$(A+B+E)(A+B-E)=(A+B)^2-E^2=O-E=-E$

즉, $(A+B+E)(E-A-B)=E$

따라서 $A+B+E$의 역행렬은 $E-A-B$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

[참고]

주어진 조건을 만족시키는 행렬의 예

$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

21. [출제의도] 이차함수와 원의 접선을 이용하여 수열의 극한값을 구한다.

원 C_n 의 중심이 $\mathrm{P}_n(n, n^2)$ 이고 y 축에 접하므로, 반지름의 길이는 n 이다. 또 원점을 지나고 기울기가 a_n 인 직선의 방정식은 $y=a_nx$ 즉, $a_nx-y=0$ 이다.

원 C_n 과 직선 $a_nx-y=0$ 이 접하므로 원의 중심 $\mathrm{P}_n(n,\ n^2)$ 에서 직선 $a_nx-y=0$ 에 이르는 거리가 n 이다.

$\therefore\ \dfrac{|na_n-n^2|}{\sqrt{a_n^2+1}}=n$

$\dfrac{|a_n-n|}{\sqrt{a_n^2+1}}=1$

양변을 제곱하여 정리하면

$a_n^2-2na_n+n^2=a_n^2+1$

$\therefore\ a_n=\dfrac{n^2-1}{2n}$

$\therefore\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{2n^2}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n^2}}{2}$

$=\dfrac{1}{2}$

[다른 풀이]

원의 방정식은

$(x-n)^2+(y-n^2)^2=n^2$

$y=a_nx$를 대입하면

$(x-n)^2+(a_nx-n^2)^2=n^2$

$x^2-2nx+n^2+a_n^2x^2-2n^2a_nx+n^4=n^2$

$(1+a_n^2)x^2-2(n+n^2a_n)x+n^4=0$

직선과 원이 접하므로 판별식

$\dfrac{D}{4}=\left(n+n^2a_n\right)^2-n^4(1+a_n^2)=0$ 이다.

$2n^3a_n=n^4-n^2$

$\therefore\ a_n=\dfrac{n^2-1}{2n}$

$\therefore\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{1}{2}$

22. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 로그방정식의 해를 구한다.

$\log_2(2x-5)=2\log_2 3$

$\log_2(2x-5)=\log_2 3^2=\log_2 9$

로그함수는 일대일함수이므로 $2x-5=9$

$\therefore\ x=7$

23. [출제의도] 이차정사각행렬의 역행렬을 알고, 이를 계산한다.

A의 역행렬을 구하면

$A^{-1}=\dfrac{1}{3\times a-(-3)\times(1-a)}\begin{pmatrix}a & 3\\ -1+a & 3\end{pmatrix}$

$=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}a & 3\\ -1+a & 3\end{pmatrix}$

따라서 A^{-1} 의 모든 성분의 합은

$\dfrac{1}{3}(2a+5)=13$

$\therefore\ a=17$

24. [출제의도] 합의 기호 $\sum$의 성질을 이해한다.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}k^2-\sum_{k=1}^{n}\left(k^2+k\right)$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{n}k^2+(n+1)^2-\sum_{k=1}^{n}\left(k^2+k\right)$

$\displaystyle=(n+1)^2+\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}\left(k^2+k\right)$

$\displaystyle=(n+1)^2+\sum_{k=1}^{n}\left\{k^2-\left(k^2+k\right)\right\}$

$\displaystyle=(n+1)^2-\sum_{k=1}^{n}k$

$=(n+1)^2-\dfrac{n(n+1)}{2}$

$=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$

따라서 $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}=78$, $n^2+3n-154=0$

$(n-11)(n+14)=0$

$\therefore\ n=11$ ($\because$ n은 자연수)

25. [출제의도] 무한등비수열의 수렴조건을 이해한다.

무한등비수열 $\left\{\left(\dfrac{2x-3}{5}\right)^n\right\}$이 수렴하려면 공비가 -1 보다 크고 1 보다 작거나 같아야 하므로

$-1<\dfrac{2x-3}{5}\le 1$, $-5<2x-3\le 5$, $-2<2x\le 8$

$\therefore\ -1<x\le 4$

따라서 구하는 정수 x 는

$x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$이고 그 합은 10 이다.

[참고]

주어진 무한등비수열은 $-1<x<4$ 일 때 0 으로 수렴하고, $x=4$ 일 때 1 로 수렴한다.

26. [출제의도] 로그방정식으로 표현된 관계식을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

$C=40$ 일 때 $I=5$ 이므로

$5=k\log 40+a$ … ㉠

$C=10$ 일 때 $I=4$ 이므로

$4=k\log 10+a$ … ㉡

㉠−㉡에서

$1=k(\log 40-1)=k\log 4$

$\therefore\ k=\dfrac{1}{\log 4}=\log_4 10$

㉡에 대입하면

$a=4-\log_4 10$

$\therefore\ I=(\log_4 10)\log C+4-\log_4 10$

$C=p$ 일 때 $I=2.5$ 이므로

$2.5=\log_4 10\times\log p+4-\log_4 10$

$-1.5=(\log p-1)\log_4 10$

$\therefore\ \log\dfrac{p}{10}=-1.5\log 4=\log 4^{-\frac{3}{2}}=\log\dfrac{1}{8}$

따라서 $\dfrac{p}{10}=\dfrac{1}{8}$ 이므로 $p=1.25$

$\therefore\ 100p=125$

27. [출제의도] 상용로그의 지표를 이해하고, 주어진 식을 만족시키는 자연수를 구한다.

$f(m)$ 은 $\log m$의 지표이므로 정수이고

$1\le m\le 1000$ 에서 $0\le f(m)\le 3$,

$2\le 2m\le 2000$ 에서 $0\le f(2m)\le 3$ 이다.

따라서 주어진 조건 $2f(m)-f(2m)=1$ 을 만족시키는 순서쌍 $(f(m), f(2m))$ 은 $(1, 1)$, $(2, 3)$ 이다.

ⅰ) $(f(m), f(2m))=(1, 1)$ 일 때

$f(m)=1$ 에서 $10\le m<100$

$f(2m)=1$에서 $10 \le 2m < 100$

따라서 $10 \le m < 50$이므로 m은 40개다.

ii) $(f(m),\, f(2m))=(2,\,3)$일 때

$f(m)=2$에서 $100 \le m < 1000$

$f(2m)=3$에서 $1000 \le 2m < 10000$

따라서 $500 \le m < 1000$이므로 m은 500개다.

i), ii)에서 구하는 m의 개수는 540이다.

28. [출제의도] 행렬로 표현된 연립일차방정식과 직선의 방정식을 이용하여 해를 구한다.

조건 (나)에서 점 $(0,\,0)$은 직선 $2x-y+1=0$ 위의 점이 아니므로 $\alpha \ne 0$, $\beta \ne 0$이다.

따라서 조건 (가)의 방정식

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, 즉 $\begin{pmatrix} 1-k & -1 \\ -4 & 1-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

은 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 가져야 한다.

따라서 행렬 $\begin{pmatrix} 1-k & -1 \\ -4 & 1-k \end{pmatrix}$가 역행렬을 갖지 않아야 하므로 $(1-k)^2-4=0$이다.

$\therefore\ k=-1$ 또는 3

i) $k=-1$일 때

방정식의 해 $(x,\,y)$에 대해 $2x-y=0$이므로 $2x-y+1=0$을 만족시키는 해는 없다.

ii) $k=3$일 때

방정식의 해 $(x,\,y)$에 대해 $2x+y=0$이다. 즉, $2\alpha+\beta=0$이고, 이를 $2\alpha-\beta+1=0$과 연립하여 풀면 $\alpha=-\dfrac{1}{4}$, $\beta=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ 20(k+\alpha+\beta)=20\left(3-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\right)=65$

29. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 주어진 문제를 해결한다.

함수 $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-5}-64$의 그래프는 함수 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -64만큼 평행이동시킨 것이다.

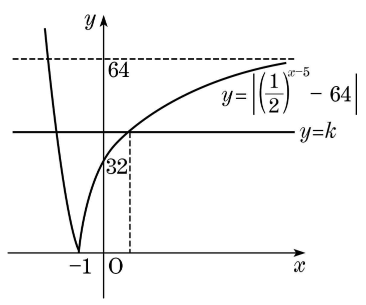
따라서 이 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표는

$f(0)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-5}-64=2^5-64=-32$

점근선의 방정식은 $y=-64$이므로

$$y=|f(x)|=\begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-5}-64 & (x<-1) \\ -\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-5}+64 & (x \ge -1) \end{cases}$$

의 그래프는 그림과 같다.



이때, 곡선 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=k$가 제1사분면에서 만나기 위해서는 $32<k<64$이어야 한다.

따라서 구하는 자연수 k의 개수는

$64-32-1=31$

30. [출제의도] 등차수열의 합에 대한 성질을 이용하여 조건에 맞는 자연수를 추측한다.

수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$T_n=\left|\dfrac{n\{120+(n-1)d\}}{2}\right|$

$T_{20}=T_{21}$이므로

$\left|\dfrac{20(120+19d)}{2}\right|=\left|\dfrac{21(120+20d)}{2}\right|$

i) $\dfrac{20(120+19d)}{2}=\dfrac{21(120+20d)}{2}$일 때

$d=-3$

이때 조건 $T_{19}<T_{20}$이 성립한다.

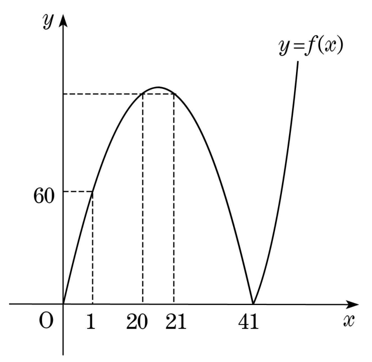
ii) $\dfrac{20(120+19d)}{2}=-\dfrac{21(120+20d)}{2}$일 때

$d=-\dfrac{123}{20}$

이때 조건 $T_{19}<T_{20}$이 성립하지 않는다.

따라서 $T_n=\left|\dfrac{-3n^2+123n}{2}\right|$이다.

$f(x)=\left|\dfrac{-3x^2+123x}{2}\right|$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



위 그래프에서 $f(41)=0$이므로 $T_{41}=0$

그러므로 $T_{21}>T_{22}>T_{23}>\cdots>T_{41}=0$, $T_{41}<T_{42}$

따라서 $T_n>T_{n+1}$을 만족시키는 n의 값은

21, 22, 23, $\cdots$, 40이다.

그러므로 최솟값과 최댓값의 합은

$21+40=61$