2013학년도 3월 고2 전국연합학력평가
정답 및 해설

• 수학 영역[B형] •

정 답

1	①	2	⑤	3	③	4	②	5	③
6	⑤	7	④	8	①	9	③	10	②
11	①	12	①	13	⑤	14	②	15	②
16	④	17	①	18	③	19	④	20	⑤
21	④	22	8	23	6	24	60	25	10
26	80	27	45	28	20	29	100	30	505

해 설

1. [출제의도] 복소수가 서로 같을 조건 이해하기

$x+3=9,\ y=8$ 이므로 $x+y=6+8=14$

2. [출제의도] 삼각형의 무게중심의 좌표 구하기

$\frac{a-1+4}{3}=4$ 이므로 $a=9$

$\frac{3+b-5}{3}=0$ 이므로 $b=2$

$\therefore\ a+b=11$

3. [출제의도] 충분조건 이해하기

조건 p의 진리집합은 $P=\{x\,|\,3\le x\le 7\}$

조건 q의 진리집합은 $Q=\{x\,|\,x\le k\}$

$P\subset Q$가 성립하려면 $k\ge 7$

따라서 k의 최솟값은 7

4. [출제의도] 합성함수와 역함수의 뜻 이해하기

$(f^{-1}\circ g)(4)=f^{-1}(3)=2$

5. [출제의도] 분수함수의 그래프 이해하기

함수 $f(x)=\frac{ax+b}{x+c}$ 의 그래프의 점근선이 두 직선 $x=-1,\ y=-2$ 이므로 $f(x)=\frac{k}{x+1}-2\ (k\ne 0)$ 이다.

$f(0)=k-2=1$ 에서 $k=3$

$\therefore\ f(-4)=-3$

6. [출제의도] 주어진 범위에서 이차함수의 최댓값 구하기

$f(x)=x^2-2x+m=(x-1)^2+m-1$ 에서

최고차항의 계수가 양수이고, 축이 $x=1$ 이므로

함수 $y=f(x)$ 는 $x=1$ 에서 최솟값, $x=3$ 에서 최댓값을 갖는다.

함수 $y=f(x)$ 의 최솟값이 5이므로 $m=6$ 이다.

따라서 최댓값은 $f(3)=3^2-2\times3+6=9$

7. [출제의도] 삼차방정식 문제 해결하기

한 근 $\sqrt2$ 를 주어진 방정식의 x에 대입하면

$(\sqrt2)^3+a(\sqrt2)^2+b(\sqrt2)-6=0$

$(2a-6)+(2+b)\sqrt2=0$

따라서 $a=3,\ b=-2$ 이므로 $a+b=1$

8. [출제의도] 사인법칙을 이용하여 선분의 길이 구하기

$\angle C=45^\circ$ 이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AC}}{\sin 30^\circ}=\frac{12}{\sin 45^\circ}$

따라서 $\overline{AC}=6\sqrt2$ 에서 $\overline{AC}^2=72$

9. [출제의도] 부분집합의 개수 구하기

$A=\{1,3,7,9\},\ B=\{1,9\}$ 이므로

$\{1,9\}\subset X\subset\{1,3,7,9\}$

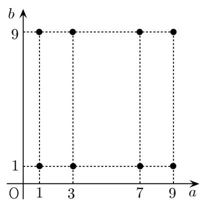
즉, 집합 X는 집합 $\{1,3,7,9\}$의 부분집합 중 1과 9를 모두 원소로 가지는 집합이다.

따라서 주어진 조건을 만족시키는 집합 X의 개수는

$2^{4-2}=2^2=4$

10. [출제의도] 조합을 이용하여 경우의 수 구하기

집합 $C=\{(a,b)\,|\,a\in A,\ b\in B\}$ 의 모든 원소를 좌표평면에 나타내면 그림과 같다.



세 점이 삼각형의 꼭짓점이 되려면 한 직선 위에 놓이지 않아야 한다.

따라서 서로 다른 삼각형의 개수는

${}_8C_3-({}_4C_3+{}_4C_3)=48$

11. [출제의도] 원을 이용하여 넓이 문제 증명하기

두 원 $C_1,\ C_2$ 의 반지름의 길이가 각각 $r_1,\ r_2\ (r_1>r_2)$ 이므로

실경은 $\boxed{r_1-r_2}$, 정주는 $2\pi\times\boxed{\left(r_2+\frac{r_1-r_2}{2}\right)}$

(실경)$\times$(정주) $=(\boxed{r_1-r_2})\times\left(2\pi\times\boxed{\frac{r_1+r_2}{2}}\right)$

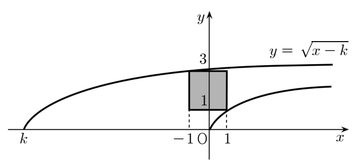
$=\pi r_1^2-\pi r_2^2$

$=$ (환의 넓이)

(가), (나)에 알맞은 식을 더하면

$\frac{3}{2}r_1-\frac{1}{2}r_2$ 이므로 $8(p^2+q^2)=20$

12. [출제의도] 무리함수의 그래프 이해하기



$y=\sqrt{x-k}$ 의 그래프가 점 $(-1,3)$을 지날 때 k의 값은 최소가 된다.

따라서 $3=\sqrt{-1-k}$ 이므로 k의 최솟값은 -10

13. [출제의도] 두 직선의 위치 관계 이해하기

$f(x)=a(x-2)+3\ (a\ne0)$,

$g(x)=-\frac{1}{a}(x-2)+3\ (a\ne0)$

으로 놓을 수 있다.

$f(-2)=g(6)$ 이므로 $-4a+3=-\frac{4}{a}+3$

따라서 $a=\pm1$ 이므로

$\begin{cases}f(x)=x+1\\ g(x)=-x+5\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}f(x)=-x+5\\ g(x)=x+1\end{cases}$

$\therefore\ f(3)\times g(3)=8$

14. [출제의도] 함숫값 추론하기

$f(14)=2f(7)=2\times(-1)^4=2$

$f(20)=2f(10)=4f(5)=4\times(-1)^3=-4$

$\therefore f(14)+f(20)=-2$

15. [출제의도] 비례식의 성질을 이용하여 실생활 문제 해결하기

이 문구점에서 연필, 지우개, 공책의 가격을 각각 x,y,z로 두면 $\begin{cases}2x+y=z\\ y+z=5x\end{cases}$ 이다.

x와 z를 각각 y에 대한 식으로 나타내면

$x=\frac{2}{3}y,\ z=\frac{7}{3}y$ 이고

$10x+4z=\frac{20}{3}y+\frac{28}{3}y=16y$ 이므로

이 문구점에서 연필 10자루의 가격과 공책 4권의 가격을 더하면 지우개 16개의 가격과 같다.

16. [출제의도] 나머지정리를 이용하여 다항식의 값 구하기

(가), (나)에서

$f(x)=(x^3+1)(x+2)+ax^2+bx+c$

$\quad=(x+1)(x^2-x+1)(x+2)+ax^2+bx+c$

$=(x^2-x+1)(x^2+3x+2)+a(x^2-x+1)+x-6$

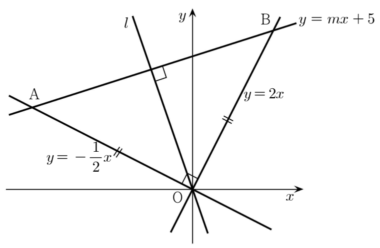
(다)에서 $f(1)=-2$ 이므로 $a=-3$

$\therefore\ f(0)=-7$

17. [출제의도] 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 문제 해결하기

두 직선 $y=2x,\ y=-\frac{1}{2}x$가 서로 수직이므로

세 직선 $y=2x,\ y=-\frac12x,\ y=mx+5$로 둘러싸인 삼각형 AOB는 직각이등변삼각형이다.



직선 $y=mx+5$는 각 AOB를 이등분하는 직선 l과 수직이다. 두 직선 $y=2x,\ y=-\frac12x$가 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식은

$\frac{|2x-y|}{\sqrt5}=\frac{|x+2y|}{\sqrt5}$ 에서 $y=\frac13x,\ y=-3x$ 이다.

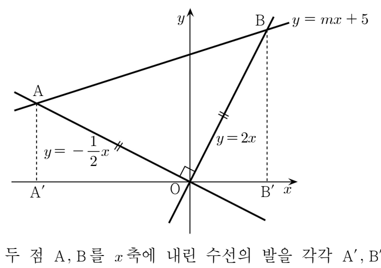
$m>0$ 이므로 직선 l의 방정식은 $y=-3x$ 이고

$m=\frac13$

[다른풀이]

두 직선 $y=2x,\ y=-\frac12x$가 서로 수직이므로

세 직선 $y=2x,\ y=-\frac12x,\ y=mx+5$로 둘러싸인 삼각형 AOB는 직각이등변삼각형이다.



두 점 A, B를 x축에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′이라 하면 삼각형 AA′O와 삼각형 OB′B는 서로 합동이다. $a>0$에 대하여 점 B$(a,2a)$, A$(-2a,a)$ 이므로 $m=\frac{2a-a}{a-(-2a)}=\frac13$

18. [출제의도] 인수정리를 이용하여 식의 값 구하기

n차 다항식 $P(x)$는

$(k+1)P(k)-k=0\ (k=0,1,2,\cdots,n)$

을 만족시킨다.

$Q(x)=(x+1)P(x)-x$

라 두면 $Q(x)$는 $n+1$차 다항식이고

$Q(0) = Q(1) = Q(2) = \cdots = Q(n) = 0$
이므로 0이 아닌 상수 a에 대하여
$Q(x) = ax(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$
으로 나타낼 수 있다. 따라서
$(x+1)P(x) - x$
$= ax(x-1)(x-2)\cdots(x-n) \quad \cdots ㉠$
이다. ㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$a = \dfrac{(-1)^{n+1}}{\boxed{(n+1)!}}$
이고, ㉠의 양변에 $x=n+1$을 대입하여 정리하면
$(n+2)P(n+1) - (n+1) = \boxed{(-1)^{n+1}}$
이므로
$P(n+1) = \dfrac{\boxed{(-1)^{n+1}} + n + 1}{n+2}$
이다. 따라서
n이 홀수이면 $P(n+1) = 1$이고,
n이 짝수이면 $P(n+1) = \boxed{\dfrac{n}{n+2}}$이다.
$\therefore \dfrac{f(4)\times g(5)}{h(6)} = 160$

19. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계 이해하기

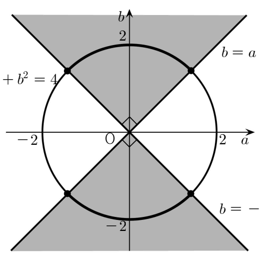
두 근을 α, β라 하면
$\alpha+\beta = a,\ \alpha\beta = -3a,\ |\alpha|+|\beta| = 8$이다.
$a>0$이므로 $\alpha+\beta>0,\ \alpha\beta<0$에서 $\alpha<0<\beta$라 하면
$(|\alpha|+|\beta|)^2 = (-\alpha+\beta)^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta$
$= a^2 + 12a = 64$
이므로 $a=4$이다.
$\therefore \alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = a^2+6a = 40$

[다른풀이]

두 근을 α, β라 하면
$\alpha+\beta = a,\ \alpha\beta = -3a,\ |\alpha|+|\beta| = 8$이다.
$a>0$이므로 $\alpha+\beta>0,\ \alpha\beta<0$에서 $\alpha<0<\beta$라 하면
$-\alpha+\beta = 8,\ \beta = \alpha+8$이다.
$\alpha+\beta = a,\ \alpha\beta = -3a$에서 $\alpha\beta = -3(\alpha+\beta)$이므로
$\alpha(\alpha+8) = -3(2\alpha+8),\ \alpha^2+14\alpha+24 = 0,$
$(\alpha+2)(\alpha+12) = 0$
$\alpha = -12$이면 $\beta = -4$이므로 $\alpha<0<\beta$에 모순이고,
$\alpha = -2$이면 $\beta = 6$이므로 주어진 조건을 만족한다.
$\therefore \alpha^2+\beta^2 = 40$

20. [출제의도] 절대부등식의 성질 이해하기

모든 실수 x에 대하여
$(a^2+b^2-4)x + (a^2-b^2) \le 0$이므로
$a^2+b^2 = 4$이고 $a^2-b^2 \le 0$이다.



따라서 구하는 도형 전체의 길이는 2π

21. [출제의도] 주어진 조건을 만족하는 집합 구하기

ㄱ. 반례 : $A = \{0, 1\}$ (거짓)
ㄴ. 집합 A가 곱셈에 대하여 닫혀 있으므로
$a\in A$이면 $a^2\in A,\ a^3\in A,\ a^4\in A,\ \cdots$
만약, $0<|a|<1$ 또는 $|a|>1$이면
$a, a^2, a^3, a^4, \cdots$ 은 서로 다르므로
집합 A는 유한집합이 될 수 없다.
따라서 $|a| = 0$ 또는 $|a| = 1$
즉, 집합 A의 원소가 될 수 있는 수는
$-1, 0, 1$뿐이고, 집합 $\{-1, 0, 1\}$이 집합 A가
될 수 있으므로 $n(A)$의 최댓값은 3 (참)
ㄷ. ㄴ에서 집합 A의 원소가 될 수 있는 수는
$-1, 0, 1$뿐이므로 곱셈에 대하여 닫혀 있는
집합 A는
$\{0\}, \{1\}, \{0, 1\}, \{-1, 1\}, \{-1, 0, 1\}$
중의 하나이다.
따라서 집합 A의 개수는 5 (참)

22. [출제의도] 순열과 조합의 수 계산하기

$n(n-1) = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$에서 $n-2=6$
$\therefore n = 8$

23. [출제의도] 사인함수의 그래프 이해하기

주어진 그래프는 삼각함수 $y = 3\sin 2x$의
그래프이므로 $a=3,\ b=2$
$\therefore ab = 6$

24. [출제의도] 이중근호를 이용하여 식의 값 구하기

$\sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{7+2\sqrt{12}} = 2+\sqrt{3}$이므로
$a=3,\ b=\sqrt{3}-1$
$a-b-\dfrac{1}{a+b} = 4-\sqrt{3}-\dfrac{1}{2+\sqrt{3}} = 4-\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})$
$= 2$
$\therefore 30\times 2 = 60$

25. [출제의도] 산술·기하평균을 이용하여 최솟값 구하기

$x>1$이므로 $x-1>0,\ \dfrac{16}{x-1}>0$
$x+1+\dfrac{16}{x-1} = 2+\left(x-1+\dfrac{16}{x-1}\right)$
$\ge 2+2\sqrt{(x-1)\times\dfrac{16}{x-1}} = 10$
(단, 등호는 $x-1 = \dfrac{16}{x-1}$ 즉, $x=5$일 때 성립한다.)
따라서 구하는 최솟값은 10

26. [출제의도] 조합의 수 구하기

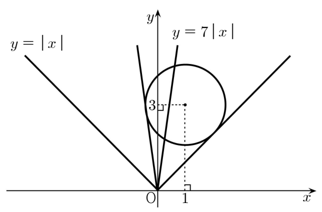
5개 학교 중 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_3$
2명 중에서 한 명을 택하는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_1$
따라서 전체 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_3\times({}_2\mathrm{C}_1)^3 = 80$

27. [출제의도] 도형의 대칭이동 문제 해결하기

점 A를 y축에 대하여 대칭이동한 점 $\mathrm{A}'(1, 0)$에
대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PQ}} \ge \overline{\mathrm{A'Q}}$이다.
$\overline{\mathrm{A'Q}}$의 최솟값은 점 $\mathrm{A}'(1, 0)$과 원 C의
중심 $(-3, 8)$ 사이의 거리에서 원 C의 반지름의 길이 $\sqrt{5}$를 뺀 값이다. 따라서 $k = 4\sqrt{5}-\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$
$\therefore k^2 = 45$

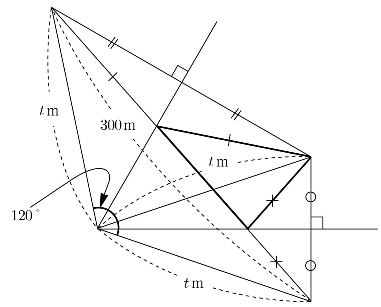
28. [출제의도] 원과 직선의 위치 관계 이해하기

직선 $y=kx$가 원 $(x-1)^2+(y-3)^2=2$에
접하기 위한 필요충분조건은
방정식 $(x-1)^2+(kx-3)^2 = 2 \quad \cdots\cdots$ ①
이 중근을 가지는 것이다.
①을 정리하면
$(k^2+1)x^2 - 2(3k+1)x + 8 = 0$이고,
$\dfrac{D}{4} = (3k+1)^2 - 8(k^2+1) = 0$이므로
$k = -7$ 또는 $k = 1$



그림과 같이
원 $(x-1)^2+(y-3)^2=2$와 $y = m|x|$의 그래프가
서로 다른 두 점에서만 만나도록 하는 m의 범위는
$1<m<7$이다.
따라서 모든 정수 m의 값의 합은 20

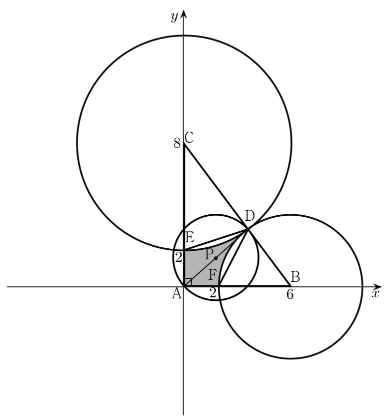
29. [출제의도] 코사인법칙을 이용하여 실생활 문제 해결하기



$300^2 = t^2+t^2-2\times t\times t\times\cos 120^\circ$
따라서 $t = 100\sqrt{3}$에서 $x = 100$

30. [출제의도] 부등식의 영역을 이용하여 실생활 문제 해결하기

점 A가 원점 O에, 점 B는 x축 위에, 점 C는
y축 위에 오도록 직각삼각형 ABC를 좌표평면 위에
두면 B$(6, 0)$, C$(0, 8)$이다.



두 지점 B, C에 설치된 기지국에서 보내는 전파를
동시에 받는 지점 D는 선분 BC를 2 : 3으로
내분하는 점이므로 D$\left(\dfrac{18}{5}, \dfrac{16}{5}\right)$이다. 이 도시에서
전파가 수신되지 않는 지역이 없도록 하기 위해서는
두 지점 E$(0, 2)$, F$(2, 0)$에 대하여 도형 AFDE를
포함하는 원의 중심에 새로운 기지국을 설치하면
된다. 한편, 사각형 AFDE에 대하여 각 AFD와 각
DEA가 둔각이므로 새로운 기지국의 전파의 수신
반경을 최소로 하기 위해서는 선분 AD를 지름으로
하는 원의 중심 P$\left(\dfrac{9}{5}, \dfrac{8}{5}\right)$에 새로운 기지국을
설치하면 된다. 따라서 두 점 P$\left(\dfrac{9}{5}, \dfrac{8}{5}\right)$, B$(6, 0)$
사이의 거리는 $\dfrac{\sqrt{505}}{5}$
$\therefore k = 505$