2013학년도 대학수학능력시험 수리영역 가형 정답 및 해설 (홀수형)

1.

출제의도 : 행렬의 연산을 할 수 있는가?

$$2A+B=2\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0\\2&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\3&3\end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $2A+B$의 모든 성분의 합은 7이다.

<답> ④

2.

출제의도 : 삼각함수의 배각의 공식을 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$이므로

$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}$$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$$

$$=2\times\frac{1}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

<답> ②

3.

출제의도 : 좌표공간에서 내분점의 좌표를 구할 수 있는가?

$\mathrm{A}(a,1,3)$, $\mathrm{B}(a+6,4,12)$에 대하여

선분 AB를 $1:2$로 내분 하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2a+a+6}{3},\frac{2+4}{3},\frac{6+12}{3}\right)=(a+2,2,6)$$

이므로

$(a+2,2,6)=(5,2,b)$ 에서

$a=3$, $b=6$

$\therefore a+b=9$

<답> ③

4.

출제의도 : 무리방정식의 실근을 구할 수 있는가?

$x^2-2x=t$라고 놓으면

$$t+2\sqrt{t}=8$$

$$t-8=-2\sqrt{t}\quad\cdots\cdots\ ㉠$$

양변을 제곱하면

$$t^2-16t+64=4t$$

$$t^2-20t+64=0$$

$\therefore\ t=4$ 또는 16

그런데 ㉠에서 $t=16$이면 모순이므로 $t=4$

그러므로 $x^2-2x=4$

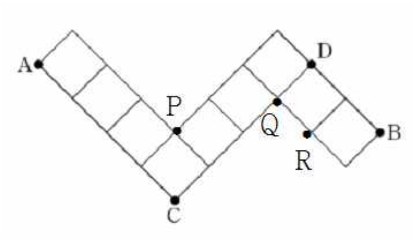
따라서 방정식 $x^2-2x-4=0$의 두 근의 곱은 -4이므로 구하는 값은 -4

<답> ②

5.

출제의도 : 조합을 이용하여 최단거리 길잡이의 수를 구할 수 있는가?

A지점에서 출발하여 C지점을 지나지 않고 D지점도 지나지 않으면서 B지점까지 최단거리로 가는 방법의 수는 그림과 같이
P, Q, R 지점을 잡으면



A→P로 가는 방법의 수 : ${}_4C_1=4$

P→Q로 가는 방법의 수 : ${}_3C_1=3$

Q→R로 가는 방법의 수 : 1

R→B로 가는 방법의 수 : 2

따라서, $4\times3\times1\times2=24$

<답> ②

6.
출제의도 : 쌍곡선의 접선과 점근선을 이용하여 문제의 조건을 만족하는 값을 구할 수 있는가?

$(b,1)$에서의 접선의 방정식은 $bx-4y=a$

점근선의 방정식은 $x\pm2y=0$

그러므로 접선의 기울기는 $\frac{b}{4}$이고 점근선의 기울기는 $\pm\frac{1}{2}$이다.

그런데 $b>0$이고 접선과 점근선이 수직이므로 점근선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.

그러므로 $-\frac{1}{2}\times\frac{b}{4}=-\frac{b}{8}=-1$에서 $b=8$

또, 점 $(8,1)$이 쌍곡선 위의 점이므로

$$8^2-4\times1^2=a$$

$$\therefore\ a=60$$

따라서 $a+b=68$

<답> ①

7.
출제의도 : 지수와 로그를 활용할 수 있는가?

$T=T_0+k\log(8t+1)$에서

$T_0=20, t=\frac{9}{8}$일 때 $T=365$이므로

$365=20+k\log\left(8\cdot\frac{9}{8}+1\right)$

$365=20+k$

$\therefore k=365-20=345$

$T_0=20, t=a$일 때 $T=710$이므로

$710=20+345\log(8a+1)$

$345\log(8a+1)=690$

$\log(8a+1)=2$

$8a+1=100$

$\therefore a=\frac{99}{8}$

<답> ①

8.
출제의도 : 실생활에 활용된 조건부 확률 문제를 해결할 수 있는가?

선택한 한 학생이 지각하는 사건을 A, 학생이 버스로 등교하는 사건을 B라고 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$이다.

$$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^c)$$

$= P(B)P(A|B) + P(B^c)P(A|B^c)$

$= \frac{3}{5} \times \frac{1}{20} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{15}$

$= \frac{17}{300}$

따라서 $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$= \frac{\frac{3}{100}}{\frac{17}{300}}$

$= \frac{9}{17}$

<답> ⑤

9.
출제의도 : 합성변환으로 직선을 다른 직선으로 이동 시킬 수 있는가?

원점을 중심으로 $\frac{\pi}{3}$만큼 회전하는 회전변환 f를 나타내는 행렬은

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$$

직선 $y=x$에 대한 대칭변환 g를 나타내는 행렬은

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 이므로

합성변환 $g^{-1} \circ f \circ g$ 를 나타내는 행렬은

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{3} \\ -\sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{3} \\ -\sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 에서

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$이므로

$x = \frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y'$

$y = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'$을

$x+2y+5=0$ 에 대입하면

$\left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right)x' + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)y' + 5 = 0$

이므로

$a = \frac{1}{2} + \sqrt{3}$, $b = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$

$\therefore\ a + 2b = \frac{5}{2}$

<답> ⑤

10.
출제의도 : 속도와 관련된 실생활 문제를 분수부등식을 활용하여 해결할 수 있는가?

처음 걷는 속력을 v라고 놓으면 나머지 5 km의 속력은 $2v$이고 돌아올 때의 속력은 $v+2$이다.

그러므로

$$\frac{1}{v} + \frac{5}{2v} + \frac{6}{v+2} \le 2 + \frac{1}{2}$$

양변에 $2v(v+2)$를 곱하면

$2(v+2) + 5(v+2) + 12v \le 5v(v+2)$

$5v^2 - 9v - 14 \ge 0$

$(5v-14)(v+1) \ge 0$

$\therefore\ v \le -1$ 또는 $v \ge \frac{14}{5}$

그런데 속력은 양수이므로 $v \ge \frac{14}{5}$

따라서 최솟값은 $\frac{14}{5}$이다.

<답> ③

11.

출제의도 : 독립시행의 정리를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

꺼낸 2개의 공의 색이 다를 확률 p_1은

$$p_1 = \frac{{}_4\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2} = \frac{4}{7}$$

꺼낸 2개의 공의 색이 같을 확률 p_2는

$$p_2 = \frac{{}_4\mathrm{C}_2 + {}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2} = \frac{3}{7}$$

1개의 동전을 3번 던져 앞면이 2번 나올 확률 q_1은

$$q_1 = {}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

1개의 동전을 2번 던져 앞면이 2번 나올 확률 q_2는

$$q_2 = {}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

따라서, 구하는 확률 p는

$$p = p_1 \times q_1 + p_2 \times q_2$$

$$= \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{4}$$

$$= \frac{9}{28}$$

<답> ①

12.

출제의도 : 치환을 이용한 정적분을 할 수 있는가?

$\int_0^1 tf(t)dt = C$라고 놓으면

$f(x) = e^{x^2} + C$

$$\int_0^1 tf(t)dt = \int_0^1 \left(te^{t^2} + Ct\right)dt$$

$$= \int_0^1 te^{t^2}dt + \frac{C}{2}\left[t^2\right]_0^1$$

$$= \int_0^1 te^{t^2}dt + \frac{C}{2}$$

$t^2 = x$로 놓으면 $2t = \frac{dx}{dt}$이고 $t=0$이면 $x=0$, $t=1$이면 $x=1$이므로

$$\int_0^1 te^{t^2}dt = \int_0^1 \frac{e^x}{2}dx$$

$$= \left[\frac{e^x}{2}\right]_0^1 = \frac{e}{2} - \frac{1}{2}$$

따라서 $\frac{e}{2} - \frac{1}{2} + \frac{C}{2} = C$에서 $C = e-1$

$$\therefore \int_0^1 xf(x)dx = C = e-1$$

<답> ④

13.

출제의도 : 정규분포에서 확률을 구할 수 있는가?

$P(X \ge 64) = P(X \le 56)$ 이므로

$$E(X) = \frac{64+56}{2} = 60$$

또한, $E(X^2) = 3616$ 이므로

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 16$$

$\therefore\ \sigma(X)=4$

$\therefore\ P(X\le 68)=P(Z\le \frac{68-60}{4})$

$=P(Z\le 2)$

이때, 주어진 표에서

$P(m\le X\le m+2\sigma)$

$=P(\frac{m-m}{\sigma}\le Z\le \frac{m+2\sigma-m}{\sigma})$

$=P(0\le Z\le 2)=0.4772$

이므로

$P(X\le 68)=P(Z\le 2)$

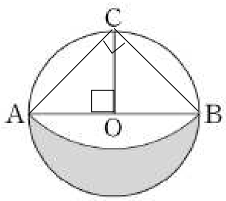
$=0.5+P(0\le Z\le 2)$

$=0.5+0.4772=0.9772$

<답> ④

14.

출제의도 : 무한등비급수에 관련된 내적 문제를 해결할 수 있는가?



R_1

위 그림의 직각삼각형 AOC에서

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{OA}^2+\overline{OC}^2}$

$=\sqrt{1^2+1^2}$

$=\sqrt{2}$

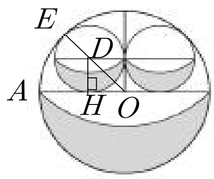
부채꼴 CAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{2})^2\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$

부채꼴 CAB에서 직각삼각형 CAB를 제외한 부분의 넓이는

$\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{2})^2=\frac{\pi}{2}-1$

$\therefore S_1=\frac{1}{2}\pi-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=1$



R_2

위 그림에서 새로 생긴 한 원의 중심을 D, 점 D에서 선분 OA 위에 내린 수선의 발을 H, 원 D의 반지름의 길이를 r라 하면

$\overline{OD}=\overline{OE}-\overline{DE}=1-r$

$\overline{OH}=\overline{DH}=r$

이므로 직각삼각형 ODH에서

$(1-r)^2=r^2+r^2$

$r^2+2r-1=0$

$\therefore r=-1+\sqrt{2}\ (\because r>0)$

이때, 원 O와 원 D의 닮음비가

$1:(-1+\sqrt{2})$이므로 넓이의 비는

$1^2:(-1+\sqrt{2})^2=1:(3-2\sqrt{2})$

이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=1+2(3-2\sqrt{2})+2^2(3-2\sqrt{2})^2+2^3(3-2\sqrt{2})^3+\cdots$$

$$=\frac{1}{1-2(3-2\sqrt{2})}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}-5}$$

$$=\frac{5+4\sqrt{2}}{7}$$

<답> ③

15.

출제의도 : 합성함수가 연속이 될 조건

을 구할 수 있는가?

$g(x)$의 최고차항의 계수는 1이고 $g(0)=3$이므로

$g(x)=x^3+ax^2+bx+3$

라 하자.

이때, $f(x)$는 $x=0$과 $x=2$에서 불연속이고 $(g\circ f)(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 $x=0$과 $x=2$에서도 연속이어야 한다.

$\lim_{x\to 0}(g\circ f)(x)$

$=\lim_{t\to 1-0}g(t)$

$=1+a+b+3=a+b+4$

또한, $(g\circ f)(0)=g(f(0))=g(0)=3$이므로

$a+b+4=3$

$\therefore\ a+b=-1\cdots$㉠

$\lim_{x\to 2+0}(g\circ f)(x)$

$=\lim_{t\to -1+0}g(t)$

$=-1+a-b+3=a-b+2$

$\lim_{x\to 2-0}(g\circ f)(x)$

$=\lim_{t\to +0}g(t)=3$

따라서 $a-b+2=3$ 이므로

$a-b=1\cdots$㉡

㉠,㉡에서 $a=0,\ b=-1$ 이므로

$g(x)=x^3-x+3$

$\therefore\ g(3)=27$

<답> ⑤

16.

출제의도 : 행렬의 연산의 성질을 이해하고 역행렬의 정의를 이해하는가?

ㄱ. $2A^2+AB=E$ 에서

$A(2A+B)=E$

$\therefore\ A^{-1}=2A+B$ (참)

ㄴ. $2A^2+AB=E$ 에서

$AB=E-2A^2$

$AB+BA=2A+E$ 에서

$AB=2A+E-BA$

이므로

$E-2A^2=2A+E-BA$

$-2A^2=2A-BA$

$BA=2A^2+2A$

$\therefore\ B=(2A^2+2A)A^{-1}$

$=2A+2E$ (참)

ㄷ. $2A^2+AB=E$ 에서

$2A^2+A(2A+2E)=E$

$\therefore\ 4A^2=-2A+E$

따라서,

$(B-E)^2=(2A+E)^2$

$=4A^2+4A+E$

$=2A+2E=B$

그런데, $B=O$ 이면 주어진 조건에서

$2A^2=E,\ 2A=-E$

이므로 모순이다.

즉, $B\neq O$ 이므로 $(B-E)^2\neq O$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ 이다.

<답>③

17.

출제의도 : 수열에 관련된 증명을 이해하고 있는가?

$a_{n+1}-a_n$

$=n\cdot 2^n+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}-(n-1)\cdot 2^{n-1}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{k}$

$=\{n\cdot 2^n-(n-1)\cdot 2^{n-1}\}+(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{k})$

$=(n+1)\cdot 2^{n-1}+\frac{a_n}{n}$

이므로

$a_{n+1}=\frac{(n+1)a_n}{n}+(n+1)\cdot 2^{n-1}$

$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}+(n+1)\cdot 2^{n-1}$

이다. $b_n=\frac{a_n}{n}$이라 하면

$b_{n+1}=b_n+\frac{(n+1)\cdot 2^{n-1}}{n+1}$

이고, $b_2=3$ 이므로

$b_n=b_2+\sum_{k=1}^{n-2}2^k$

$=3+\frac{2(2^{n-2}-1)}{2-1}=2^{n-1}+1$

따라서

$f(n)=(n+1)\cdot 2^{n-1}$, $g(n)=2^{n-1}+1$

이므로

$f(4)+g(7)=40+65=105$

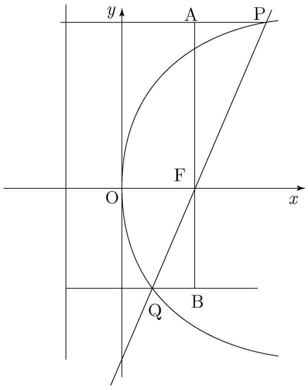
<답> ④

18.

출제의도 : 포물선의 초점을 지나는 직선과 수열의 합이 결합된 문제를 해결할 수 있는가?

포물선의 방정식 $y^2=\frac{x}{n}$에서 초점은 $F(\frac{1}{4n},\ 0)$이고 준선은 $x=-\frac{1}{4n}$이다.

다음 그림에서 초점 F를 지나고 y축과 평행한 직선이 점 P를 지나고 x축과 평행한 직선과 만나는 점을 A, 점 Q를 지나고 x축과 평행한 직선과 만나는 점을 B라고 하자.



그러면 삼각형 FPA와 삼각형 FQB는 닮음삼각형이다.

그런데 $\overline{PA}=1-\frac{1}{2n}$이고

$\overline{QB}=\frac{1}{4n}-(a_n-\frac{1}{4n})=\frac{1}{2n}-a_n$

이다.

그러므로 $1:a_n=(1-\frac{1}{2n}):(\frac{1}{2n}-a_n)$

$(1-\frac{1}{2n})a_n=\frac{1}{2n}-a_n$

$\frac{4n-1}{2n}a_n=\frac{1}{2n}$

$\therefore\ a_n=\frac{1}{4n-1}$

따라서 $\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{10}(4n-1)$

$=4\times\frac{10\times 11}{2}-10$

$=210$

<답> ①

19.

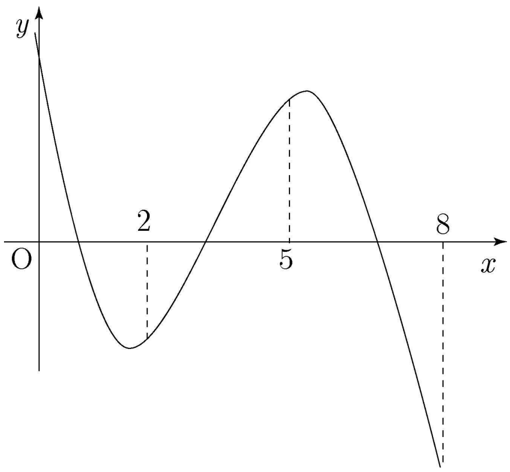
출제의도 : 정적분의 그래프로부터 원시함수의 그래프의 모양을 바르게 추측할 수 있는가?

함수 $g(x)$는 함수 $f(t)$를 $t=0$부터 $t=x$까지 적분하여 값을 구한 후 양수로 바꾼 함수이다.

그런데 $g(2)=0$이므로 $\int_0^2 f(t)dt=0$이고 $f(0)>0$이므로 $f(2)<0$이다.

또 $g(5)=0$이므로 $\int_2^5 f(t)dt=0$이고 $f(2)<0$이므로 $f(5)>0$이고 같은 이유로 $f(8)<0$이다.

그러므로 함수 $y=f(x)$의 대략적인 개형을 그리면 그림과 같다.



ㄱ. 방정식 $f(x)=0$은 구간$(0,2)$, $(2,5)$, $(5,8)$에 각각 근이 하나씩 존재한다. (참)

ㄴ. $x=0$에서 미분계수는 음수이다.(참)

ㄷ. 그림에서 $m=3,4,5$이므로 자연수의 개수는 3이다.(참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

<답> ⑤

20.

출제의도 : 정사면체의 한 변의 길이를 점과 평면사이의 거리 구하는 공식을 활용하여 구할 수 있는가?

평면 $2x-y+z=4$의 법선벡터는 $(2,-1,1)$이고 평면 $x+y+z=3$의 법선벡터는 $(1,1,1)$이므로 두 평면이 이루는 이면각의 크기를 θ라고 놓을 때

$$\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{6}\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

무게중심 $(1,1,3)$에서 평면 $x+y+z=3$까지의 거리는 $\frac{|1+1+3-3|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$

그러므로 꼭짓점 D에서 밑면까지의 거리는 $\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\cos\theta}=\sqrt{6}$

정사면체의 한 변의 길이를 x라고 놓으면 밑면의 정삼각형의 높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}x$

그러므로 $x^2-\left(\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2=(\sqrt{6})^2$

즉, $\frac{2}{3}x^2=6$

따라서 $x=3$

<답> ②

21.

출제의도 : 미분을 이용하여 함수의 그래프를 그릴 수 있는가?

$f(x)=kx^2e^{-x}$ $(k>0)$에서

$f'(x)=2kxe^{-x}-kx^2e^{-x}$

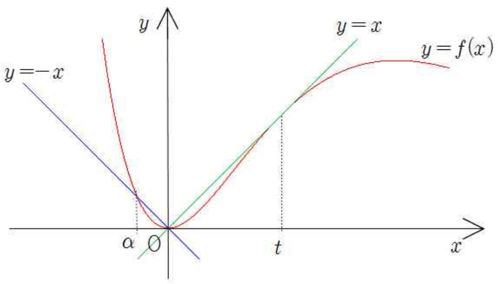
$\quad =kx(2-x)e^{-x}$

$f'(x)=0$을 만족하는 $x=0$, $x=2$

함수의 증가, 감소를 나타내는 표는 다

음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4k}{e^2}$	$\searrow$



곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,f(t))$에서 x축까지의 거리와 y축까지의 거리 중 크지 않은 값이 $g(t)$이므로

$y=f(x)$와 직선 $y=x$, $y=-x$의 교점을 찾는다.

이 때, 미분 가능하지 않는 점이 한 곳만 있으려면

$x<0$일 때, $y=f(x)$와 $y=-x$의 교점에서 미분 가능하지 않으므로

$x>0$에서 곡선 $y=f(x)$와 $y=x$가 만나지 않거나 접하여야 한다.

따라서, 접점의 좌표를 $(t,f(t))$라 하면

$kt^2e^{-t}=t$ $\cdots$ ㉠

$x=t$에서 접선의 기울기가 1이므로

$kt(2-t)e^{-t}=1$ $\cdots$㉡

㉠과 ㉡을 연립하여 풀면

$t=1$, $k=e$ 이다.

따라서, k의 최댓값은 $k=e$ 이다.

<답> ⑤

22.

출제의도 : 로그함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

$f'(x)=\ln x+1+13$이므로 $f'(1)=14$

<답> 14

23.

출제의도 : 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 함수의 합성을 이해하고 있는가?

$f(x)=2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+2\sqrt{3}\sin x$

$=2\left(\cos x\cos\frac{\pi}{3}+\sin x\sin\frac{\pi}{3}\right)+2\sqrt{3}\,sinx$

$=3\sqrt{3}\,sinx+\cos x$

$=\sqrt{28}\,sin(x+\alpha)$

따라서, $f(x)$의 최댓값 $a=\sqrt{28}$

$\therefore\ a^2=28$

<답> 28

24.

출제의도 : 행렬의 거듭제곱을 활용하여 일차변환으로 옮겨지는 점의 좌표를 구할 수 있는가?

일차변환 f를 나타내는 행렬은

$\begin{pmatrix}2 & -1\\1 & -2\end{pmatrix}$이다.

그런데

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\1 & -2\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}2 & -1\\1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\1 & -2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}$$

즉, 일차변환을 나타내는 행렬이 A^2이면 3배 확대하는 닮음변환이므로 A^4은 9배 확대하는 닮음변환이다.

따라서 구하는 좌표는 (45,-9)이므로

$a+b=36$

<답> 36

25.
출제의도 : 신뢰도가 다른 모평균을 추정할 수 있는가?

표준편차가 σ인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 추출하여 신뢰도 95%로 평균을 추정하였으므로

$2\times 1.96\times \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 139.6-100.4 = 39.2$

즉, $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 10$

표본평균을 $\overline{X}$라고 하면

$\overline{X} - 1.96\times 10 = 100.4$에서 $\overline{X} = 120$

신뢰도 99%로 모평균을 추정하면

$[120-2.58\times 10, 120+2.58\times 10]$

$= [94.2, 145.8]$

따라서 구간에 속하는 자연수의 개수는

$145-94 = 51$

<답> 51

26.
출제의도 : 벡터의 합을 이용하여 벡터의 내적의 최댓값을 구할 수 있는가?

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = k\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ (k는 $0\le k\le 1$인 실수)로 놓을 수 있고

$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}})$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{1}{2}k(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}})$이다.

그러므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= \frac{1}{2}k(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\ &= \frac{1}{2}k\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}k\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\ &= 2k+2k\cos 60^\circ\\ &= 3k\end{aligned}$$

또 $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2 = |k\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2 = 3k^2$

$\overrightarrow{\mathrm{PA}} = -\overrightarrow{\mathrm{AP}}$이고 $\overrightarrow{\mathrm{PB}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}}$

구하는 식에서

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} &= -\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}})\\ &= -\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}\\ &= -3k+3k^2\end{aligned}$$

$0\le k\le 1$이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$의 최댓값은 $\dfrac{3}{4}$이다.

따라서 $p+q=7$

<답> 7

27.
출제의도 : 반복되는 점의 좌표의 규칙성을 찾을 수 있는가?

주어진 규칙에 따라 점 P_n의 좌표를 나열해 보면

$P_1(-1, 0)$, $P_2(1, 0)$

$P_3(-1, 2)$, $P_4(1, -2)$

$P_5(-1, 4)$, $P_6(1, -4)$

$P_7(-1, 6)$, $P_8(1, -6)$

…

이므로 자연수 k에 대하여

$P_{2k-1}(-1, 2(k-1))$, $P_{2k}(1, 2(1-k))$

따라서, 점 P_{25}의 좌표는

$P_{25}(-1, 24)$

이므로 $a+b=23$

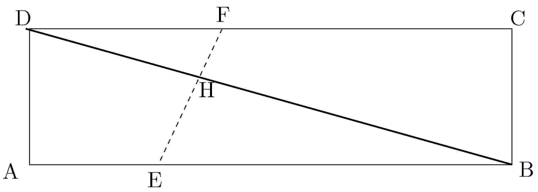
<답> 23

28.

출제의도 : 공간도형에서 이면각의 코사인 값을 구할 수 있는가?

점 B에서 평면 AEFD로의 정사영이 점 D이고 점 D에서 직선 EF에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{BH} \perp \overline{EF}$ 이다.

$\therefore \quad \angle BHD = \theta$



이때, 위의 그림에서 삼각형 BDA와 삼각형 BEH는 닮음이고, 삼각형 BDA는 직각삼각형이므로

$\overline{\mathrm{BD}} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$

그러므로 $\overline{\mathrm{BH}} = x$라고 놓으면

$3\sqrt{10} : 9 = 6 : x$

즉, $x = \dfrac{54}{3\sqrt{10}} = \dfrac{9\sqrt{10}}{5}$

그러므로

$$\overline{\mathrm{DH}} = 3\sqrt{10} - \frac{9\sqrt{10}}{5} = \frac{6\sqrt{10}}{5}$$

이 되어

$$\cos\theta = \frac{\frac{6\sqrt{10}}{5}}{\frac{9\sqrt{10}}{5}} = \frac{2}{3}$$

따라서 $60\cos\theta = 40$

<답> 40

29.

출제의도 : 도형으로 주어진 삼각함수의 극한을 구할 수 있는가?

$\overline{\mathrm{AB}} = 1$, $\angle \mathrm{A} = \theta$, $\angle \mathrm{B} = 2\theta$ 이고

$\angle \mathrm{BCD} = \alpha$라 하면 $\angle \mathrm{ACD} = 2\alpha$ 이므로

$\angle \mathrm{CDB} = \theta + 2\alpha$, $\angle \mathrm{CDA} = 2\theta + \alpha$ 이다,

$(\theta + 2\alpha) + (2\theta + \alpha) = \pi$ 이므로

$\therefore \ \alpha = \dfrac{\pi}{3} - \theta$

사인법칙에 의해

(i) 삼각형 ADC에서

$$\frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\sin 2\alpha} = \frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin\theta}$$

$$\overline{\mathrm{AD}} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin\theta} \cdot \overline{\mathrm{CD}} \quad \cdots ㉠$$

(ii) 삼각형 BDC에서

$$\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin\alpha} = \frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin 2\theta}$$

$$\overline{\mathrm{BD}} = \frac{\sin\alpha}{\sin 2\theta} \cdot \overline{\mathrm{CD}} \quad \cdots ㉡$$

㉠과 ㉡에서

$\overline{\mathrm{AD}} + \overline{\mathrm{BD}} = 1$ 이므로

$$\overline{\mathrm{CD}} \cdot \left(\frac{\sin 2\alpha}{\sin\theta} + \frac{\sin\alpha}{\sin 2\theta} \right) = 1$$

$$\overline{\mathrm{CD}} = \frac{1}{\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\theta} + \dfrac{\sin\alpha}{\sin 2\theta}}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\theta} + \dfrac{\sin\alpha}{2\sin\theta\cos\theta}}$$

$$= \frac{\sin\theta}{\sin\alpha} \times \frac{1}{2\cos\alpha + \dfrac{1}{2\cos\theta}}$$

그런데,

$$\lim_{\theta\to+0}\sin\alpha=\lim_{\theta\to+0}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\lim_{\theta\to+0}\cos\alpha=\lim_{\theta\to+0}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)=\frac{1}{2}$$

이므로

$$\therefore \lim_{\theta\to+0}\frac{\overline{CD}}{\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{1}{\sin\alpha}\times\frac{1}{2\cos\alpha+\frac{1}{2\cos\theta}}$$

$$=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{4}{3\sqrt{3}}$$

$$\therefore\ 27a^2=27\left(\frac{4}{3\sqrt{3}}\right)^2=16$$

<답> 16

30.

출제의도 : 지수함수와 로그함수의 그래프의 특징을 이용하여 조건을 만족시키는 점의 개수를 구할 수 있는가?

$y=2^x-n$의 역함수를 구해보면

$2^x=y+n$ 에서 $x=\log_2(y+n)$

이므로 x와 y를 서로 바꾸면

$y=\log_2(x+n)$

즉, $y=2^x-n$와 $y=\log_2(x+n)$은 서로 역함수의 관계이므로 두 곡선은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

따라서, 주어진 조건을 만족하는 점의 좌표를 (m,m) (m은 정수)라고 하면

$2^m-n\le m\le\log_2(m+n)$

$2^m-m\le n$을 만족하는 m,n에 대하여 $m\le\log_2(m+n)$이 성립하므로

$2^m-m\le n$ ⋯㉠

이라 하면

$2^{-30}-(-30)=\frac{1}{2^{30}}+30,\ 2^{-29}-(-29)=\frac{1}{2^{29}}+29$

⋯

$2^{-3}-(-3)=\frac{1}{8}+3,\ 2^{-2}-(-2)=\frac{1}{4}+2$

$2^{-1}-(-1)=\frac{1}{2}+1,\ 2^0-0=1$

$2^1-1=1,\ 2^2-2=2$

$2^3-3=5,\ 2^4-4=12$

$2^5-5=27,\ 2^6-6=58$

⋯

이므로 자연수 n에 대하여 ㉠을 만족시키는 정수 m의 값은 다음과 같다.

$n=1$ 일 때 $m=0,1$

$n=2$ 일 때, $m=0,1,2,-1$

$n=3$ 일 때, $m=0,1,2,-1,-2$

$n=4$ 일 때, $m=0,1,2,-1,-2,-3$

$n=5$ 일 때, $m=0,1,2,3,-1,-2,-3,-4$

⋯

$n=30$일 때, $m=0,1,\cdots,5,-1,-2,\cdots,-29$

$$\therefore \sum_{n=1}^{30}a_n$$

$$=2\times1+3\times3+4\times7+5\times15+6\times4+(1+2+\cdots+29)$$

$$=2+9+28+75+24+\frac{29\times30}{2}$$

$$=138+435=573$$

<답> 573