

2013학년도 대수능 9월 모의평가 수리영역 나형 정답 및 해설

1.

출제의도 : 행렬의 연산을 할 수 있는가?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

따라서 모든 성분의 합은 8이다.

<답> ④

2.

출제의도 : 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2}{8n^3 + 5} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n^3}}{8 + \frac{5}{n^3}} \\ &= \frac{1 + 0}{8 + 0} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

<답> ①

3.

출제의도 : 등차수열의 일반항을 구할 수 있는가?

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_4 = a_1 + 3d$$

$$= 1 + 3d = 7$$

$$\therefore d = 2$$

$$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$= 1 + (n-1) \times 2$$

$$= 2n - 1$$

$$\therefore a_2 + a_3 = 3 + 5 = 8$$

<다른 풀이>

등차수열 $\{a_n\}$ 의 성질에 의해

$$a_2 + a_3 = a_1 + a_4$$

$$= 1 + 7 = 8$$

<답> ④

4.

출제의도 : 연립일차방정식을 행렬을 이용하여 풀 수 있는가?

행렬 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & a \end{pmatrix}$ 에 대하여

$$1 \cdot a - 2 \cdot 3 = 0$$

$$\therefore a = 6$$

<답> ⑤

5.

출제의도 : 함수의 극한에 대한 개념을 이해하고 그래프를 통해 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 1 + (-1) = 0$$

<답> ③

2013학년도 대수능 9월 모의평가 수리영역 나형 정답 및 해설

6.

출제의도 : 거듭제곱근의 성질을 이해하고 있는가?

$$\begin{aligned} (\sqrt{2^3\sqrt{4}})^3 &= \left(\sqrt{2 \cdot 2^{\frac{2}{3}}}\right)^3 \\ &= \left(\sqrt{2^{\frac{5}{3}}}\right)^3 \\ &= \left(2^{\frac{5}{6}}\right)^3 \\ &= 2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{2^5} \\ &= \sqrt{32} \end{aligned}$$

이때, $5 = \sqrt{25} < \sqrt{32} < \sqrt{36} = 6$ 이므로 $(\sqrt{2^3\sqrt{4}})^3$ 보다 큰 자연수 중 가장 작은 것은 6이다.

<답> ②

7.

출제의도 : 지수와 로그를 활용할 수 있는가?

$\log T = -kld$ 에서

$$T = 10^{-kld}$$

이때, 투과길이가 l_0 이고 용액의 농도가 $3d_0$ 일 때의 투과도가 T_1 이므로

$$T_1 = 10^{-k \cdot l_0 \cdot 3d_0} = 10^{-3kl_0d_0} \text{ ----- ㉠}$$

또, 투과길이가 $2l_0$ 이고 용액의 농도가 $4d_0$ 일 때의 투과도가 T_2 이므로

$$T_2 = 10^{-k \cdot 2l_0 \cdot 4d_0} = 10^{-8kl_0d_0} \text{ ----- ㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$T_2 = T_1^{\frac{8}{3}}$$

이므로

$$n = \frac{8}{3}$$

<답> ⑤

8.

출제의도 : 실생활과 관련된 조건부확률에 관한 문제를 해결할 수 있는가?

5명 중 임의로 뽑힌 한 학생이 만두를 선택한 학생일 사건을 M , 쫄면을 선택한 학생일 사건을 N 이라 하면 구하는 확률은

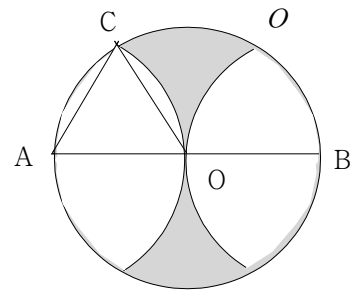
$$\begin{aligned} P(N|M) &= \frac{P(M \cap N)}{P(M)} \\ &= \frac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

<답> ③

9.

출제의도 : 무한등비급수에 관련된 내적문제를 해결할 수 있는가?

아래 그림과 같이 원 O 의 중심을 O , 원 O 와 중심이 A 인 원이 만나는 점을 C 라 하자.



2013학년도 대수능 9월 모의평가 수리영역 나형 정답 및 해설

이때, 삼각형 AOC는 정삼각형이므로

$$\begin{aligned}
 S_1 &= 1^2 \times \pi - 4 \times \{2 \times (\text{부채꼴 OAC}) - \triangle AOC\} \\
 &= 1^2 \times \pi - 4 \times \left\{ 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 1^2 \times \frac{\pi}{3} \right) - \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 \right\} \\
 &= \pi - \left(\frac{4}{3} \pi - \sqrt{3} \right) \\
 &= \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}
 \end{aligned}$$

한편, 도형 R_n 에서 가장 작은 원은 개수가 2^{n-1} , 반지름의 길이가 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이므로

$$\begin{aligned}
 S_n &= S_1 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times S_1 + \dots + 2^{n-1} \times \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right\}^{n-1} S_1 \\
 &= S_1 + \frac{1}{2} S_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 S_1 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} S_1
 \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \frac{S_1}{1 - \frac{1}{2}} \\
 &= \frac{\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}}{1 - \frac{1}{2}} \\
 &= 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi
 \end{aligned}$$

<답> ②

10.

출제의도 : 이항분포를 따르는 확률변수에서 분산의 성질을 이용하여 분산을 구할 수 있는가?

확률변수 X 가 이항분포 $B\left(6, \frac{2}{3}\right)$ 를 따르

므로

분산 $V(X)$ 를 구하면

$$V(X) = 6 \times \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

$$\therefore V(-3X+2) = (-3)^2 V(X)$$

$$= 9 \times \frac{4}{3}$$

$$= 12$$

<답> ⑤

11.

출제의도 : 등비수열의 일반항을 구할 수 있는가?

$$a_1 a_5 = 9 \text{에서 } a_3^2 = 9 \text{이므로}$$

$$a_3 = 3 \quad (\because a_3 > 0)$$

$$\text{또, } a_2 a_6 = 36 \text{에서 } a_4^2 = 36$$

$$a_4 = 6 \quad (\because a_4 > 0)$$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$r = \frac{a_4}{a_3} = \frac{6}{3} = 2$$

$$a_3 = a_1 \times 2^2 = 3 \text{에서}$$

$$a_1 = \frac{3}{4}$$

$$\therefore 8(a_1 a_2 + a_3 a_4) = 8a_1^2 (r + r^2 \times r^3)$$

$$= 8 \times \frac{9}{16} \times (2 + 2^2 \times 2^3)$$

$$= \frac{9}{2} \times 34 = 153$$

<다른 풀이>

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$\begin{aligned}
 a_1 a_5 &= a_1 \times a_1 r^4 \\
 &= a_1^2 r^4 = 9 \dots \text{㉠}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_2 a_6 &= a_1 r \times a_1 r^5 \\
 &= a_1^2 r^6 = 36 \dots \text{㉡}
 \end{aligned}$$

2013학년도 대수능 9월 모의평가 수리영역 나형 정답 및 해설

㉔ ÷ ㉓에서 $r^2 = 4$

$\therefore r = 2$ ($\because r > 0$)

㉕에서 $a_1^2 = \frac{9}{16}$

$$\begin{aligned} \therefore 8(a_1a_2 + a_3a_4) &= 8a_1^2(r + r^2 \times r^3) \\ &= 8 \times \frac{9}{16} \times (2 + 2^2 \times 2^3) \\ &= \frac{9}{2} \times 34 = 153 \end{aligned}$$

<답> ①

12.

출제의도 : 경우의 수를 구하여 확률을 계산할 수 있는가?

나올 수 있는 모든 경우의 수는 ${}_4C_2 \times {}_2C_1 = 12$ (가지)

을 뽑은 1장의 카드에 적힌 수를 a 라 하고

갑이 뽑은 2장의 카드에 적힌 두 수의 곱을 b 라 할 때

가능한 경우의 수는 다음과 같다.

(i) $a = 3$ 일 때, $b = 2 (= 1 \times 2)$

\therefore 1가지

(ii) $a = 4$ 일 때, $b = 2 (= 1 \times 2)$

$b = 3 (= 1 \times 3)$

\therefore 2가지

따라서 구하는 확률은

$$\frac{1+2}{{}_4C_2 \times {}_2C_1} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

<답> ③

13.

출제의도 : 함수의 연속성과 연속함수의 성질을 이해하고 있는가?

\neg . $x > 1$ 에서 $f(x) = -x + 2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (-x + 2) = 1 \text{ (참)}$$

\sqsubset . $x \leq 1$ 에서 $f(x) = a$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} a = \lim_{x \rightarrow 1-0} 0 = 0$$

이므로 \neg 에서 $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x)$

즉,

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 극한값이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 불연속이다. (거짓)

\sqsupset . 함수 $g(x) = (x-1)f(x)$ 에 대하여

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+0} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+0} (x-1)f(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+0} (x-1)(-x+2) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-0} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-0} (x-1)f(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-0} a(x-1) = 0 \end{aligned}$$

이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0$ 이고

$$g(1) = (1-1)f(1) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1)$$

즉, 함수 $y = (x-1)f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 연속이다.

한편, $x > 1$, $x \leq 1$ 에서 함수 $f(x)$ 는 다항함수이므로 연속함수의 성질에 의해 함수 $y = (x-1)f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 \neg , \sqsupset 이다.

<답> ③

2013학년도 대수능 9월 모의평가 수리영역 나형 정답 및 해설

14.

출제의도 : 수열의 규칙성을 찾아 합을 구할 수 있는가?

[단계1]에 적혀 있는 모든 수의 합은

$$\sum_{k=1}^6 k = \frac{6 \times 7}{2} = 21$$

[단계2]에 적혀 있는 모든 수의 합은

$$\sum_{k=1}^7 k = \frac{7 \times 8}{2} = 28$$

[단계3]에 적혀 있는 모든 수의 합은

$$\sum_{k=1}^9 k = \frac{9 \times 10}{2} = 45$$

[단계4]에 적혀 있는 모든 수의 합은

$$\sum_{k=1}^{11} k = \frac{11 \times 12}{2} = 66$$

[단계5]에 적혀 있는 모든 수의 합은

$$\sum_{k=1}^{13} k = \frac{13 \times 14}{2} = 91$$

[단계6]에 적혀 있는 모든 수의 합은

$$\sum_{k=1}^{15} k = \frac{15 \times 16}{2} = 120$$

따라서 <그림6>에 적혀 있는 모든 수의 합은

$$21 + 28 + 45 + 66 + 91 + 120 = 371$$

<답> ④

15.

출제의도 : 로그방정식을 풀 수 있고 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

A_n 의 x 좌표가 $\frac{1}{n}$ 이므로

$$A_n \left(\frac{1}{n}, \log_3 \frac{1}{n} \right)$$

한편, B_n 의 좌표를 $(b_n, \log_3 b_n)$ 이라 하면

점 C_n 은 선분 $A_n B_n$ 을 1 : 2로 내분하는 점이므로

$$C_n \left(\frac{b_n + 2 \times \frac{1}{n}}{1+2}, \frac{\log_3 b_n + 2 \log_3 \frac{1}{n}}{1+2} \right)$$

즉,

$$C_n \left(\frac{b_n + \frac{2}{n}}{3}, \frac{\log_3 b_n + 2 \log_3 \frac{1}{n}}{3} \right)$$

이때, 점 C_n 의 y 좌표가 0이므로

$$\log_3 b_n + 2 \log_3 \frac{1}{n} = 0$$

$$\log_3 b_n = \log_3 n^2$$

$$\therefore b_n = n^2$$

따라서,

$$x_n = \frac{b_n + \frac{2}{n}}{3} = \frac{n^2 + \frac{2}{n}}{3} = \frac{n^3 + 2}{3n}$$

이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2}{3n^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n^3}}{3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

<답> ①

16.

출제의도 : 역행렬에 관련된 성질을 이해하고 있는가?

$$\neg. (A+B)(A^{-1}+B^{-1})=4E \text{에서}$$

$$(A+B) \frac{1}{4} (A^{-1}+B^{-1}) = E$$

이므로

$$(A+B)^{-1} = \frac{1}{4} (A^{-1}+B^{-1})$$

즉, $A+B$ 의 역행렬이 존재한다. <참>

2013학년도 대수능 9월 모의평가 수리영역 나형 정답 및 해설

ㄴ. $A = E$ 이면 $A^{-1} = E$ 이므로 주어진 식에서

$$(E+B)(E+B^{-1}) = 4E$$

$$E+B+B^{-1}+E = 4E$$

$$B+B^{-1} = 2E$$

양변에 B 를 곱하면

$$B^2+E = 2B$$

$$(B-E)^2 = 0$$

이때, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 으로 놓으면

$$(B-E)^2 = 0 \text{이지만 } B \neq E \text{이다.}$$

<거짓>

ㄷ. $AB = \frac{1}{2}E$ 에서 $2AB = 2BA = E$ 이므로

$$A^{-1} = 2B, B^{-1} = 2A$$

주어진 식에 대입하면

$$(A+B)(2A+2B) = 4E$$

$$(A+B)^2 = 2E$$

$$A^2+2AB+B^2 = 2E$$

$$A^2+B^2 = E \text{ <참>}$$

<답> ③

17.

출제의도 : 수열에 관련된 증명을 이해하고 있는가?

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^{2k+1}} &= \frac{2}{3} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^{2k}} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^{2k}} \right) \\ &= \frac{2}{3} \left\{ \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \dots + \frac{n-1}{4^{n-1}} \right) - \left(\frac{1}{4^2} + \frac{2}{4^3} + \dots + \frac{n-1}{4^n} \right) \right\} \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{n-1}} - \frac{n-1}{4^n} \right) \\ &= \frac{2}{3} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4^k} - \frac{\lfloor n-1 \rfloor}{4^n} \right) \end{aligned}$$

이때, $\frac{a_n}{2^n} = \frac{a_1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^{2k+1}}$ 의 양변에 2^n 을 곱하면

$$\begin{aligned} a_n &= 2^{n-1}a_1 + 2^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^{2k+1}} \\ &= 2^{n-1}a_1 + \frac{2^{n+1}}{3} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4^k} - \frac{\lfloor n-1 \rfloor}{4^n} \right) \\ &= 2^{n-1} \left(-\frac{4}{9} \right) + \frac{2^{n+1}}{3} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4^k} - \frac{\lfloor n-1 \rfloor}{4^n} \right) \\ &= \lfloor -\frac{2^{n+1}}{9} \rfloor + \frac{2^{n+1}}{3} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4^k} - \frac{\lfloor n-1 \rfloor}{4^n} \right) \end{aligned}$$

따라서, $f(n) = n-1, g(n) = -\frac{2^{n+1}}{9}$ 이므로

$$\begin{aligned} f(10) \times g(5) &= 9 \times \left(-\frac{2^6}{9} \right) \\ &= -64 \end{aligned}$$

<답> ①

18.

출제의도 : 부정적분과 미분의 관계를 이해하고 있는가?

함수 $f(x)$ 가 이차함수이므로

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0) \text{라 하자.}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \int \{x^2 + f(x)\} dx \\ &= \int \{x^2 + ax^2 + bx + c\} dx \\ &= \int \{(1+a)x^2 + bx + c\} dx \\ &= \frac{1}{3}(1+a)x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx + C \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

(C 는 적분상수)

$$\begin{aligned} \text{한편, } f(x)g(x) &= (ax^2 + bx + c)g(x) \\ &= -2x^4 + 8x^3 \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

이므로 $g(x)$ 는 이차함수이다.

2013학년도 대수능 9월 모의평가 수리영역 나형 정답 및 해설

∴ $a = -1$

㉠, ㉡에서

$$(-x^2 + bx + c)\left(\frac{b}{2}x^2 + cx + C\right) = -2x^4 + 8x^3$$

$$-\frac{b}{2}x^4 + \left(\frac{b^2}{2} - c\right)x^3 + \left(-C + bc + \frac{bc}{2}\right)x^2$$

$$+ (bC + c^2)x + cC = -2x^4 + 8x^3$$

에서

$$-\frac{b}{2} = -2, \quad \frac{b^2}{2} - c = 8,$$

$$-C + bc + \frac{bc}{2} = 0, \quad cC = 0$$

∴ $b = 4, c = 0, C = 0$

∴ $g(x) = 2x^2$

∴ $g(1) = 2$

<답> ㉡

19.

출제의도 : 도형의 넓이 미분법을 이용하여 접선의 접점을 구할 수 있는가?

삼각형 OAP의 넓이가 최대가 되려면 점 P에서 직선 $y = x$ 까지의 거리가 최대이어야 한다.

이때, 점 P에서 접선은 직선 $y = x$ 와 평행이므로 $f'(x) = 1$ 에서

$$a\{(x-2)^2 + 2x(x-2)\} = 1$$

$$3ax^2 - 8ax + 4a - 1 = 0$$

이 이차방정식의 한 근이 $x = \frac{1}{2}$ 이므로

$$3a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 8a \cdot \frac{1}{2} + 4a - 1 = 0$$

$$\frac{3}{4}a - 1 = 0$$

∴ $a = \frac{4}{3}$

<답> ㉡

20.

출제의도 : 정규분포를 따르는 모집단에서 모평균에 대한 신뢰구간을 구할 수 있는가?

정규분포 $N\left(m, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$ 을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기 $n = 25$ 인 표본의 표본평균을 \bar{X} 라 할 때, 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\left[\bar{X} - c \frac{1}{\sqrt{25}}, \bar{X} + c \frac{1}{\sqrt{25}} \right]$$

(단, $P(|Z| \leq c) = 0.95$)

즉, $\left[\bar{X} - \frac{c}{10}, \bar{X} + \frac{c}{10} \right]$

∴ $a = \bar{X} - \frac{c}{10}, b = \bar{X} + \frac{c}{10}$

$$b - a = 2 \times \frac{c}{10} = \frac{c}{5}$$

∴ $c = 5(b - a)$

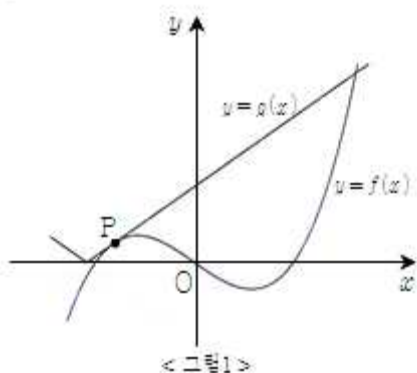
<답> ㉤

21.

출제의도 : 미분법을 이용하여 두 곡선의 위치 관계를 이해하고 있는가?

두 함수 $f(x) = 6x^3 - x$ 와 $g(x) = |x - a|$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나는 경우는 다음 그림과 같다.

2013학년도 대수능 9월 모의평가 수리영역 나형 정답 및 해설



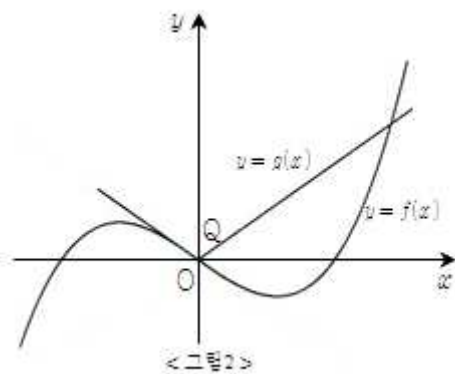
<그림1>에서 직선 $g(x) = x - a$ 가 곡선 $f(x) = 6x^3 - x$ 위의 점 P에서 접하므로

$$f'(x) = 1 \text{에서 } 18x^2 - 1 = 1, \quad x^2 = \frac{1}{9}$$

$$\therefore x = -\frac{1}{3} \quad (x < 0)$$

이때, 접점 P의 좌표는 $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9})$ 이므로

$$\frac{1}{9} = -\frac{1}{3} - a \quad \therefore a = -\frac{4}{9}$$



<그림2>에서 직선 $g(x) = -x + a$ 가 곡선 $f(x) = 6x^3 - x$ 위의 점 Q에서 접하므로 $f'(x) = -1$ 에서

$$18x^2 - 1 = -1, \quad 18x^2 = 0 \quad \therefore x = 0$$

이때, 접점 Q의 좌표는 $(0, 0)$ 이므로

$$0 = 0 + a \quad \therefore a = 0$$

따라서 구하는 모든 실수 a 의 값의 합은

$$-\frac{4}{9} + 0 = -\frac{4}{9}$$

<답> ④

22.

출제의도 : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x + 1)}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} x = 2 \end{aligned}$$

<답> 2

23.

출제의도 : 정적분의 값을 구할 수 있는가?

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 x(3x + 1) dx &= \int_{-2}^2 (3x^2 + x) dx \\ &= \int_{-2}^2 3x^2 dx \\ &= 2 \int_0^2 3x^2 dx \\ &= 2[x^3]_0^2 \\ &= 2(8 - 0) \\ &= 16 \end{aligned}$$

<답> 16

2013학년도 대수능 9월 모의평가 수리영역 나형 정답 및 해설

24.

출제의도 : 이항정리를 활용하여 항의 계수를 구할 수 있는가?

$(1+ax)^5$ 의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r 1^{5-r} (ax)^r = {}_5C_r a^r x^r$$

이때, x^2 항은 $r=2$ 일 때이므로 x^2 의 계수는

$$\begin{aligned} {}_5C_2 a^2 &= \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times a^2 \\ &= 10a^2 = 1440 \end{aligned}$$

$$a^2 = 144$$

$$a > 0 \text{이므로 } a = 12$$

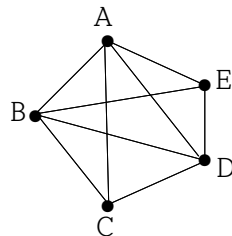
<답> 12

25.

출제의도 : 그래프를 나타내는 행렬을 통해 그래프의 특성을 파악할 수 있는가?

그래프 G 를 나타내는 행렬 M 에 대하여 그림과 같이 그래프 G 를 그리면 다음과 같다.

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$



$$\therefore a = 5, b = 9$$

$$\therefore a + b = 5 + 9 = 14$$

<답> 14

26.

미분계수의 정의를 이해하고 다항함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h) - f(1)}{3h} \cdot 3 \\ &= 3f'(1) \end{aligned}$$

$$f(x) = x^3 + 4x - 2 \text{에서 } f'(x) = 3x^2 + 4$$

$$\therefore 3f'(1) = 3 \times (3 + 4) = 21$$

<답> 21

27.

출제의도 : 정규분포에서 표준화를 통해 두 확률이 같을 조건을 구할 수 있는가?

A 과수원에서 생산하는 귤의 무게를 확률변수 X 라 하면 X 는 정규분포

$$N(86, 15^2) \text{을 따른다.}$$

또, B 과수원에서 생산하는 귤의 무게를 확률변수 Y 라 하면 Y 는 정규분포

$$N(88, 10^2) \text{을 따른다.}$$

A 과수원에서 임의로 선택한 귤의 무게가 98이하일 확률과 B 과수원에서 임의로 선택한 귤의 무게가 a 이하일 확률이 같으므로 $P(X \leq 98) = P(Y \leq a)$ 에서

$$P\left(Z \leq \frac{98 - 86}{15}\right) = P\left(Z \leq \frac{a - 88}{10}\right)$$

$$\therefore a = 96$$

<답> 96

2013학년도 대수능 9월 모의평가 수리영역 나형 정답 및 해설

28.

출제의도 : 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이해하고 수열의 극한을 구할 수 있는가?

$$\sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k)^2 = 2\left(1 - \frac{1}{9^n}\right) \text{에서}$$

$$\begin{aligned} (a_{n+1} - a_n)^2 &= \sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k)^2 - \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)^2 \\ &= 2\left(1 - \frac{1}{9^n}\right) - 2\left(1 - \frac{1}{9^{n-1}}\right) \\ &= \frac{16}{9^n} \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

이때, $n = 1$ 이면

$$(a_2 - a_1)^2 = 2\left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{16}{9}$$

이므로

$$(a_{n+1} - a_n)^2 = \frac{16}{9^n} \quad (n \geq 1)$$

한편, $a_{n+1} > a_n$ 이므로

$$a_{n+1} - a_n = \frac{4}{3^n}$$

$$\therefore a_{n+1} = a_n + \frac{4}{3^n}$$

이때, $a_1 = 10$ 이므로

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{4}{3^k} \\ &= 10 + \frac{4\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= 10 + 2\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\} \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

따라서,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 12$$

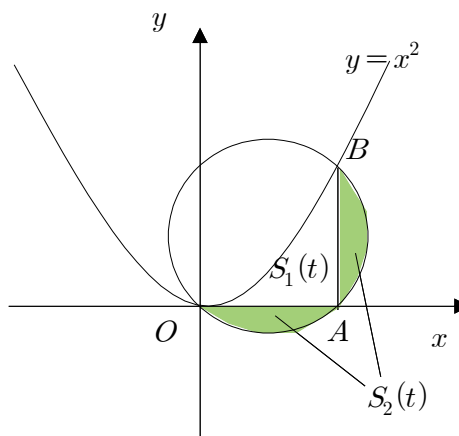
<답> 12

29.

출제의도 : 정적분을 활용하여 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

세 점 $O(0, 0)$, $A(t, 0)$, $B(t, t^2)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB 는 직각삼각형이므로 원 C 의 반지름의 길이 r 는

$$r = \frac{1}{2} \overline{OB} = \frac{1}{2} \sqrt{t^2 + t^4}$$



위의 그림에서 $S_2(t)$ 의 넓이는

$$\begin{aligned} S_2(t) &= (\text{반원의 넓이}) \\ &\quad - (\text{직각삼각형 } OAB \text{의 넓이}) \\ &= \frac{1}{2} \pi \left(\frac{1}{2} \sqrt{t^2 + t^4}\right)^2 - \frac{1}{2} \times t \times t^2 \\ &= \frac{1}{8} (t^2 + t^4) \pi - \frac{1}{2} t^3 \end{aligned}$$

위의 그림에서 $S_1(t)$ 의 넓이는

$$\begin{aligned} S_1(t) &= \int_0^t x^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3\right]_0^t = \frac{1}{3} t^3 \end{aligned}$$

따라서 구하는 넓이 $S(t)$ 는

$$S(t) = S_1(t) + S_2(t)$$

2013학년도 대수능 9월 모의평가 수리영역 가형 정답 및 해설

$$= \frac{1}{8}(t^2+t^4)\pi - \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{3}t^3$$

$$= \frac{1}{8}(t^2+t^4)\pi - \frac{1}{6}t^3$$

$$S'(t) = \frac{1}{8}(2t+4t^3)\pi - \frac{1}{2}t^2$$

$$\therefore S'(1) = \frac{1}{8}(2+4)\pi - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3\pi-2}{4}$$

$$\therefore p=3, q=-2$$

$$\therefore p^2+q^2=9+4=13$$

<답> 13

30.

출제의도 : 로그부등식을 활용하여 정사각형의 개수를 구할 수 있는가?

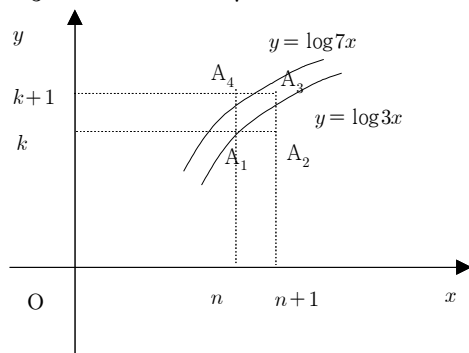
두 자연수 n, k 에 대하여 아래 그림과 같이 네 꼭짓점 $A_1(n, k), A_2(n+1, k), A_3(n+1, k+1), A_4(n, k+1)$ 으로 하는 정사각형이 두 함수 $y = \log 7x, y = \log 3x$ 와 모두 만나기 위해서는

$\log 7n \leq k+1$ 이고 $\log 3(n+1) \geq k$ 이어야 한다.

즉,

$$n \leq \frac{10^{k+1}}{7} \text{ 이고 } n \geq \frac{10^k}{3} - 1$$

$$\therefore \frac{10^k}{3} - 1 \leq n \leq \frac{10^{k+1}}{7}$$



(i) $k=1$ 일 때,

$$\frac{10}{3} - 1 \leq n \leq \frac{100}{7}$$

그러므로 자연수 n 은 3, 4, ..., 14로 12개다.

(ii) $k=2$ 일 때,

$$\frac{100}{3} - 1 \leq n \leq \frac{1000}{7}$$

그리고 꼭지점의 x 좌표는 모두 100이하이므로 $n+1 \leq 100$ 이다.

그러므로 99이하의 자연수 n 은

33, 34, ..., 99로 67개다.

따라서 모든 정사각형의 개수는

$$12 + 67 = 79$$

<답> 79