2013학년도 6월 모의평가 수리영역 나형 정답 및 해설

1.
출제의도 : 로그의 계산을 할 수 있는가?

해설]

$$\log_2 3 + \log_2 \frac{4}{3} = \log_2 (3 \times \frac{4}{3})$$
$$= \log_2 4$$
$$= \log_2 2^2$$
$$= 2\log_2 2$$
$$= 2$$

<답> ②

2.
출제의도 : 행렬에 대한 덧셈과 실수배를 할 수 있는가?

해설]

$$A+2B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

따라서 $A+2B$의 모든 성분의 합은

$7+(-2)+1+3=9$

이다.

<답> ④

3.
출제의도 : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

해설]

$$\lim_{x \to 0}(x^2+2x+3) = 0+0+3=3$$

<답> ③

4.
출제의도 : 그래프의 연결 관계를 행렬로 나타낼 수 있는가?

해설]

주어진 그래프를 행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&1 \\ 1&0&1&0&0&1 \\ 0&1&0&1&1&0 \\ 0&0&1&0&1&0 \\ 0&0&1&1&0&1 \\ 1&1&0&0&1&0 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬의 성분 중 0의 개수는 20이다.

<답> ②

[다른 풀이]

주어진 그래프는 꼭짓점의 개수는 6이고, 변의 개수는 8이다.

따라서 이 그래프의 연결 관계를 행렬로 나타내면 6×6 행렬이고 행렬의 성분 중 1의 개수는

$2 \times 8 = 16$

이므로 행렬의 성분 중 0의 개수는

$36-16=20$

5.
출제의도 : 함수의 극한의 성질을 이용하여 미정계수를 구할 수 있는가?

해설]

$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+ax}{x-1} = b$에서 $\lim_{x \to 1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}(x^2+ax)=1+a=0$이어야 한다.

$\therefore a=-1$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-x}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}x=1$$

$\therefore b=1$

$\therefore a+b=(-1)+1=0$

<답> ③

6.

출제의도 : 함수의 그래프를 통해 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

해설]

$$\lim_{x\to-0}f(x)+\lim_{x\to1+0}f(x)=2+1=3$$

<답> ⑤

7.

출제의도 : 로그의 성질을 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가?

해설]

$$\log P_1=8.11-\frac{1750}{15+235}=8.11-\frac{1750}{250}$$

$$\log P_2=8.11-\frac{1750}{45+235}=8.11-\frac{1750}{280}$$

$$\therefore\ \log\frac{P_2}{P_1}=\log P_2-\log P_1$$
$$=(8.11-\frac{1750}{280})-(8.11-\frac{1750}{250})$$
$$=\frac{1750}{250}-\frac{1750}{280}$$
$$=175(\frac{1}{25}-\frac{1}{28})$$
$$=175\times\frac{3}{25\times28}$$
$$=\frac{3}{4}$$

$$\therefore\ \frac{P_2}{P_1}=10^{\frac{3}{4}}$$

<답> ③

8.

출제의도 : 등비수열의 일반항을 이용하여 주어진 문제를 해결할 수 있는가?

해설]

일반항 $a_n=2^{n-1}$이므로

$$b_n=(a_{n+1})^2-(a_n)^2=(2^n)^2-(2^{n-1})^2$$
$$=2^{2n}-2^{2n-2}$$

$$\therefore\ \frac{b_6}{b_3}=\frac{2^{12}-2^{10}}{2^6-2^4}=\frac{2^6(2^6-2^4)}{2^6-2^4}=2^6=64$$

<답> ⑤

9.

출제의도 : 치환을 이용하여 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

해설]

$x-2=t$로 놓으면 $x=t+2$이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x-2)}{x^2-2x}=\lim_{t\to 0}\left\{\frac{f(t)}{t}\cdot\frac{1}{t+2}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}$$
$$=4$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=8$$

<답> ④

10.

출제의도 : 미분법의 활용에서 수직선 위의 점이 움직이는 방향을 알 수 있는가?

해설]

두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도는 각각

$f'(t)=4t-2,\ g'(t)=2t-8$

이다.

이때, 점 P, Q가 서로 반대방향으로 움직이려면 $f'(t)g'(t)<0$이어야 하므로

$(4t-2)(2t-8)=4(2t-1)(t-4)<0$

$\therefore \frac{1}{2}<t<4$

<답> ①

11.

출제의도 : 수열의 일반항과 합 사이의 관계를 이용하여 분수꼴의 수열의 합을 구할 수 있는가?

해설]

$a_1=S_1=2,\ a_{k+1}=S_{k+1}-S_k$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{a_{k+1}}{S_kS_{k+1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}\frac{S_{k+1}-S_k}{S_kS_{k+1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{S_k}-\frac{1}{S_{k+1}}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_2}\right)+\left(\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{S_{10}}-\frac{1}{S_{11}}\right)$$
$$=\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{11}}$$
$$=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{S_{11}}$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{S_{11}}=\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{S_{11}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$
$$\therefore\ S_{11}=6$$

<답> ①

12.

출제의도 : 무한등비급수의 규칙성을 찾고 그 극한값을 구할 수 있는가?

해설]

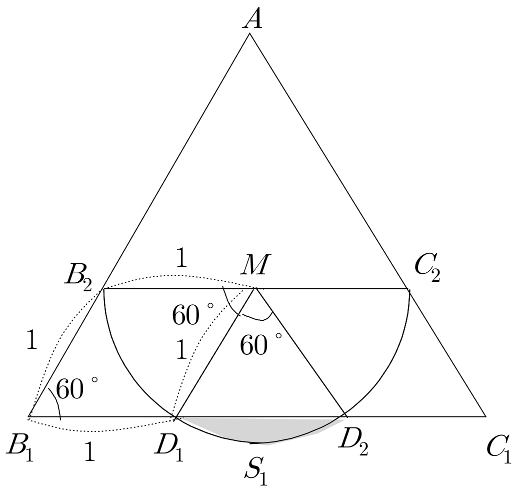
삼각형 AB_nC_n과 삼각형 $AB_{n+1}C_{n+1}$의 닮음비는 $3:2$ 이므로 넓이의 비는 $9:4$ 이다.

따라서, 각 단계에서 얻은 부분의 넓이는 공비가 $\frac{4}{9}$인 등비수열을 이룬다.

또한,

$$\overline{B_2C_2}=3\times\frac{2}{3}=2$$

이므로 그림과 같이 선분 B_2C_2의 중점을 M, 선분 B_1C_1과 호 B_2C_2가 만나는 점을 D_1, D_2라 하면 사각형 $B_1B_2MD_1$은 한 변의 길이가 1인 평행사변형이므로 삼각형 MD_1D_2는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이다.



$\therefore\ S_1 = \pi \times \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}}{1 - \frac{4}{9}}$$

$$= \frac{6\pi - 9\sqrt{3}}{36 - 16}$$

$$= \frac{6\pi - 9\sqrt{3}}{20}$$

<답> ②

13.

출제의도 : 도함수를 활용하여 함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

해설]

함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 + a$에서

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$ 이므로

$f'(x) = 0$에서 $x = 0$ 또는 $x = 2$

$1 \le x \le 4$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$a-2$	↘	$a-4$	↗	$a+16$

따라서 닫힌 구간 $[1, 4]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값 M, 최솟값 m은

$M = a + 16,\quad m = a - 4$

이다.

이 때, $M + m = 20$이므로

$2a + 12 = 20,\ 2a = 8$

$\therefore\ a = 4$

<답> ④

14.

출제의도 : 행렬의 성질을 이용하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판정할 수 있는가?

해설]

ㄱ. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in S$(참)

ㄴ. $A \in S$ 이므로 $A^2 = A$

A^{-1}이 존재하므로

$A^2 = A$의 양변의 오른쪽에 A^{-1}을 곱하면

$A^2A^{-1} = AA^{-1}$　　$\therefore A = E$(참)

ㄷ. $A + E \in S$ 이므로 $(A+E)^2 = A + E$

$A^2 + 2A + E = A + E$

$\therefore A^2 = -A$

$A^4 = (A^2)^2 = (-A)^2 = A^2 = -A$

$(A^4)^2 = (-A)^2 = A^2 = -A$

이므로 $(A^4)^2 = A^4$　　$\therefore A^4 \in S$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

<답> ⑤

15.

출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 구할 수 있는가?

해설]

$a_n = a_{n-2} + 1$에서

(i) $n = 2k-1$일 때,

$a_{2k-1} = a_{2k-3} + 1 (k \geq 2)$

수열 $\{a_{2k-1}\}$은 첫째항이 $a_1 = 2$이고 공차가 1인 등차수열이므로

$a_{2k-1} = 2 + (k-1) \cdot 1 = k+1 (k \geq 1)$

(ii) $n = 2k$일 때,

$a_{2k} = a_{2k-2} + 1 (k \geq 2)$

수열 $\{a_{2k}\}$는 첫째항이 $a_2 = 1$이고 공차가 1인 등차수열이므로

$a_{2k} = 1 + (k-1) \cdot 1 = \boxed{k} (k \geq 1)$

이다. $S_n = a_n a_{n+1}$이므로

$$S_n = \begin{cases} a_{2k-1}a_{2k} = (k+1) \times \boxed{k} & (n = 2k-1) \\ a_{2k}a_{2k+1} = \boxed{k(k+2)} & (n = 2k) \end{cases}$$

따라서 $f(k) = k$, $g(k) = k(k+2)$

$\therefore f(6) + g(7) = 6 + 63 = 69$

<답> ③

16.

출제의도 : 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 여러 가지 수열의 합을 구할 수 있는가?

해설]

이차방정식 $x^2 - 2x - 1 = 0$에서

$\alpha + \beta = 2$, $\alpha\beta = -1$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} (k-\alpha)(k-\beta)$$

$$= \sum_{k=1}^{10} \{k^2 - (\alpha+\beta)k + \alpha\beta\}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} k^2 - (\alpha+\beta)\sum_{k=1}^{10} k + \alpha\beta \sum_{k=1}^{10} 1$$

$$= \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} - 2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} + (-1) \cdot 10$$

$$= 385 - 110 - 10$$

$$= 265$$

<답> ②

17.

출제의도 : 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

해설]

$f(x) = x^3 - 5x$라 하면

$f'(x) = 3x^2 - 5$

이므로 점 $\mathrm{A}(1, -4)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1) = 3 - 5 = -2$

따라서 접선의 방정식은

$y - (-4) = -2(x-1)$

$\therefore\ y = -2x - 2$

이 때, 접선과 곡선 $y = f(x)$가 만나는 점의 x좌표는

$x^3 - 5x = -2x - 2$

$x^3 - 3x + 2 = 0$

$(x-1)^2(x+2) = 0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=-2$

따라서 $\mathrm{B}(-2,\ 2)$이므로

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-2-1)^2+(2+4)^2}$$
$$=\sqrt{9+36}$$
$$=3\sqrt{5}$$

<답> ④

18.

출제의도 : 무한등비급수의 합을 구할 수 있는가?

해설]

$(-3)^{n-1}$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수가 a_n이므로 방정식 $x^n=(-3)^{n-1}$에서

(i) $n=2k+1$(k는 자연수)인 경우

$x^n=(-3)^{2k}=3^{2k}>0$

n이 홀수이므로 실근의 개수는 1이다.

$\therefore a_{2k+1}=1$(k는 자연수)

(ii) $n=2k$(k는 자연수)인 경우

$x^n=(-3)^{2k-1}=-3^{2k-1}<0$

n이 짝수이므로 실근의 개수는 0이다.

$\therefore a_{2k}=0$(k는 자연수)

(i), (ii)에 의하여

$$a_n=\begin{cases}a_{2k+1}=1\ (n=2k+1) \\ a_{2k}\quad\ =0\ (n=2k)\end{cases}\ (\text{단, } k\text{는 자연수})$$

$$\therefore \sum_{n=3}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=\frac{a_3}{2^3}+\frac{a_4}{2^4}+\frac{a_5}{2^5}+\frac{a_6}{2^6}+\cdots$$
$$=\frac{1}{2^3}+\frac{0}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{0}{2^6}+\cdots$$
$$=\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^7}+\cdots$$
$$=\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{8}\times\frac{4}{3}=\frac{1}{6}$$

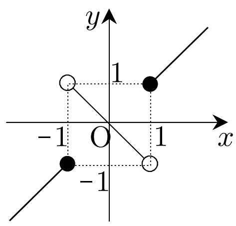
<답> ①

19.

출제의도 : 함수의 연속성에 대한 성질을 이해할 수 있는가?

해설]

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 불연속이므로 불연속인 점은 2개다.(참)

ㄴ. $g(x)=(x-1)f(x)$라 하면

$g(1)=(1-1)\cdot f(1)=0\cdot 1=0$

또, $\lim\limits_{x\to 1-0}g(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}(x-1)(-x)=0\cdot 1=0$

$\lim\limits_{x\to 1+0}g(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}(x-1)x=0\cdot 1=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1}g(x)=0$

따라서 $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=g(1)$이므로 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다. (참)

ㄷ. $h(x)=\{f(x)\}^2$라 하면

(i) $h(-1)=\{f(-1)\}^2=(-1)^2=1$

또, $\lim\limits_{x\to -1-0}h(x)=\lim\limits_{x\to -1-0}x^2=(-1)^2=1$

$\lim\limits_{x\to -1+0}h(x)=\lim\limits_{x\to -1+0}(-x)^2=1^2=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to -1}h(x)=1$

따라서 $\lim\limits_{x\to 1}h(x)=h(-1)$이므로 함수 $h(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

(ii)$h(1)=\{f(1)\}^2=1^2=1$

또, $\lim\limits_{x\to 1-0}h(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}(-x)^2=(-1)^2=1$

$\lim\limits_{x\to 1+0}h(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}x^2=1^2=1$

$\therefore \lim_{x \to 1} h(x) = 1$

따라서 $\lim_{x \to 1} h(x) = h(1)$이므로 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

즉, (i), (ii)로부터 함수 $h(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 연속이므로 실수전체의 집합에서 연속이다.(참)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

<답> ⑤

20.

출제의도 : 수열의 극한과 함수의 그래프와 방정식의 관계를 이해하고 있는가?

해설]

(i) $nf(a)-1 \geq 0$일 때,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|nf(a)-1| - nf(a)}{2n+3}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{nf(a)-1-nf(a)}{2n+3}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{-1}{2n+3} = 0$$

이므로

$\lim_{n \to \infty} \frac{|nf(a)-1| - nf(a)}{2n+3} = 1$에 모순

(ii) $nf(a)-1 < 0$일 때,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|nf(a)-1| - nf(a)}{2n+3}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{-nf(a)+1-nf(a)}{2n+3}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{-2nf(a)+1}{2n+3}$$

$$= -f(a) = 1$$

$\therefore f(a) = -1$

따라서 주어진 그래프에서 $f(a) = -1$인 상수 a의 개수는 2개이다.

<답> ②

21.

출제의도 : 상용로그의 가수의 성질을 알 수 있는가?

해설]

(i) $1 \leq x < 5$일 때, $2 \leq 2x < 10$이므로

$f(x) = \log x$, $f(2x) = \log 2x = \log 2 + \log x$

따라서 $f(2x) > f(x)$이므로 주어진 부등식을 만족하는 x는 존재하지 않는다.

(ii) $5 \leq x < 10$일 때, $10 \leq 2x < 20$이므로

$f(x) = \log x$

$f(2x) = -1 + \log 2x = -1 + \log 2 + \log x$

이때, 부등식 $f(2x) \leq f(x)$에서

$-1 + \log 2 + \log x \leq \log x$

$\therefore \log 2 < 1$

따라서 주어진 부등식은 항상 성립한다.

(iii) $10 \leq x < 50$일 때, $20 \leq 2x < 100$이므로

$f(x) = -1 + \log x$,

$f(2x) = -1 + \log 2x = -1 + \log 2 + \log x$

따라서 $f(2x) > f(x)$이므로 주어진 부등식을 만족하는 x는 존재하지 않는다.

(iv) $50 \leq x < 100$일 때, $100 \leq 2x < 200$이므로

$f(x) = -1 + \log x$

$f(2x) = -2 + \log 2x = -2 + \log 2 + \log x$

이때, 부등식 $f(2x) \leq f(x)$에서

$-2 + \log 2 + \log x \leq -1 + \log x$

$\therefore \log 2 < 1$

따라서 주어진 부등식은 항상 성립한다.

위의 (i)~(iv)에서 $f(2x) \le f(x)$를 만족하는 자연수는

5, 6, 7, 8, 9와 50, 51, 52, $\cdots$, 99로 모두 55개다.

<답> ①

22.

출제의도 : 다항함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

해설]

$f(x)=x^2+7x$에서

$f'(x)=2x+7$

$\therefore\ f'(3)=2\times3+7=13$

<답> 13

23.

출제의도 : 함수의 극한의 성질을 이용하여 미정계수를 구할 수 있는가?

해설]

$a\neq0$일 때, 주어진 식의 극한은 ∞ 또는 $-\infty$로 발산한다.

따라서 $a=0$이어야 한다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{bn+7}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{b+\frac{7}{n}}{3+\frac{1}{n}}=4$에서 $\frac{b}{3}=4$

$\therefore b=12$

$\therefore a+b=0+12=12$

<답> 12

24.

출제의도 : 등차수열의 첫째항과 공차를 구할 수 있는가?

해설]

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_{10}+a_6=(a+9d)+(a+5d)$

$\quad=2a+14d=6\ \cdots$ ㉠

$a_{10}-a_6=(a+9d)-(a+5d)$

$\quad=4d=-12\ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=24,\ d=-3$

$\therefore\ a_2=a+d=21$

<답> 21

25.

출제의도 : 로그부등식을 풀 수 있는가?

해설]

(i) 진수 조건에서

$7-x>0,\ 7+x>0$

$\therefore -7<x<7$ -------------㉠

(ii) 주어진 부등식을 풀면

$\log_2(7-x)+\log_2(7+x)>4$

$\log_2(7-x)(7+x)>\log_2 16$

밑이 1보다 큰 2이므로

$(7-x)(7+x)>16$

$x^2-33=(x-\sqrt{33})(x+\sqrt{33})<0$

$\therefore -\sqrt{33}<x<\sqrt{33}$ -------㉡

이때, $5<\sqrt{33}<6$이므로 ㉠과 ㉡에서 정수 x는 $-5,\ -4,\ -3,\ \cdots,\ 3,\ 4,\ 5$의 11개다.

2013학년도 6월 모의평가 수리영역 나형 정답 및 해설

<답> 11

26.

출제의도 : 역행렬과 연립일차방정식의 관계를 이해하고 있는가?

해설]

$\begin{cases} ax+by=1 \\ cx+dy=2 \end{cases}$ 에서

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 즉, $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

주어진 연립일차방정식의 해가

$x=5,\ y=4$ 이므로

$A\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

$\therefore\ p=5,\ q=4$

$\therefore\ p+q=9$

<답> 9

27.

출제의도 : 미분계수의 뜻을 이해하고 있는가?

해설]

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-5}{x-1}=9$에서 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}\{f(x)-5\}=0$이어야 한다.

$\therefore \lim_{x\to1}f(x)=5$

다항함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 연속이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$이다.

$\therefore f(1)=5$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)-5}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=f'(1)=9$

$\therefore g'(1)=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{xf(x)-f(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{\{xf(x)-f(x)\}+\{f(x)-f(1)\}}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)f(x)}{x-1}+\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}f(x)+f'(1)$

$=f(1)+f'(1)$

$=5+9$

$=14$

<답> 14

28.

출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 수열의 점화식을 구하여 일반항을 구할 수 있는가?

해설]

$\frac{1}{n+2}<\frac{a_n}{k}<\frac{1}{n}$이므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>0$이다.

따라서 주어진 부등식의 각 변의 역수를 취하면

$n<\frac{k}{a_n}<n+2$

$\therefore\ na_n<k<(n+2)a_n$

이때, na_n, $(n+2)a_n$은 모두 자연수이므로 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 k의 개수는

$$(n+2)a_n - na_n - 1 = 2a_n - 1$$

$$\therefore\ a_{n+1} = 2a_n - 1$$

이때, $a_{n+1} - 1 = 2(a_n - 1)$이므로 수열 $\{a_n - 1\}$은 첫째항이 $a_1 - 1 = 1$, 공비가 2인 등비수열이다.

$$\therefore\ a_n - 1 = 1 \times 2^{n-1}\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

$$\therefore\ a_n = 2^{n-1} + 1$$

$$\therefore\ a_{10} = 2^9 + 1 = 513$$

<답> 513

29.

출제의도 : 지수방정식이 실근을 갖기 위한 조건을 구할 수 있는가?

해설]

$4^x + 4^{-x} + a(2^x - 2^{-x}) + 7 = 0$

$(2^x - 2^{-x})^2 + a(2^x - 2^{-x}) + 9 = 0$

$2^x - 2^{-x} = X$ 로 놓으면

$X^2 + aX + 9 = 0$

이 방정식이 실근을 가지려면 판별식 D는

$D = a^2 - 36 \geq 0$

$(a+6)(a-6) \geq 0$

$\therefore\ a \leq -6$ 또는 $a \geq 6$

따라서 양수 a의 최솟값 m은

$m = 6$

$\therefore\ m^2 = 36$

<답> 36

30.

출제의도 : 그래프를 이해하여 로그부등식을 풀고 주어진 조건을 만족하는 값을 구할 수 있는가?

해설]

(가)에서 $a \geq 3$이고

(나)에서

$$\frac{\log_n a}{a-2} \leq \frac{1}{2}\ \cdots\ ㉠$$

이어야 한다.

(i) ㉠에 $a = 3$을 대입하면

$$\frac{\log_n 3}{3-2} \leq \frac{1}{2},\ \log_n 3 \leq \frac{1}{2}$$

$$\log_n 3 \leq \log_n \sqrt{n}$$

따라서 $\sqrt{n} \geq 3$ ($\because\ n > 1$)이므로

$$n \geq 9$$

(ii) ㉠에 $a = 4$를 대입하면

$$\frac{\log_n 4}{4-2} \leq \frac{1}{2},\ \log_n 4 \leq 1$$

$$\log_n 4 \leq \log_n n$$

$$\therefore\ n \geq 4\ (\because\ n > 1)$$

(iii) ㉠에 $a = 5$를 대입하면

$$\frac{\log_n 5}{5-2} \leq \frac{1}{2}$$

따라서 $n^3 \geq 25$이므로

$$n \geq 3\ (\because\ n\text{은 자연수})$$

(i), (ii), (iii)에서

$$f(x) = \begin{cases} 4 & (4 \leq n \leq 8) \\ 3 & (n \geq 9) \end{cases}$$

$$\therefore \sum_{n=4}^{30} f(n) = \sum_{n=4}^{8} f(n) + \sum_{n=9}^{30} f(n)$$
$$= \sum_{n=4}^{8} 4 + \sum_{n=9}^{30} 3 = 4 \times 5 + 3 \times 22 = 86$$

<답> 86