

2013학년도 6월 모의평가 수리영역 가형 정답 및 해설

1.  
출제의도 : 로그의 계산을 할 수 있는가?

해설]

$$\begin{aligned} \log_2 3 + \log_2 \frac{4}{3} &= \log_2 \left( 3 \times \frac{4}{3} \right) \\ &= \log_2 4 \\ &= \log_2 2^2 \\ &= 2\log_2 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

<답> ②

2.  
출제의도 : 다항식의 전개식에서 계수를 구할 수 있는가?

해설]

다항식  $(1+x)^5$ 의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r x^r \quad (r=0,1,2,3,4,5)$$

이므로  $x^2$ 의 계수는

$${}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

<답> ④

3.  
출제의도 : 일차변환의 성질을 이해하는가?

해설]

$f(aX) = af(X)$  이므로  $f(aX) = \begin{pmatrix} 4 \\ b \end{pmatrix}$  에서

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ b \end{pmatrix}, \quad a \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2a \\ 3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ b \end{pmatrix}$$

따라서  $2a=4, 3a=b$  이므로

$$a=2, b=6$$

$$\therefore a+b=8$$

<답> ④

4.  
출제의도 : 그래프의 연결 관계를 행렬로 나타낼 수 있는가?

해설]

주어진 그래프를 행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \end{pmatrix}$$

따라서 행렬의 성분 중 0의 개수는 20이다.

<답> ②

[다른 풀이]

주어진 그래프는 꼭짓점의 개수는 6이고, 변의 개수는 8이다.

따라서 이 그래프의 연결 관계를 행렬로 나타내면  $6 \times 6$  행렬이고 행렬의 성분 중 1의 개수는

$$2 \times 8 = 16$$

이므로 행렬의 성분 중 0의 개수는

$$36 - 16 = 20$$

5.

출제의도 : 쌍곡선과 타원의 방정식을 이해할 수 있는가?

해설]

쌍곡선  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{9} = 1$ 의 두 꼭짓점의 좌표는

$$(a, 0), (-a, 0) \cdots \textcircled{1}$$

이다.

이때, 타원  $\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 두 초점의 좌표가

$\textcircled{1}$ 과 일치하므로

$$13 - b^2 = a^2$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 13$$

<답> ④

6.

출제의도 : 함수가 연속일 조건을 구할 수 있는가?

해설]

두 함수  $f(x), h(x)$ 를

$$f(x) = x^2 + ax + b, \quad h(x) = f(x)g(x)$$

라 하면  $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이고  $g(x)$ 는  $x=0, x=2$ 에서만 불연속이므로  $h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는  $x=0, x=2$ 에서 연속이어야 한다.

(i)  $x=0$ 에서 연속이어야 하므로

$$h(0) = f(0)g(0) = b \times (-1) = -b$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} h(x) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x)g(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} f(x) \lim_{x \rightarrow +0} g(x)$$

$$= b \times 1 = b$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} h(x) = \lim_{x \rightarrow -0} f(x)g(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -0} f(x) \lim_{x \rightarrow -0} g(x)$$

$$= b \times (-1) = -b$$

따라서,  $b = -b$  이므로

$$b = 0$$

(ii)  $x=2$ 에서 연속이어야 하므로

$$h(2) = f(2)g(2) = (4+2a) \times 1 = 4+2a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} f(x)g(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) \lim_{x \rightarrow 2+0} g(x)$$

$$= (4+2a) \times 1 = 4+2a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} f(x)g(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) \lim_{x \rightarrow 2-0} g(x)$$

$$= (4+2a) \times (-1) = -4-2a$$

따라서  $4+2a = -4-2a$  이므로

$$a = -2$$

(i), (ii)에 의하여  $f(x) = x^2 - 2x$  이므로

$$f(5) = 5^2 - 2 \times 5 = 15$$

<답> ①

7.

출제의도 : 로그의 성질을 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가?

해설]

$$\log P_1 = 8.11 - \frac{1750}{15 + 235} = 8.11 - \frac{1750}{250}$$

$$\log P_2 = 8.11 - \frac{1750}{45 + 235} = 8.11 - \frac{1750}{280}$$

$$\therefore \log \frac{P_2}{P_1} = \log P_2 - \log P_1$$

$$= (8.11 - \frac{1750}{280}) - (8.11 - \frac{1750}{250})$$

$$= \frac{1750}{250} - \frac{1750}{280}$$

$$= 175 \left( \frac{1}{25} - \frac{1}{28} \right)$$

$$= 175 \times \frac{3}{25 \times 28}$$

$$= \frac{3}{4}$$

$$\therefore \frac{P_2}{P_1} = 10^{\frac{3}{4}}$$

<답> ③

8.

출제의도 : 함수의 극한의 대소 관계를 이용하여 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

해설]

(i)  $x > 0$ 일 때,

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{e^{2x}-1}{2x}$$

이때,

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

이고  $2x = t$  라 하면

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{2x}-1}{2x} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{e^t-1}{t} = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

(ii)  $-1 < x < 0$ 일 때,

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \geq \frac{f(x)}{x} \geq \frac{e^{2x}-1}{2x}$$

이때,

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

이고  $2x = t$  라 하면

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{e^{2x}-1}{2x} = \lim_{t \rightarrow -0} \frac{e^t-1}{t} = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

(i), (ii)에 의하여  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$

따라서  $3x = t$ 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x)}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{\frac{t}{3}} = 3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = 3 \times 1 = 3$$

<답> ③

9.

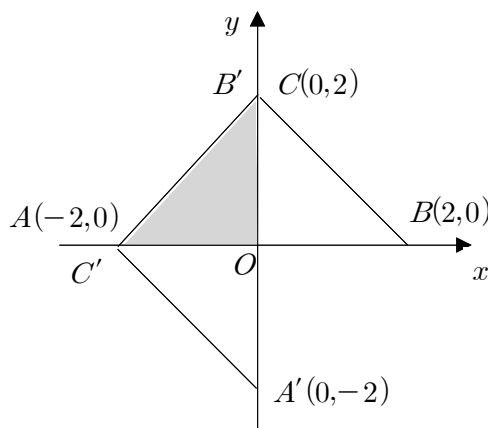
출제의도 : 일차변환을 이용하여 점을 이동시킬 수 있는가?

해설]

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

이므로 주어진 일차변환은 원점을 중심으로  $\frac{\pi}{2}$ 만큼 회전시킨 회전변환을 나타낸다.

즉, 세 점  $A(-2,0)$ ,  $B(2,0)$ ,  $C(0,2)$ 은 각각  $A'(0,-2)$ ,  $B'(0,2)$ ,  $C'(-2,0)$ 로 옮겨지므로 삼각형  $ABC$ 의 내부와 삼각형  $A'B'C'$ 의 내부의 공통부분은 그림의 색칠한 부분과 같다.



따라서, 공통부분의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$$

<답> ③

10.

출제의도 : 정적분으로 표시된 함수를 구할 수 있는가?

해설]

$$\int_0^x f(t)dt = e^x + ax + a \cdots \textcircled{1} \text{의 양변을 } x \text{에 대}$$

하여 미분하면

$$f(x) = e^x + a$$

①의 양변에  $x=0$ 을 대입하면

$$0 = e^0 + a = 1 + a$$

$$\therefore a = -1$$

따라서  $f(x) = e^x - 1$  이므로

$$f(\ln 2) = e^{\ln 2} - 1 = 2 - 1 = 1$$

<답> ①

11.

출제의도 : 수열의 일반항과 합 사이의 관계를 이용하여 분수꼴의 수열의 합을 구할 수 있는가?

해설]

$$a_1 = S_1 = 2, a_{k+1} = S_{k+1} - S_k \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{10} \frac{a_{k+1}}{S_k S_{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{10} \frac{S_{k+1} - S_k}{S_k S_{k+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{10} \left( \frac{1}{S_k} - \frac{1}{S_{k+1}} \right) \\ &= \left( \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_2} \right) + \left( \frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_3} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{S_{10}} - \frac{1}{S_{11}} \right) \\ &= \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_{11}} \\ &= \frac{1}{a_1} - \frac{1}{S_{11}} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{S_{11}} = \frac{1}{3} \\ & \frac{1}{S_{11}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \\ & \therefore S_{11} = 6 \end{aligned}$$

<답> ①

12.

출제의도 : 무한등비급수의 규칙성을 찾고 그 극한값을 구할 수 있는가?

해설]

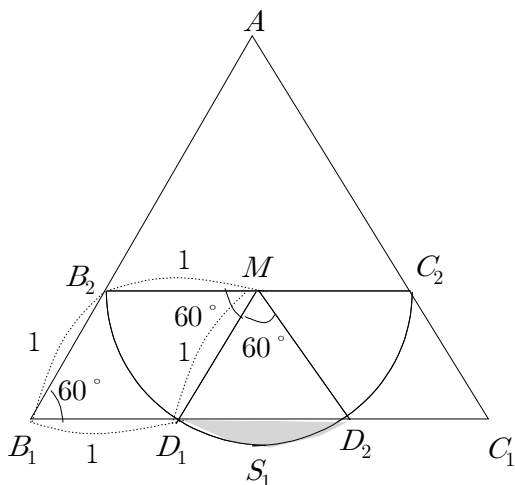
삼각형  $AB_n C_n$ 과 삼각형  $AB_{n+1} C_{n+1}$ 의 닮음비는 3:2 이므로 넓이의 비는 9:4 이다.

따라서, 각 단계에서 얻은 부분의 넓이는 공비가  $\frac{4}{9}$ 인 등비수열을 이룬다.

또한,

$$\overline{B_2 C_2} = 3 \times \frac{2}{3} = 2$$

이므로 그림과 같이 선분  $B_2 C_2$ 의 중점을  $M$ , 선분  $B_1 C_1$ 과 호  $B_2 C_2$ 가 만나는 점을  $D_1, D_2$ 라 하면 사각형  $B_1 B_2 M D_1$ 은 한 변의 길이가 1인 평행사변형이므로 삼각형  $M D_1 D_2$ 는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이다.



$$\begin{aligned} \therefore S_1 &= \pi \times \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n &= \frac{\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}}{1 - \frac{4}{9}} \\ &= \frac{6\pi - 9\sqrt{3}}{36 - 16} \\ &= \frac{6\pi - 9\sqrt{3}}{20} \end{aligned}$$

<답> ②

13.

출제의도 : 삼각함수의 덧셈정리와 합성을 이용하여 함수의 최댓값을 구할 수 있는가?

해설]

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 3\sin x \\ &= 2\left(\cos x \cos \frac{\pi}{6} + \sin x \sin \frac{\pi}{6}\right) + 3\sin x \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right) + 3\sin x \\ &= 4\sin x + \sqrt{3}\cos x \\ &= \sqrt{19}\left(\frac{4}{\sqrt{19}}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}}\cos x\right) \\ &= \sqrt{19}\sin(x + \alpha) \end{aligned}$$

$$\left(\because \cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{19}}, \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}}\right)$$

따라서 함수  $f(x)$ 의 최댓값은  $\sqrt{19}$ 이다.

<답> ④

14.

출제의도 : 행렬의 성질을 이용하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판정할 수 있는가?

해설]

$$\neg. \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in S(\text{참})$$

$$\neg. A \in S \text{ 이므로 } A^2 = A$$

$A^{-1}$ 이 존재하므로

$A^2 = A$ 의 양변의 오른쪽에  $A^{-1}$ 을 곱하면

$$A^2 A^{-1} = A A^{-1} \quad \therefore A = E(\text{참})$$

$$\neg. A + E \in S \text{ 이므로 } (A + E)^2 = A + E$$

$$A^2 + 2A + E = A + E$$

$$\therefore A^2 = -A$$

$$A^4 = (A^2)^2 = (-A)^2 = A^2 = -A$$

$$(A^4)^2 = (-A)^2 = A^2 = -A$$

$$\text{이므로 } (A^4)^2 = A^4 \quad \therefore A^4 \in S(\text{참})$$

따라서 옳은 것은  $\neg$ ,  $\neg$ ,  $\neg$ 이다.

<답> ⑤

15.

출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열의 첫째항부터 제  $n$ 항까지의 합을 구할 수 있는가?

해설]

$$a_n = a_{n-2} + 1 \text{에서}$$

(i)  $n = 2k - 1$  일 때,

$$a_{2k-1} = a_{2k-3} + 1 (k \geq 2)$$

수열  $\{a_{2k-1}\}$ 은 첫째항이  $a_1 = 2$ 이고  
공차가 1인 등차수열이므로

$$a_{2k-1} = 2 + (k-1) \cdot 1 = k+1 (k \geq 1)$$

(ii)  $n = 2k$  일 때,

$$a_{2k} = a_{2k-2} + 1 (k \geq 2)$$

수열  $\{a_{2k}\}$ 은 첫째항이  $a_2 = 1$ 이고  
공차가 1인 등차수열이므로

$$a_{2k} = 1 + (k-1) \cdot 1 = k (k \geq 1)$$

이다.  $S_n = a_n a_{n+1}$ 이므로

$$S_n = \begin{cases} a_{2k-1} a_{2k} = (k+1) \times k (n = 2k-1) \\ a_{2k} a_{2k+1} = k(k+2) (n = 2k) \end{cases}$$

따라서  $f(k) = k, g(k) = k(k+2)$

$$\therefore f(6) + g(7) = 6 + 63 = 69$$

<답> ③

16.

출제의도 :  $x = 1$ 에서의 미분계수를 구할 수 있는가?

해설]

$a > 1$ 이므로  $f(a) > f(1)$ 이고

두 점  $(1, f(1)), (a, f(a))$ 사이의 거리가  $a^2 - 1$

이므로

$$\sqrt{(a-1)^2 + \{f(a) - f(1)\}^2} = a^2 - 1$$

$$(a-1)^2 + \{f(a) - f(1)\}^2 = (a^2 - 1)^2$$

$$\{f(a) - f(1)\}^2 = (a^2 - 1)^2 - (a-1)^2 = (a-1)^2 \{(a+1)^2 - 1\} \dots \textcircled{1}$$

$$\therefore f(a) - f(1) = (a-1) \sqrt{a^2 + 2a} (\because a > 1 \text{이고 } f(a) > f(1))$$

$$f'(1) = \lim_{a \rightarrow 1} \frac{f(a) - f(1)}{a-1} = \lim_{a \rightarrow 1} \frac{(a-1) \sqrt{a^2 + 2a}}{a-1} = \sqrt{3}$$

<답> ⑤

[다른풀이]

$$\textcircled{1} \text{에서 } \left\{ \frac{f(a) - f(1)}{a-1} \right\}^2 = (a+1)^2 - 1 = a^2 + 2a$$

$$\lim_{a \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(a) - f(1)}{a-1} \right\}^2 = \lim_{a \rightarrow 1} (a^2 + 2a)$$

$$\{f'(1)\}^2 = 3$$

$$\therefore f'(1) = \sqrt{3} (\because f'(1) > 0)$$

17.

출제의도 : 분수부등식을 만족시키는 정수  
해의 개수를 구할 수 있는가?

해설]

방정식  $f(x) = 0$ 의 세 근을  $-5, \alpha, 4$ 라 하자.

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{f(x)} \geq \frac{1}{xf(x)} \text{에서}$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{xf(x)} \geq 0$$

$$\text{분모를 통분하면 } \frac{f(x) - x - 1}{xf(x)} \geq 0$$

양변에  $\{xf(x)\}^2$ 을 곱하면

$$xf(x)\{f(x) - (x+1)\} \geq 0 (\text{단, } x \neq 0, f(x) \neq 0)$$

(i)  $x > 0$ 인 경우

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) \geq x+1 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} f(x) < 0 \\ f(x) < x+1 \end{cases}$$

$$\therefore 0 < x \leq \frac{3}{2} \quad \text{또는} \quad 4 < x \leq 5$$

(ii)  $x < 0$ 인 경우

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < x+1 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} f(x) < 0 \\ f(x) \geq x+1 \end{cases}$$

$$\therefore \alpha < x < 0 \quad \text{또는} \quad -5 < x \leq -3 (\because -1 < \alpha < 0)$$

(i), (ii)에 의하여 부등식의 해는

$$0 < x \leq \frac{3}{2} \quad \text{또는} \quad 4 < x \leq 5 \quad \text{또는}$$

$$\alpha < x < 0 \quad \text{또는} \quad -5 < x \leq -3$$

이므로 부등식을 만족시키는 정수  $x$ 는

1, 5, -4, -3의 4개이다.

<답> ②

18.

출제의도 : 무한등비급수의 합을 구할 수 있는가?

$(-3)^{n-1}$ 의  $n$ 제곱근 중 실수인 것의 개수가  $a_n$ 이므로 방정식  $x^n = (-3)^{n-1}$ 에서

(i)  $n = 2k+1$  ( $k$ 는 자연수)인 경우

$$x^n = (-3)^{2k} = 3^{2k} > 0$$

$n$ 이 홀수이므로 실근의 개수는 1이다.

$$\therefore a_{2k+1} = 1 \text{ (} k \text{는 자연수)}$$

(ii)  $n = 2k$  ( $k$ 는 자연수)인 경우

$$x^n = (-3)^{2k-1} = -3^{2k-1} < 0$$

$n$ 이 짝수이므로 실근의 개수는 0이다.

$$\therefore a_{2k} = 0 \text{ (} k \text{는 자연수)}$$

(i), (ii)에 의하여

$$a_n = \begin{cases} a_{2k+1} = 1 & (n = 2k+1) \text{ (단, } k \text{는 자연수)} \\ a_{2k} = 0 & (n = 2k) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=3}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} &= \frac{a_3}{2^3} + \frac{a_4}{2^4} + \frac{a_5}{2^5} + \frac{a_6}{2^6} + \dots \\ &= \frac{1}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{0}{2^6} + \dots \\ &= \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \dots \\ &= \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{8} \times \frac{4}{3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

<답> ①

19.

출제의도 : 무한급수의 합을 정적분의 정의에 의해서 구할 수 있는가?

해설]

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(m + \frac{k}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(m + \frac{(m+1-m)k}{n}\right) \frac{1}{n} \\ &= \int_m^{m+1} f(x) dx < 0 \end{aligned}$$

이므로 만족시키는 정수  $m$ 은  $-3, -2, -1, 2, 3, 4, 5$ 의 7개이다.

<답> ⑤

20.

출제의도 : 포물선과 직선의 위치관계를 이해하고 있는가?

해설]

$$\overline{FA} : \overline{FB} = 1 : 2 \text{ 이므로}$$

$$\overline{FA} = k, \overline{FB} = 2k \text{ 라 하자.}$$

두 점 A, B에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 A', B'이라 하면 포물선의 정의에

$$\text{의하여 } \overline{FA} = \overline{AA'} = k, \overline{FB} = \overline{BB'} = 2k$$

따라서 두 점 A, B의 좌표는

$$A(k-1, 2\sqrt{k-1}), B(2k-1, 2\sqrt{2k-1}) \text{ 이다.}$$

삼각형 PB'B에서

$$\overline{PA'} : \overline{PB'} = 2\sqrt{k-1} : 2\sqrt{2k-1} = 1 : 2 \text{ 이므로}$$

$$\frac{\sqrt{2k-1}}{2k-1} = \frac{2\sqrt{k-1}}{2k-1}$$

$$2k-1 = 4(k-1) = 4k-4$$

$$2k = 3, k = \frac{3}{2} \text{ 이므로 } A\left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right), B(2, 2\sqrt{2})$$

따라서 직선  $l$ 의 기울기는

$$\frac{2\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

<답> ⑤

[다른풀이]

포물선  $C: y^2 = 4x$ 와 직선  $l$ 을  $x$ 축으로 1만큼 평행이동하면

$$C': y^2 = 4(x-1), l': y = mx \text{ (} m > 0 \text{)} \text{이므로}$$

포물선  $C'$ 의 준선이  $x=0$ ( $y$ 축)이 된다.

$$\overline{FA} = k, \overline{FB} = 2k \text{ (} k \neq 0 \text{)} \text{라 하면}$$

$$\begin{cases} y^2 = 4(x-1) \\ y = mx \end{cases} \text{에서 } y \text{를 소거하면}$$

$$m^2x^2 = 4(x-1)$$

$$m^2x^2 - 4x + 4 = 0 \text{의 두 근이 } k, 2k \text{이므로}$$

$$k + 2k = 3k = \frac{4}{m^2} \dots \textcircled{1}$$

$$k \cdot 2k = 2k^2 = \frac{4}{m^2}$$

$m$ 을 소거하면

$$2k^2 - 3k = 0, k(2k - 3) = 0$$

$$k = \frac{3}{2} \text{이므로 } \textcircled{1} \text{에서 } m^2 = \frac{8}{9}$$

$$\therefore m = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

21.

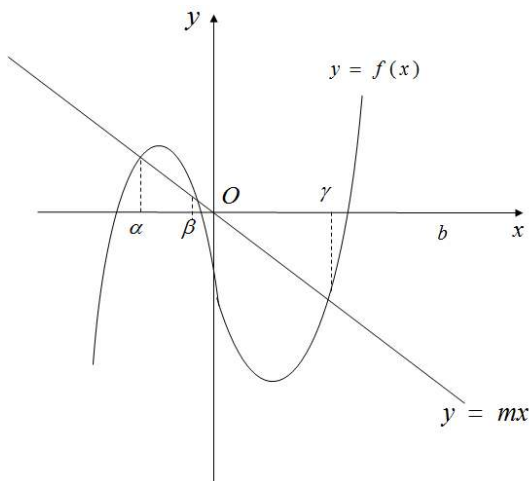
출제의도 : 함수의 미분가능성을 이해하고 삼차함수의 접선의 기울기를 구할 수 있는가?

해설]

주어진 함수  $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 곡선  $y=f(x)$ 와 직선  $y=mx$ 가 만나는 모든 점에서의 곡선  $y=f(x)$ 의 접선의 기울기는  $m$ 이어야 한다.

(i) 곡선  $y=f(x)$ 와 직선  $y=mx$ 가 서로 다른 세 점에서 만날 때, 세 교점의  $x$ 좌표를  $\alpha, \beta, \gamma$  ( $\alpha < \beta < \gamma$ ) 라 하면

$$g(x) = \begin{cases} mx & (x < \alpha) \\ f(x) & (\alpha \leq x < \beta) \\ mx & (\beta \leq x < \gamma) \\ f(x) & (x \geq \gamma) \end{cases}$$



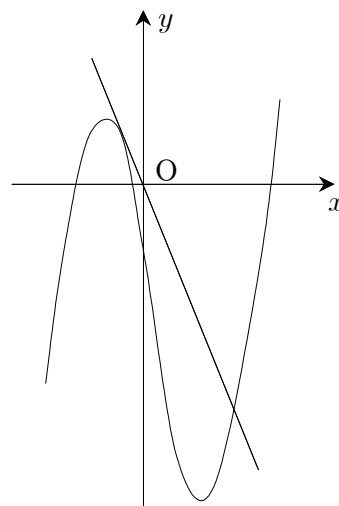
이때, 직선  $y=mx$ 는 곡선  $y=f(x)$ 의 접선이 아니므로

$$f'(\alpha) \neq m, f'(\beta) \neq m, f'(\gamma) \neq m$$

이다. 따라서 함수  $g(x)$ 는  $x=\alpha, \beta, \gamma$ 에서 미분가능하지 않다.

(ii) 곡선  $y=f(x)$ 와 직선  $y=mx$ 가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 두 교점의  $x$ 좌표를  $\alpha, \beta$  ( $\alpha < \beta$ ) 라 하면,

$$g(x) = \begin{cases} mx & (x < \beta) \\ f(x) & (x \geq \beta) \end{cases}$$

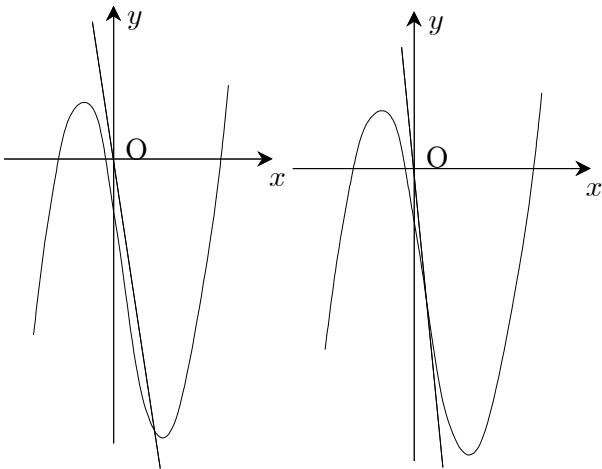


이때,  $f'(\alpha) = m, f'(\beta) \neq m$ 이므로 함수  $g(x)$ 는  $x=\beta$ 에서 미분가능하지 않다.

(iii) 곡선  $y=f(x)$ 와 직선  $y=mx$ 가 한 점에서 만날 때, 교점의  $x$ 좌표를  $\alpha$ 라 하면,

$$g(x) = \begin{cases} mx & (x < \alpha) \\ f(x) & (x \geq \alpha) \end{cases}$$





[그림1]

[그림2]

이때,  $f'(\alpha) = m$ 이면 함수  $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

그런데, [그림1]과 같이 곡선  $y = f(x)$ 와 직선  $y = mx$ 의 교점이 곡선  $y = f(x)$ 의 변곡점이 아니면  $f'(\alpha) = m$ 이 성립하지 않는다.

따라서 함수  $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 [그림2]와 같이 곡선  $y = f(x)$ 와 직선  $y = mx$ 의 교점은 곡선  $y = f(x)$ 의 변곡점이고, 이 변곡점에서의 접선의 기울기는  $m$ 이어야 한다.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 \text{이므로}$$

$$f''(x) = 6x - 6 = 0 \text{에서}$$

$$x = 1$$

따라서 곡선  $y = f(x)$ 의 변곡점의 좌표는  $(1, -12)$ 이고 두 점  $(0, 0), (1, -12)$ 를 지나는 직선의 기울기는

$$m = -12$$

이다. 이때,  $f'(1) = -12$ 이므로 함수  $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

따라서 구하는  $m$ 의 값은  $-12$ 이다.

<답> ②

22.

출제의도 : 무리방정식의 해를 구할 수 있는가?

해설]

$$\sqrt{4x+9} - x = 1 \text{에서}$$

$$\sqrt{4x+9} = x+1 \cdots \text{㉠}$$

㉠의 양변을 제곱하면

$$4x+9 = x^2 + 2x + 1$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x-4)(x+2) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 4$$

그런데,  $x = -2$ 를 ㉠에 대입하면

$$\sqrt{1} = -1 \text{이므로 등식이 성립하지 않는다.}$$

따라서  $x = -2$ 는 무연근이다.

한편,  $x = 4$ 를 ㉠에 대입하면

$$\sqrt{25} = 5 \text{이므로 등식이 성립한다.}$$

따라서 주어진 무리방정식의 해는 4이다.

<답> 4

23.

출제의도 : 삼각방정식의 해를 구할 수 있는가?

해설]

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \text{이므로}$$

$$(\cos 2x - \cos x)\sin x$$

$$= (2\cos^2 x - \cos x - 1)\sin x$$

$$= (\cos x - 1)(2\cos x + 1)\sin x = 0$$

(i)  $\sin x = 0$ 에서

$$x = \pi$$

(ii)  $\cos x = 1$ 을 만족시키는  $x$ 는  $0 < x < 2\pi$ 에 존재하지 않는다.

(iii)  $\cos x = -\frac{1}{2}$ 에서

$$x = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x = \frac{4}{3}\pi$$

따라서 구하는 모든 해의 합은

$$\pi + \frac{2}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi = 3\pi$$

따라서  $k=3$ 이므로

$$10k = 30$$

[다른 풀이]

위의 (ii), (iii) 경우는

$\cos 2x - \cos x = -2\sin \frac{3}{2}x \sin \frac{x}{2}$  임을 이용하여 풀 수도 있다.

$0 < \frac{3}{2}x < 3\pi$ 이고,  $0 < \frac{x}{2} < \pi$ 이므로

$\cos 2x - \cos x = 0$ 의 해는

$$\frac{3}{2}x = \pi \text{ 또는 } \frac{3}{2}x = 2\pi \text{ 이고}$$

$$x = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x = \frac{4}{3}\pi \text{ 이다.}$$

<답> 30

24.

출제의도 : 정적분을 이용하여 회전체의 부피를 구할 수 있는가?

해설]

$y = \frac{1}{2}x^2$ 에서  $x, y$ 를 서로 바꾸면

$$x = \frac{1}{2}y^2$$

위의 식을  $y$ 에 대하여 정리하면

$$y = \pm \sqrt{2x}$$

그런데, 주어진 함수의 정의역이

$\{x \mid x \geq 0\}$ 이므로 역함수의 치역은

$\{y \mid y \geq 0\}$ 이어야 한다.

따라서 주어진 함수의 역함수는

$$y = \sqrt{2x}$$

이다.

한편, 주어진 함수의 그래프와 그 역함수의

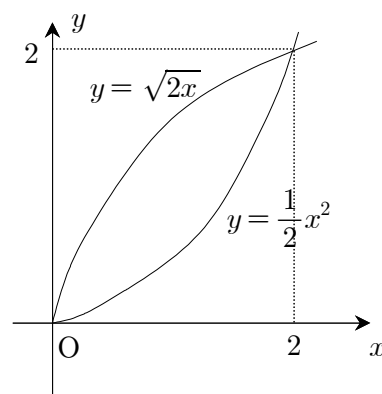
그래프의 교점은 함수  $y = \frac{1}{2}x^2$  ( $x > 0$ )의 그

래프와 직선  $y=x$ 의 교점과 같다.

따라서  $\frac{1}{2}x^2 = x$ 에서

$$x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

이므로 주어진 함수와 그 역함수의 그래프는 다음과 같다.



따라서 구하는 회전체의 부피  $V$ 는

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 \left\{ (\sqrt{2x})^2 - \left( \frac{1}{2}x^2 \right)^2 \right\} dx \\ &= \pi \int_0^2 \left( 2x - \frac{1}{4}x^4 \right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \pi \left[ x^2 - \frac{1}{20} x^5 \right]_0^2 \\
 &= \pi \left( 2^2 - \frac{2^5}{20} \right) \\
 &= \pi \left( 4 - \frac{8}{5} \right) \\
 &= \frac{12}{5} \pi
 \end{aligned}$$

따라서  $p=5, q=12$ 이므로

$$p+q=5+12=17$$

<답> 17

25.

출제의도 : 중복조합을 이용하여 부정방정식의 정수해의 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

해설]

구하는 순서쌍의 개수는 서로 다른 4개 중에서 중복을 허락하여 4개를 뽑는 중복조합의 수와 같다.

$$\begin{aligned}
 \therefore {}_4H_4 &= {}_{4+4-1}C_4 = {}_7C_3 \\
 &= \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35
 \end{aligned}$$

답 35

26.

출제의도 : 역함수의 미분법을 이용하여 접선의 기울기를 구할 수 있는가?

해설]

주어진 조건에서

$$f(2)=1, f'(2)=1$$

이다.

$f(2x)=h(x)$ 라 하면  $g(x)=h^{-1}(x)$ 이다.

이때,  $h(1)=f(2)=1$ 이므로

$$a=g(1)=h^{-1}(1)=1$$

한편,  $h(y)=x$  즉,  $h^{-1}(x)=y$ 라 하면

$$g'(x)=\frac{d}{dx}h^{-1}(x)=\frac{1}{h'(y)}$$

이고,  $h'(x)=2f'(2x)$ 에서

$$h'(1)=2f'(2)=2 \times 1 = 2$$

이므로

$$b=g'(1)=\frac{1}{h'(1)}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore 10(a+b)=10\left(1+\frac{1}{2}\right)=15$$

<답> 15

[다른 풀이]

주어진 조건에서

$$f(2)=1, f'(2)=1$$

이때, 함수  $f(x)$ 의 역함수를  $p(x)$ 라 하면

$$p(1)=2, p'(1)=\frac{1}{f'(2)}=1$$

이다.

한편,  $y=f(2x)$ 에서  $2x=f^{-1}(y)$  즉,

$x=\frac{1}{2}f^{-1}(y)$ 이므로 함수  $y=f(2x)$ 의 역함수

는

$$g(x)=\frac{1}{2}f^{-1}(x)=\frac{1}{2}p(x)$$

이고,

$$g'(x)=\frac{1}{2}p'(x)$$

이다.

2013학년도 6월 모의평가 수리영역 가형 정답 및 해설

따라서

$$a = g(1) = \frac{1}{2}p(1) = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

$$b = g'(1) = \frac{1}{2}p'(1) = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

이므로

$$10(a+b) = 10\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 15$$

<답> 15

27.

출제의도 : 타원의 정의와 성질을 이용하여 장축의 길이를 구할 수 있는가?

해설]

$\overline{OF} = \overline{OF'}$ 이므로 원점 O는 선분  $FF'$ 의 중점이다.

따라서 두 삼각형  $FPF'$ ,  $QFF'$ 에서

$$\overline{OH} // \overline{PF'}, \overline{OI} // \overline{QF}$$

이므로

$$\overline{PF'} \perp \overline{PF}, \overline{QF'} \perp \overline{QF} \dots \text{㉠}$$

이다.

따라서 두 점 P, Q는 주어진 타원과 선분  $FF'$ 을 지름으로 하는 원의 교점이다.

이때, 이 원과 타원의 교점들은 서로  $x$ 축 또는  $y$ 축 또는 원점에 대하여 대칭이므로 두 직각삼각형  $FPF'$ ,  $QFF'$ 은 서로 합동이다.

이때,  $\overline{PF} = \overline{QF'}$ 이면  $\overline{PF'} = \overline{QF}$ 이므로  $\overline{OH} = \overline{OI}$ 가 되어 모순이다.

$$\therefore \overline{PF} = \overline{QF}$$

이제,  $\overline{PF} = \overline{QF} = p$ ,  $\overline{PF'} = \overline{QF'} = q$ 라 하면 타원의 장축의 길이가  $l$ 이므로

$$p+q=l \dots \text{㉡}$$

이고, 직각삼각형  $FPF'$ 에서

$$p^2 + q^2 = \overline{FF'}^2 = 10^2 \dots \text{㉢}$$

이다. 또,  $p = 2 \times \overline{OI}$ ,  $q = 2 \times \overline{OH}$ 이므로

$$pq = 4 \times \overline{OH} \times \overline{OI} = 4 \times 10 = 40 \dots \text{㉣}$$

㉠, ㉢, ㉣에서

$$\begin{aligned} l^2 &= p^2 + q^2 + 2pq \\ &= 100 + 2 \times 40 = 180 \end{aligned}$$

<답> 180

28.

출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 수열의 점화식을 구하여 일반항을 구할 수 있는가?

해설]

$\frac{1}{n+2} < \frac{a_n}{k} < \frac{1}{n}$ 이므로 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $a_n > 0$ 이다.

따라서 주어진 부등식의 각 변의 역수를 취하면

$$n < \frac{k}{a_n} < n+2$$

$$\therefore na_n < k < (n+2)a_n$$

이때,  $na_n$ ,  $(n+2)a_n$ 은 모두 자연수이므로 주어진 부등식을 만족시키는 자연수  $k$ 의 개수는

$$(n+2)a_n - na_n - 1 = 2a_n - 1$$

$$\therefore a_{n+1} = 2a_n - 1$$

이때,  $a_{n+1} - 1 = 2(a_n - 1)$ 이므로 수열  $\{a_n - 1\}$ 은 첫째항이  $a_1 - 1 = 1$ , 공비가 2인 등비수열이다.

$$\therefore a_n - 1 = 1 \times 2^{n-1} \quad (n=1,2,3,\dots)$$

$$\therefore a_n = 2^{n-1} + 1$$

$\therefore a_{10} = 2^9 + 1 = 513$

<답> 513

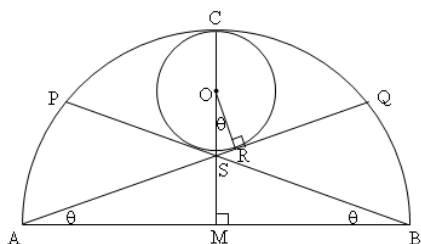
29.

출제의도 : 주어진 도형에서 삼각함수의 극한을 구할 수 있는가?

해설]

다음과 같이 선분 AB의 중점을 M, 두 선분 AQ, BP의 교점을 S라 하자.

또, 내접하는 원의 중심을 O, 이 원과 반원의 교점을 C라 하고, 이 원과 선분 AQ의 접점을 R라 하자.



위의 그림에서 맞꼭지각의 성질에 의해

$\angle ASM = \angle OSR$

이고,  $\angle AMS = \angle ORS = 90^\circ$  이므로

$\angle SOR = \angle SAM = \theta$

이다.

이때,  $\overline{CO} + \overline{OS} + \overline{SM} = \overline{CM} = \overline{AM} = 1$ 이므로

$r(\theta) + r(\theta) \times \frac{1}{\cos\theta} + \tan\theta = 1$

$\left(1 + \frac{1}{\cos\theta}\right)r(\theta) = 1 - \tan\theta$

$\therefore r(\theta) = \frac{1 - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1 + \frac{1}{\cos\theta}} = \frac{\cos\theta - \sin\theta}{1 + \cos\theta}$

$$= \frac{-\sqrt{2} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \cos\theta} = \frac{\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)}{1 + \cos\theta}$$

한편,  $\frac{\pi}{4} - \theta = t$ 라 하면  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{4} - 0$ 일 때  $t \rightarrow +0$

이므로

$\therefore \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4} - 0} \frac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4} - \theta}$

$= \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4} - 0} \frac{\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)}{(1 + \cos\theta)\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)}$

$= \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4} - 0} \frac{\sqrt{2}}{(1 + \cos\theta)} \times \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4} - 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)}{\frac{\pi}{4} - \theta}$

$= \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4} - 0} \frac{\sqrt{2}}{(1 + \cos\theta)} \times \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sin t}{t}$

$= \frac{\sqrt{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} \times 1 = \frac{2\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}$

$= \sqrt{2}(2 - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 2$

$\therefore p = 2, q = -2$

$\therefore p^2 + q^2 = 8$

<답> 8

30.

출제의도 : 그래프를 이해하여 로그부등식을 풀고 주어진 조건을 만족하는 값을 구할 수 있는가?

해설]

(가)에서  $a \geq 3$  이고

(나)에서

$$\frac{\log_n a}{a-2} \leq \frac{1}{2} \dots \textcircled{1}$$

이어야 한다.

(i)  $\textcircled{1}$ 에  $a=3$ 을 대입하면

$$\frac{\log_n 3}{3-2} \leq \frac{1}{2}, \log_n 3 \leq \frac{1}{2}$$

$$\log_n 3 \leq \log_n \sqrt{n}$$

따라서  $\sqrt{n} \geq 3$  ( $\because n > 1$ )이므로

$$n \geq 9$$

(ii)  $\textcircled{1}$ 에  $a=4$ 를 대입하면

$$\frac{\log_n 4}{4-2} \leq \frac{1}{2}, \log_n 4 \leq 1$$

$$\log_n 4 \leq \log_n n$$

$$\therefore n \geq 4 \quad (\because n > 1)$$

(iii)  $\textcircled{1}$ 에  $a=5$ 를 대입하면

$$\frac{\log_n 5}{5-2} \leq \frac{1}{2}$$

따라서  $n^3 \geq 25$ 이므로

$$n \geq 3 \quad (\because n \text{은 자연수})$$

(i), (ii), (iii)에서

$$f(x) = \begin{cases} 4 & (4 \leq n \leq 8) \\ 3 & (n \geq 9) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=4}^{30} f(n) &= \sum_{n=4}^8 f(n) + \sum_{n=9}^{30} f(n) \\ &= \sum_{n=4}^8 4 + \sum_{n=9}^{30} 3 = 4 \times 5 + 3 \times 22 = 86 \end{aligned}$$

<답> 86