

제 2 교시

수리 영역(가형)

5지선다형

1. $\log_2 3 + \log_2 \frac{4}{3}$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. 다항식 $(1+x)^5$ 의 전개식에서 x^2 의 계수는? [2점]

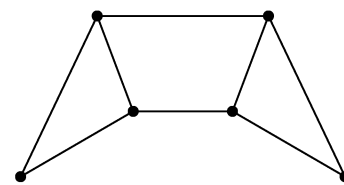
- ① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

3. 행렬 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 로 나타내어지는 일차변환을 f 라 하자.

실수 a, b 와 2×1 행렬 $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 에 대하여 $f(aX) = \begin{pmatrix} 4 \\ b \end{pmatrix}$ 일 때,
 $a+b$ 의 값은? [2점]

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

4. 다음 그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬의 성분 중 0의 개수는? [3점]



- ① 18 ② 20 ③ 22 ④ 24 ⑤ 26

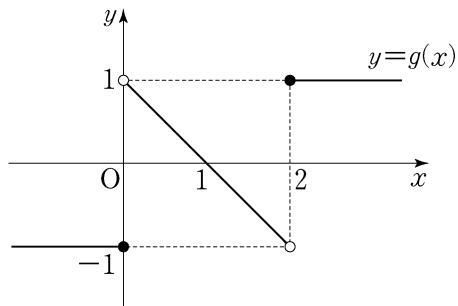
5. 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{9} = 1$ 의 두 꼭짓점은 타원 $\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 두 초점이다. $a^2 + b^2$ 의 값은? [3점]

- ① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

6. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 와 함수

$$g(x) = \begin{cases} -1 & (x \leq 0) \\ -x+1 & (0 < x < 2) \\ 1 & (x \geq 2) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이다. $f(5)$ 의 값은? [3점]



- ① 15 ② 17 ③ 19 ④ 21 ⑤ 23

7. 밀폐된 용기 속의 액체에서 증발과 응축이 계속하여 같은 속도로 일어나는 동적 평형 상태의 증기압을 포화 증기압이라 한다. 밀폐된 용기 속에 있는 어떤 액체의 경우 포화 증기압 $P(\text{mmHg})$ 와 용기 속의 온도 $t(^{\circ}\text{C})$ 사이에 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$\log P = 8.11 - \frac{1750}{t+235} \quad (0 < t < 60)$$

용기 속의 온도가 15°C 일 때의 포화 증기압을 P_1 , 45°C 일 때의 포화 증기압을 P_2 라 할 때, $\frac{P_2}{P_1}$ 의 값은? [3점]

- ① $10^{\frac{1}{4}}$ ② $10^{\frac{1}{2}}$ ③ $10^{\frac{3}{4}}$
 ④ 10 ⑤ $10^{\frac{5}{4}}$

8. 함수 $f(x)$ 가 $x > -1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식

$$\ln(1+x) \leq f(x) \leq \frac{1}{2}(e^{2x}-1)$$

을 만족시킬 때, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x)}{x}$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② e ③ 3 ④ 4 ⑤ $2e$

9. 행렬 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 으로 나타내어지는 일차변환에 의하여 세 점

$A(-2, 0)$, $B(2, 0)$, $C(0, 2)$ 가 옮겨진 점을 각각 A' , B' , C' 이라 하자. 삼각형 ABC 의 내부와 삼각형 $A'B'C'$ 의 내부의 공통부분의 넓이는? [3점]

- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

10. 연속함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_0^x f(t) dt = e^x + ax + a$$

를 만족시킬 때, $f(\ln 2)$ 의 값은? (단, a 는 상수이다.) [3점]

- ① 1 ② 2 ③ e ④ 3 ⑤ $2e$

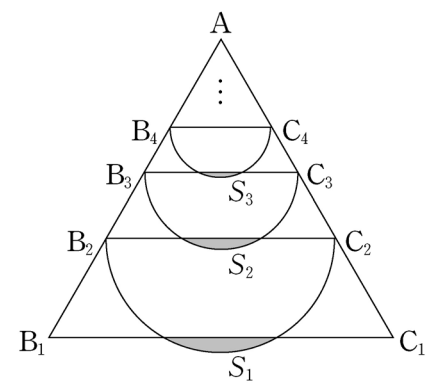
11. 첫째항이 2이고, 각 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $\sum_{k=1}^{10} \frac{a_{k+1}}{S_k S_{k+1}} = \frac{1}{3}$ 일 때, S_{11} 의 값은? [3점]

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

12. 한 변의 길이가 3인 정삼각형 AB_1C_1 이 있다. 그림과 같이 선분 AB_1 과 선분 AC_1 을 2:1로 내분하는 점을 각각 B_2, C_2 라 하고, 선분 B_2C_2 를 지름으로 하는 원의 호 B_2C_2 와 선분 B_1C_1 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1 이라 하자.

정삼각형 AB_2C_2 에서 선분 AB_2 와 선분 AC_2 를 2:1로 내분하는 점을 각각 B_3, C_3 이라 하고, 선분 B_3C_3 을 지름으로 하는 원의 호 B_3C_3 과 선분 B_2C_2 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은? [3점]



- ① $\frac{3\pi - 5\sqrt{3}}{10}$ ② $\frac{6\pi - 9\sqrt{3}}{20}$ ③ $\frac{4\pi - 5\sqrt{3}}{10}$
 ④ $\frac{8\pi - 9\sqrt{3}}{20}$ ⑤ $\frac{10\pi - 9\sqrt{3}}{20}$

13. 함수 $f(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 3\sin x$ 의 최댓값은? [3점]

- ① 4 ② $\sqrt{17}$ ③ $3\sqrt{2}$
 ④ $\sqrt{19}$ ⑤ $2\sqrt{5}$

14. 집합 S 가

$$S = \{M \mid M \text{은 이차정사각행렬이고 } M^2 = M\}$$

일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?
 (단, E 는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in S$

ㄴ. $A \in S$ 이고 A 의 역행렬이 존재하면 $A = E$ 이다.

ㄷ. $A + E \in S$ 이면 $A^4 \in S$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

6

수리 영역(가형)

15. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1=2$ 이고, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 라 할 때,

$$a_{n+1} = \frac{S_n}{a_n} \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 S_n 을 구하는 과정이다.

주어진 식으로부터 $a_2 = \frac{S_1}{a_1} = 1$ 이다.

$n \geq 3$ 일 때,

$$a_n = \frac{S_{n-1}}{a_{n-1}} = \frac{S_{n-2} + a_{n-1}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-2}a_{n-1} + a_{n-1}}{a_{n-1}}$$

이므로

$$a_n = a_{n-2} + 1$$

이다. 따라서 일반항 a_n 을 구하면, 자연수 k 에 대하여

$$n = 2k-1 \text{ 일 때, } a_{2k-1} = k+1$$

$$n = 2k \text{ 일 때, } a_{2k} = \boxed{\text{(가)}}$$

이다. 한편, $S_n = a_n a_{n+1}$ 이므로

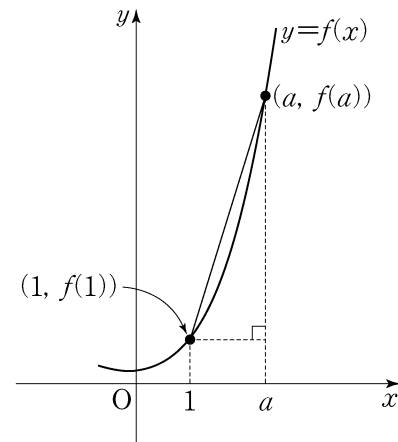
$$S_n = \begin{cases} (k+1) \times \boxed{\text{(가)}} & (n = 2k-1) \\ \boxed{\text{(나)}} & (n = 2k) \end{cases}$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$ 라 할 때, $f(6)+g(7)$ 의 값은? [4점]

- ① 65 ② 67 ③ 69 ④ 71 ⑤ 73

16. 양의 실수 전체의 집합에서 증가하는 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하다. 1보다 큰 모든 실수 a 에 대하여 점 $(1, f(1))$ 과 점 $(a, f(a))$ 사이의 거리가 a^2-1 일 때, $f'(1)$ 의 값은? [4점]

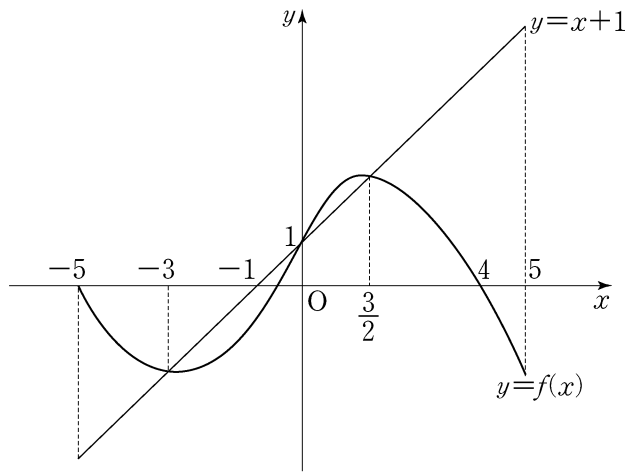


- ① 1 ② $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{6}}{2}$
 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

17. 닫힌 구간 $[-5, 5]$ 에서 정의된 함수 $y=f(x)$ 와 $y=x+1$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 부등식

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{f(x)} \geq \frac{1}{xf(x)}$$

을 만족시키는 정수 x 의 개수는? [4점]



- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

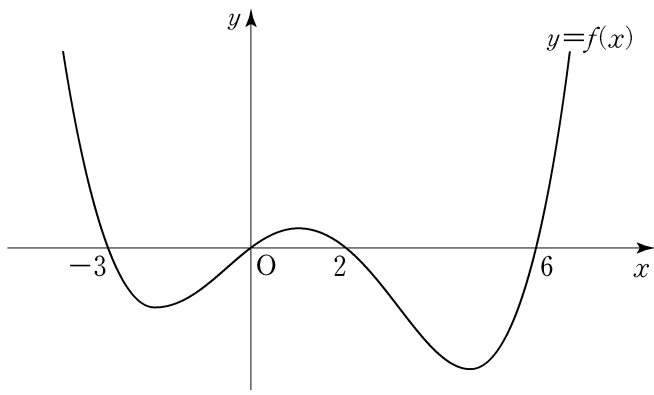
18. 2보다 큰 자연수 n 에 대하여 $(-3)^{n-1}$ 의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수를 a_n 이라 할 때, $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

19. 사차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때,

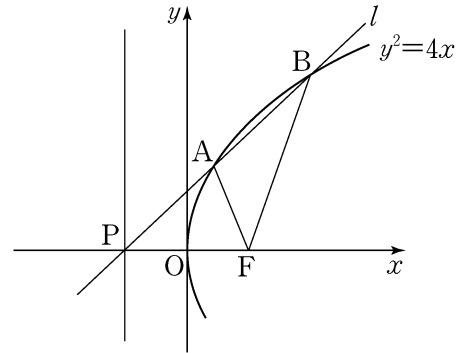
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(m + \frac{k}{n}\right) < 0$$

을 만족시키는 정수 m 의 개수는? [4점]



- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

20. 포물선 $y^2=4x$ 의 초점을 F, 준선이 x 축과 만나는 점을 P, 점 P를 지나고 기울기가 양수인 직선 l 이 포물선과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{FA} : \overline{FB} = 1:2$ 일 때, 직선 l 의 기울기는? [4점]



- ① $\frac{2\sqrt{6}}{7}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ③ $\frac{4}{5}$
 ④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

21. 함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$ 과 실수 m 에 대하여
함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (f(x) \geq mx) \\ mx & (f(x) < mx) \end{cases}$$

라 하자. $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때,
 m 의 값은? [4점]

- ① -14 ② -12 ③ -10 ④ -8 ⑤ -6

단답형

22. 무리방정식 $\sqrt{4x+9} - x = 1$ 의 해를 구하시오. [3점]

23. $0 < x < 2\pi$ 일 때, 방정식

$$(\cos 2x - \cos x) \sin x = 0$$

을 만족시키는 모든 해의 합은 $k\pi$ 이다. $10k$ 의 값을 구하시오.

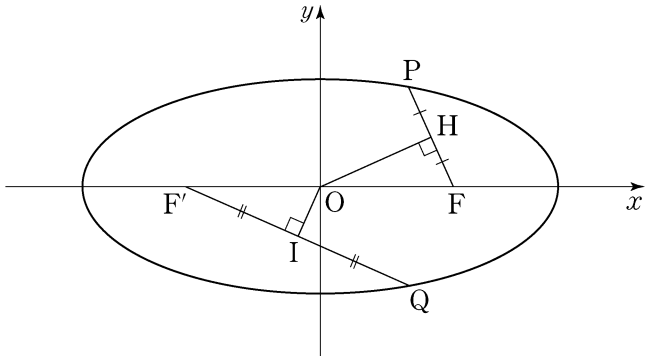
[3점]

24. 함수 $y = \frac{1}{2}x^2 (x \geq 0)$ 의 그래프와 이 함수의 역함수의 그래프로 둘러싸인 부분을 x 축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피는 $\frac{q}{p}\pi$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.
(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [3점]

25. 방정식 $x+y+z+w=4$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수해의 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수를 구하시오. [3점]

26. 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 있다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 1)$ 에서의 접선의 기울기는 1이다. 함수 $f(2x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, a)$ 에서의 접선의 기울기는 b 이다.
 $10(a+b)$ 의 값을 구하시오. [4점]

27. 두 점 $F(5, 0)$, $F'(-5, 0)$ 을 초점으로 하는 타원 위의 서로 다른 두 점 P, Q 에 대하여 원점 O 에서 선분 PF 와 선분 QF' 에 내린 수선의 발을 각각 H 와 I 라 하자. 점 H 와 점 I 가 각각 선분 PF 와 선분 QF' 의 중점이고, $\overline{OH} \times \overline{OI} = 10$ 일 때, 이 타원의 장축의 길이를 l 이라 하자. l^2 의 값을 구하시오. (단, $\overline{OH} \neq \overline{OI}$) [4점]



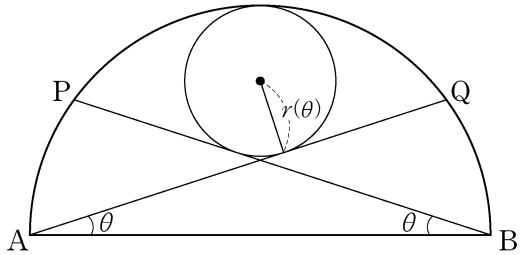
28. 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 = 2$ 이고, $n \geq 1$ 일 때 a_{n+1} 은

$$\frac{1}{n+2} < \frac{a_n}{k} < \frac{1}{n}$$

을 만족시키는 자연수 k 의 개수이다. a_{10} 의 값을 구하시오.

[4점]

29. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 두 점 P, Q를 $\angle ABP = \angle BAQ = \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{4}$)가 되도록 잡는다. 두 선분 AQ, BP와 호 PQ에 내접하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}-0} \frac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4}-\theta} = p\sqrt{2} + q$ 이다. $p^2 + q^2$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 유리수이다.) [4점]



30. 3보다 큰 자연수 n 에 대하여 $f(n)$ 을 다음 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 a 라 하자.

- (가) $a \geq 3$
- (나) 두 점 $(2, 0)$, $(a, \log_n a)$ 를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 보다 작거나 같다.

예를 들어 $f(5) = 4$ 이다. $\sum_{n=4}^{30} f(n)$ 의 값을 구하시오. [4점]

- * 확인 사항
- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.