2012학년도 대학수학능력시험 수리영역 가형 정답 및 해설 (홀수형)

1.
출제의도 : 역행렬을 구할 수 있는가?

$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$ 이므로 역행렬 A^{-1} 의 모든 성분의 합은 4이다.

<답> ②

2.
출제의도 : 무리수 e로 표현된 함수의 극한값을 계산할 수 있는가?

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{5x}=\frac{1}{5}\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\frac{1}{5}\cdot1=\frac{1}{5}$$

<답> ⑤

[참고]
$e^x-1=t$로 놓으면 $e^x=1+t$이므로
$x=\ln(1+t)$ 또한 $x\to0$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\ln(1+t)}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{1}{\frac{\ln(1+t)}{t}}$$
$$=\frac{1}{\ln\left\{\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}}$$
$$=\frac{1}{\ln e}=1$$

3.
출제의도 : 이항분포에서 평균과 분산을 구할 수 있는가?

$\mathrm{E}(X)=40$에서 $200p=40$ $\quad\therefore p=\frac{1}{5}$

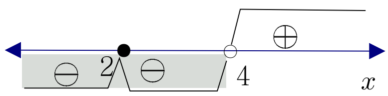
따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(200,\frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$\mathrm{V}(X)=200\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=32$

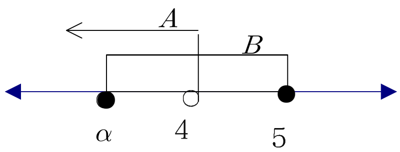
<답> ①

4.
출제의도 : 분수부등식과 해의 집합의 관계를 이해하고 있는가?

집합 A의 분수부등식 $\frac{(x-2)^2}{x-4}\le0$에서
$x-4\ne0$ 이므로 양변에 $(x-4)^2$을 곱하면
$(x-2)^2(x-4)\le0$, $x\ne4$
아래 그림에서 부등식의 해는



$x<4$
따라서 집합 $A\cup B=\{x|x\le5\}$이 되려면
집합 B의 이차부등식 $x^2-8x+a\le0$은
$(x-\alpha)(x-5)\le0\,(\alpha\le4)$
이 되어야 한다.



그런데 $\alpha+5=8$이므로 $\alpha=3$
$\therefore$ $a=15$

<답> ④

5.
출제의도 : 같은 것이 있는 순열의 수를 구할 수 있는가?

먼저 양 끝에 흰색 깃발을 놓으면
흰색 깃발 3개, 파란색 깃발 5개가 남는다.
따라서 구하는 경우의 수는
$\frac{8!}{3!5!}=56$

<답> ①

6.

출제의도 : 닮음변환을 이해하고 있는가?

$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3k \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \therefore \mathrm{A}'(3k, 0)$

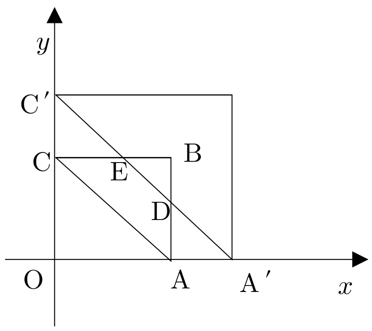
$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3k \end{pmatrix}$ $\quad \therefore \mathrm{C}'(0, 3k)$

따라서 두 점 A′, C′을 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{3k-0}{0-3k}(x-0)+3k = -x+3k$$

직선 $y=-x+3k$가 선분 AB, BC와 만나는 점을 각각 D , E라 하면

$\mathrm{D}(3, -3+3k)$, $\mathrm{E}(-3+3k, 3)$



그러므로 삼각형 BDE의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BD}}\times\overline{\mathrm{BE}} = \frac{1}{2}\times(6-3k)^2$$

이므로

$\frac{1}{2}\times(6-3k)^2 = \frac{1}{2}$ 에서 $(6-3k)^2 = 1$

$\therefore\ 6-3k = 1$

$\therefore k = \frac{5}{3}$

<답> ②

7.

출제의도 : 주어진 로그 관계식을 이해하고 활용할 수 있는가?

$$\log y = A - \frac{1}{2}\log t - \frac{Kx^2}{t}$$

에서

$t=1,\ x=2,\ y=a$ 일 때

$\log a = A - 4k$ --- ㉠

또 $t=4,\ x=d,\ y=\frac{a}{2}$ 일 때

$\log\frac{a}{2} = A - \frac{1}{2}\log 4 - \frac{Kd^2}{4}$ 이므로

$\log a - \log 2 = A - \log 2 - \frac{Kd^2}{4}$ ---㉡

따라서 ㉠을 ㉡ 에 대입하면

$A - 4K = A - \frac{Kd^2}{4}$, $d^2 = 16$

$\therefore\ d = 4\ (\because\ d>0)$

<답> ④

8.

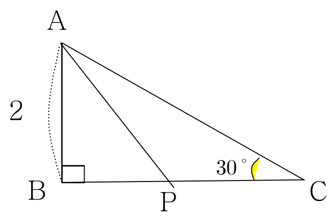
출제의도 : 벡터의 성질을 이용하여 벡터의 크기를 계산할 수 있는가?

$\overrightarrow{\mathrm{PB}} + \overrightarrow{\mathrm{PC}} = \vec{0}$ 에서 $\overrightarrow{\mathrm{PB}} = -\overrightarrow{\mathrm{PC}}$

따라서 점 P는 선분 BC의 중점이다.

직각삼각형 ABC에서

$$\overline{\mathrm{BC}} = \frac{2}{\tan 30^o} = 2\sqrt{3}$$



$\therefore \overline{\mathrm{PB}} = \sqrt{3}$

$\therefore \overline{\mathrm{PA}} = \sqrt{2^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{7}$

$\therefore |\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2 = \overline{\mathrm{PA}}^2 = 7$

<답> ③

9.

출제의도 : 표본평균을 이용하여 모평균을 추정할 수 있는가?

표본평균이 12.34, 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 16이므로

모평균 m의 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$12.34-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}\le m\le 12.34+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}$$

$12.34-1.96\times\frac{\sigma}{4}=11.36$ 에서

$0.49\sigma=0.98 \quad \therefore \sigma=2$

$\therefore\ a=12.34+1.96\times\frac{2}{\sqrt{16}}=13.32$

$\therefore\ a+\sigma=13.32+2=15.32$

<답> ③

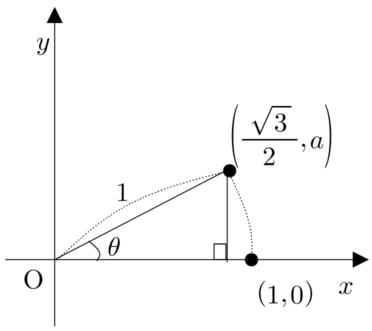
10.

출제의도 : 회전변환을 나타내는 행렬을 구할 수 있는가?

점 (1,0)을 원점을 중심으로 θ만큼 회전이동한 점이 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ a\right)$라 하면 회전변환 f를 나타내는 행렬은

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

이다.



$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+a^2=1$ 에서 $a=\frac{1}{2}$

$\therefore\ b=2\cos\theta=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

$\therefore a^2+b^2=\frac{1}{4}+3=\frac{13}{4}$

<답> ⑤

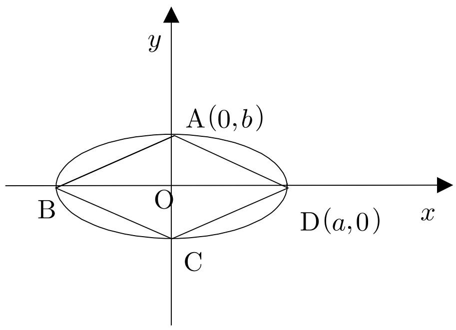
11.

출제의도 : 타원에서 장축의 길이, 단축의 길이, 초점의 좌표의 관계를 이해하고 있는가?

타원의 장축의 길이를 $2a$, 단축의 길이를 $2b$라 하자.

타원의 중심이 원점에 장축이 x축 위에 놓이게 타원을 좌표평면 위에 놓으면 타원의 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



두 초점사이의 거리가 $10\sqrt{2}$이므로

$a^2-b^2=(5\sqrt{2})^2 \ \cdots$ ㉠

또한 마름모의 한 변의 길이가 10이므로

$a^2+b^2=10^2 \ \cdots$ ㉡

㉠+㉡에서 $2a^2=150 \quad \therefore a=5\sqrt{3}$

$a=5\sqrt{3}$을 ㉡에 대입하면 $b=5$

따라서 마름모 ABCD의 넓이는

$4\times\frac{1}{2}ab=50\sqrt{3}$

<답> ③

12.
출제의도 : 그래프를 이용하여 분수방정식의 실근의 개수를 구할 수 있는가?

주어진 방정식의 양변에 $f(x)g(x)$를 곱하면
$g(x)\{g(x)+2\}-2f(x)=f(x)g(x)$
$g(x)\{g(x)+2\}-f(x)\{2+g(x)\}=0$
$\{g(x)+2\}\{g(x)-f(x)\}=0$
$\therefore\ g(x)=-2$ 또는
$g(x)=f(x)$(단,$f(x)\neq 0, g(x)\neq 0$)
ⅰ) $g(x)=-2$ (단,$f(x)\neq 0, g(x)\neq 0$)
$y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=-2$는 서로 다른 두 점에서 만난다.
그런데 $g(3)=-2$ 이지만 $f(3)=0$이므로 $x=3$은 주어진 분수방정식의 무연근이다.
따라서 방정식 $g(x)=-2$은 한 개의 실근을 갖는다.
ⅱ) $g(x)=f(x)$ (단,$f(x)\neq 0, g(x)\neq 0$)
$y=g(x)$의 그래프와 $y=f(x)$의 그래프는 서로 다른 세 점에서 만난다.
이 세 점은 모두 $f(x)\neq 0, g(x)\neq 0$을 만족한다.
따라서 방정식 $g(x)=f(x)$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.
ⅰ), ⅱ)에서 구한 근은 서로 모두 다르므로 구하는 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

<답> ④

13.
출제의도 : 확률의 성질을 이용하여 외적인 상황에서 확률을 구할 수 있는가?

빨간 공이 나오는 사건을 A 라고 하면

$$P(A)=\frac{9}{14},\quad P(A^c)=\frac{5}{14}$$

이 때 [실행 1]을 하여 빨간 공의 개수가 1일 확률은 상자에서 빨간 공 1개, 검은 공1개가 나와야 하므로

$$\frac{{}_3C_1\times{}_5C_1}{{}_8C_2}=\frac{15}{28}$$

또, [실행 2]를 하여 빨간 공의 개수가 1일 확률은

$$\frac{5}{14}\times\frac{{}_3C_1\times{}_3C_1}{{}_6C_2}=\frac{5}{14}\times\frac{9}{15}$$
$$=\frac{3}{14}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{15}{28}+\frac{3}{14}=\frac{21}{28}=\frac{3}{4}$$

<답> ④

14.
출제의도 : 무한등비급수를 이용하여 도형의 넓이를 구할 수 있는가?

R_1에서 주어진 원의 반지름의 길이가 1이므로 넓이는 π 이고 직사각형의 대각선의 길이는 2이다.
따라서 직사각형의 세로의 길이를 a라 하면 가로의 길이는 $3a$ 이므로

$a^2+(3a)^2=10a^2=4$ 에서 $a^2=\frac{2}{5}$

따라서 $S_1=\pi-3a^2=\pi-\frac{6}{5}$

이 때 R_2에서 새로 생긴 원의 지름의 길이는 a이므로 R_2에 들어 있는 색칠된 부분의 넓이 S_2 는

$\left(\pi-\frac{6}{5}\right)+2\times\frac{1}{10}\times\left(\pi-\frac{6}{5}\right)$ 이다.

같은 방법으로 R_n에 들어 있는 색칠된 부분의 넓이 S_n을 구하면

$$S_n=\left(\pi-\frac{6}{5}\right)+\frac{1}{5}\left(\pi-\frac{6}{5}\right)+\frac{1}{25}\left(\pi-\frac{6}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\times\left(\pi-\frac{6}{5}\right)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\pi-\frac{6}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{4}\pi-\frac{3}{2}$$

<답> ②

15.
출제의도 : 행렬의 성질을 이해하고 활용할 수 있는가?

ㄱ. $B=3E-A^2$이므로
$AB=A(3E-A^2)=3A-A^3$
$BA=(3E-A^2)A=3A-A^3$
$\therefore AB=BA$ (참)

ㄴ. $A^2=3E-B$ 이므로
$A^4=(3E-B)^2=B^2-6B+9E$
$A^4+B^2=7E$ 에서
$2B^2-6B+9E=7E$
$B^2-3B=-E$
$B(B-3E)=-BA^2=-E$
$\therefore B^{-1}=A^2$ (참)

ㄷ. ㄴ 에서 $A^2B=BA^2=E$ 이므로
$$(A^2+B)(A^4+B^2)=A^6+A^2B^2+BA^4+B^3$$
$$=A^6+B+A^2+B^3$$
$$=A^6+B^3+3E=21E$$
$\therefore A^6+B^3=18E$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ,ㄴ,ㄷ이다.

<답> ⑤

16.
출제의도 : 정적분을 활용하여 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있는가?

$$a=\int_0^1(e^x-xe^x)dx$$
$$=[(1-x)e^x]_0^1+\int_0^1 e^x dx$$
$$=e-2$$

$$b=\int_1^2(xe^x-e^x)dx$$
$$=[(x-1)e^x]_1^2-\int_1^2 e^x dx$$
$$=e$$

$\therefore b-a=e-(e-2)=2$

<답> ③

17.

출제의도 : 수열의 일반항을 구하는 과정을 이해하는가?

자연수 n에 대하여 $S_{n+1}=S_n+a_{n+1}$이므로

$na_{n+1}=2S_n+(n+1)^3$ ----㉠

이다. 2이상의 자연수 n에 대하여

$(n-1)a_n=2S_{n-1}+n^3$ ----㉡

이고, ㉠에서 ㉡을 빼면

$na_{n+1}-(n-1)a_n=2(S_n-S_{n-1})+(3n^2+3n+1)$

$na_{n+1}=(n+1)a_n+\sqsubset 3n^2+3n+1 \sqsupset$

양변을 $n(n+1)$로 나누면

$$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}+\frac{\sqsubset(3n^2+3n+1)\sqsupset}{n(n+1)}$$

이다. $b_n=\dfrac{a_n}{n}$이라 하면,

$$b_{n+1}=b_n+3+\sqsubset\frac{1}{n(n+1)}\sqsupset\ (n\geq 2)$$

이므로

$$\begin{aligned}b_n&=b_2+\sum_{k=2}^{n-1}\left(3+\frac{1}{k(k+1)}\right)\\&=b_2+3(n-2)+\sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=b_2+\sqsubset 3(n-2)+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\sqsupset\ (n\geq 3)\end{aligned}$$

이다.

따라서, $f(n)=3n^2+3n+1$,

$g(n)=\dfrac{1}{n(n+1)}$, $h(n)=3(n-2)+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n}$이므로

$$\frac{f(3)}{g(3)h(6)}=\frac{37}{\frac{1}{12}\times\frac{37}{3}}=36$$

<답> ②

18.

출제의도 : 미분법을 활용할 수 있는가?

$f'(x)=2\cos x-2x\sin x$이다.

ㄱ. $f'(0)=2$이므로 $a\neq 0$이다.

$f'(a)=2\cos a-2a\sin a=0$

따라서 $1=\dfrac{2}{2a}=\dfrac{\sin a}{\cos a}=\tan a$이다. (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$는 모든 실수에서 연속이고,

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi=\sqrt{2}\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)>0$,

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\cdot\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3}\pi\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi<0$

이므로 중간값 정리에 의하여 $f'(a)=0$인 실수 a가 구간 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)$에 존재한다. 따라서 극댓값을 가지는 a가 존재한다. (참)

ㄷ. $x\neq 0$ 일 때 $2x\cos x=1$ 에서

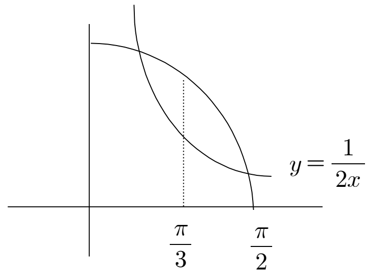
$\cos x=\dfrac{1}{2x}$

$x=\dfrac{\pi}{3}$일 때 $\cos\dfrac{\pi}{3}>\dfrac{3}{2\pi}$ 이므로

$y=\cos x$ 의 그래프가 $y=\dfrac{1}{2x}$의 그래프 위에 존재한다.

따라서 그래프가 다음과 같으므로

구간 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$에서 방정식 $f(x)=1$의 서로 다른 두 실근의 개수는 2이다. (참)



따라서 옳은 것은 ㄱ,ㄴ,ㄷ 이다.

<답> ⑤

19.
출제의도 : 도함수를 활용할 수 있는가?

곡선 위의 점 $(t,\, t^3-3t^2+1)$에서의 접선의 방정식은 $y=(3t^2-6t)(x-t)+t^3-3t^2+1$
이 직선이 $(0,2)$를 지나므로
$2=-3t^3+6t^2+t^3-3t^2+1$
$2t^3-3t^2+1=0$
$(t-1)^2(2t+1)=0$
따라서 $t=1$ 또는 $t=-\frac{1}{2}$일 때 접선을 갖는다.
$m \le 0$일 때 이 직선은 곡선과 서로 다른 두 점에서 만나므로 $m \le 0$인 m에 대하여
$m=f'(-\frac{1}{2})=3\cdot(-\frac{1}{2})^2-6\cdot(-\frac{1}{2})=\frac{15}{4}$일 때 이 직선은 곡선에 접하므로 곡선과 두 점에서 만나고 즉 ,$f(m)=2$이고, $m<\frac{15}{4}$인 경우는 곡선과 한 점에서 만나고, $m>\frac{15}{4}$일 때는 곡선과 서로 다른 세 점에서 만난다.

따라서 $f(m)=\begin{cases} 1 & (m<\frac{15}{4}) \\ 2 & (m=\frac{15}{4}) \\ 3 & (m>\frac{15}{4}) \end{cases}$ 이다. 따라서 함수 $f(m)$이 구간 $(-\infty, a)$에서 연속이 되게 하는 실수 a의 최댓값은 $\frac{15}{4}$이다.

<답> ④

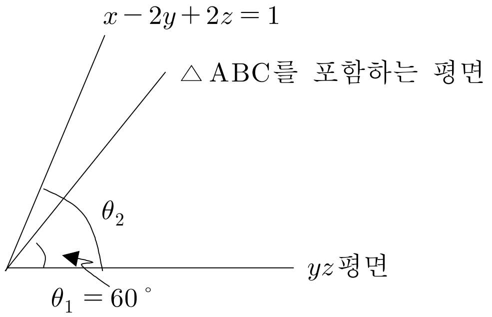
20.
출제의도 : 삼각함수의 합성을 활용하여 최댓값을 구할 수 있는가?

$3\sin\theta_1+4\sin\theta_2=3\sin\theta_1+4\sin(\frac{\pi}{3}-\theta_1)$
$=3\sin\theta_1+4\sin\frac{\pi}{3}\cos\theta_1-4\cos\frac{\pi}{3}\sin\theta_1$
$=3\sin\theta_1+2\sqrt{3}\cos\theta_1-2\sin\theta_1$
$=\sin\theta_1+2\sqrt{3}\cos\theta_1$
$=\sqrt{13}\sin(\theta_1+x)\ (\tan x=2\sqrt{3})$
$\theta_1+x=\frac{\pi}{2}$일 때, 즉 $\theta_1=\frac{\pi}{2}-x$일 때
$3\sin\theta_1+4\sin\theta_2$의 값이 최대가 된다.
따라서 $m=\tan(\frac{\pi}{2}-x)=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$

<답> ①

21.
출제의도 : 정사영과 두 평면이 이루는 각의 크기와의 관계를 알고 있는가?

(가), (나) 조건에 의해 ABC를 포함한 평면과 yz평면이 이루는 예각의 크기를 θ_1라 하면
$6\cos\theta_1=3$
에서 $\cos\theta_1=\frac{1}{2}$ 즉, $\theta_1=60^\circ$
평면 $x-2y+2z=1$과 yz평면이 이루는 예각의 크기를 θ_2라 하면 두 평면의 법선벡터가 각각 $(1,\ -2,\ 2)$, $(1,\ 0,\ 0)$이므로
$\cos\theta_2=\frac{|1\cdot1+(-2)\cdot0+2\cdot0|}{\sqrt{1+(-2)^2+2^2}\sqrt{1^2+0^2+0^2}}$
$=\frac{1}{3}$
한편, 삼각형 ABC의 평면 $x-2y+2z=1$위로의 정사영의 넓이가 최대가 되기 위해서는 이 두 평면이 이루는 예각의 크기가 최소가 되어야 한다.



최소의 각을 θ라 하면

$\theta=\theta_2-\theta_1$

그러므로

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \cos(\theta_1-\theta_2)\\ &= \cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{1-\frac{1}{9}}\\ &= \frac{1}{6}+\frac{2\sqrt{6}}{6}\end{aligned}$$

따라서 정사영의 넓이의 최댓값은

$6\cos\theta=2\sqrt{6}+1$

<답> ①

22.

출제의도 : 중복조합의 수를 구할 수 있는가?

${}_3H_r={}_7C_2$ 에서

${}_{3+r-1}C_r={}_{2+r}C_r={}_7C_{7-2}$

$\therefore\ r=5$

$\therefore\ {}_5H_5={}_9C_5={}_9C_4=126$

<답> 126

23.

출제의도: 삼각방정식을 풀 수 있는가?

$3\cos 2x+17\cos x=0$ 에서

$3(2\cos^2 x-1)+17\cos x=0$

$6\cos^2 x+17\cos x-3=0$

$(6\cos x-1)(\cos x+3)=0$

$\therefore\ \cos x=\frac{1}{6}$

따라서 $\sin x=\pm\sqrt{1-\frac{1}{36}}=\pm\frac{\sqrt{35}}{6}$

이므로

$$\tan^2 x=\left(\pm\frac{\frac{\sqrt{35}}{6}}{\frac{1}{6}}\right)^2=35$$

<답> 35

24.

출제의도 : 공간의 점과 타원위의 점사이의 거리의 최댓값을 구할 수 있는가?

점 A에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\mathrm{H}(9,0,0)$

그러므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}} &= \sqrt{\overline{\mathrm{AH}}^2+\overline{\mathrm{HP}}^2}\\ &= \sqrt{5^2+\overline{\mathrm{HP}}^2}\end{aligned}$$

이때, $\overline{\mathrm{HP}}$의 최댓값은 P가 $\mathrm{P}'(-3,0,0)$일 때이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}} &= \sqrt{5^2+\overline{\mathrm{HP}}^2}\\ &\le \sqrt{5^2+\overline{\mathrm{HP}'}^2}\\ &= \sqrt{5^2+12^2}\\ &= 13\end{aligned}$$

<답> 13

25.
출제의도 : 등차중항과 등비중항을 활용할 수 있는가?
세 수 $a, a+b, 2a-b$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$2(a+b)=a+(2a-b)$
$\therefore\ a=3b$ ---㉠
또, $1, a-1, 3b+1$이 순서대로 등비수열을 이루므로
$(a-1)^2=1\cdot(3b+1)$
㉠에서 $3b=a$를 대입하면
$a^2-2a+1=a+1$
$a^2-3a=0$
$\therefore\ a=0$ 또는 $a=3$
$a=0$일 때, $b=0$이므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.
$a=3$일 때, $b=1$이고 이때 주어진 조건을 만족한다.
따라서 $a^2+b^2=9+1=10$

<답> 10

26.
출제의도 : 포물선의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

포물선 위의 점(n, n)에서의 접선의 방정식은
$ny=\frac{n}{2}x+\frac{n^2}{2}$, $nx-2ny+n^2=0$이다.
이 직선과 포물선의 초점 $(\frac{n}{4}, 0)$사이의 거리 d는

$$d=\frac{\frac{n^2}{4}+n^2}{\sqrt{5n^2}}=\frac{\frac{5}{4}n^2}{\sqrt{5}\,n}=\frac{5n}{4\sqrt{5}}$$

따라서 $d^2=\frac{25n^2}{80}\geq 40$이고 $n^2\geq 128$
이므로 $d^2\geq 40$을 만족하는 자연수n의 최솟값은 12이다.

<답> 12

27.
출제의도 : 주어진 도형에서 삼각함수의 극한을 구할 수 있는가?

$\overline{AS}=\cos\theta$이므로 삼각형 ASO의 넓이 $f(\theta)$는
$f(\theta)=\frac{1}{2}\sin\theta\cdot\cos\theta$이다.
$\overline{AP}=2\cos\theta$이므로 $\overline{PQ}=2\cos\theta\cdot\sin\theta$이고
$\overline{PR}=\overline{PQ}\cdot\cos(\frac{\pi}{2}-2\theta)$
$=2\cos\theta\cdot\sin\theta\cdot\sin 2\theta$
이다.
따라서 삼각형 PRQ의 넓이$g(\theta)$는
$g(\theta)=\frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{2}-2\theta)\overline{PQ}\cdot\overline{PR}$
$=2\cos^2\theta\cdot\sin^2\theta\cdot\sin 2\theta\cdot\cos 2\theta$

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\theta^2 f(\theta)}{g(\theta)}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\frac{1}{2}\theta^2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta\cdot\sin^2\theta\cdot\sin 2\theta\cdot\cos 2\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\cos\theta\cdot\cos 2\theta}\cdot\frac{\theta^2}{\sin\theta\cdot\sin 2\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{1}{4}\cdot\frac{\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{2\theta}{\sin 2\theta}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{8}$$

따라서 $p^2+q^2=64+1=65$

<답> 65

28.

출제의도 : 합성함수의 미분을 이해하고 활용할 수 있는가?

$F(g(x)) = \frac{1}{2}F(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(g(x))g'(x) = \frac{1}{2}f(x)$.......㉠

$F(g(x)) = \frac{1}{2}F(x)$에서 $g(2) = X$라 하면

$F(x) = \int_0^x 3(t-1)^2 + 5\, dt = x^3 - 3x^2 + 8x$이므로

$F(X) = \frac{1}{2}F(2)$이고,

$X^3 - 3X^2 + 8X = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$이다.

$X^3 - 3X^2 + 8X - 6 = 0$
$(X-1)(X^2 - 2X + 6) = 0$
이므로 $g(2) = 1$이다.

㉠에서 $f(g(2))g'(2) = \frac{1}{2}f(2)$이고

$f(1) \cdot p = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$

$f(1) = 5$이므로 $p = \frac{4}{5}$이다.

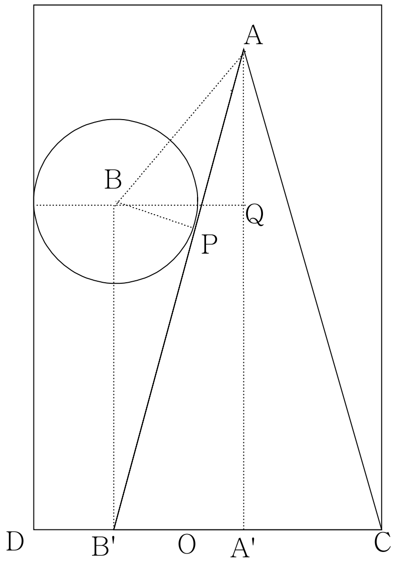
따라서 $30p = 24$

<답>24

29.

출제의도 : 공간도형에서 직선과 평면이 이루는 각을 구할 수 있는가?

A', B', B를 지나는 평면으로 도형을 자른 단면은 다음과 같다.



점 O를 선분 CD의 중점 이라 할 때
$\overline{AA'} = 12, \overline{DB'} = 4, \overline{B'O} = 3, \overline{OA'} = 2, \overline{A'C} = 5$
이고, 직선 AB와 평면 α가 이루는 각은 선분 AB와 선분 BQ가 이루는 각과 같다. 구와 원뿔은 점 P에서 접하고 있으므로 선분 BP와 선분 AB'는 수직이고 각$BB'A$와 각 $B'AA'$는 동위각으로 서로 같다. 따라서 삼각형 $BB'P$와 삼각형 $B'AA'$는 닮은 도형이고 다음과 같은 식이 성립한다.

$\overline{BB'} : \overline{BP} = \overline{AB'} : \overline{A'B'}$

즉, $\overline{BB'} : 4 = 13 : 12$ 이므로 $\overline{BB'} = \frac{52}{5}$

이다. 따라서 $\overline{AQ} = 12 - \frac{52}{5} = \frac{8}{5}$이다.

$\overline{A'B'} = 5$이므로 $\tan\theta = \frac{\frac{8}{5}}{5} = \frac{8}{25}$=p이다.

따라서 100p=32

<답>32

30

출제의도 : 지수함수의 그래프를 이해하고 있는가?

(i) $a>b$일 때,

$\overline{\mathrm{PQ}}$의 최솟값은 $t=1$일 때 가지므로 $t=1$을 대입하면

$a^2-b\leq 10$

이 조건을 만족하는 순서쌍 (a, b)는 $(3, 2)$로 1개이다.

(ii) $a=b$일 때,

$\overline{\mathrm{PQ}}$이 최솟값은 $t=1$일 때, 가지므로 $t=1$을 대입하면

$a^2-b=a^2-a\leq 10$

$a^2-a-10\leq 0$

이 부등식을 만족하는 a는 $2, 3$으로 2개이다.

그러므로 순서쌍 (a, b)는 $(2, 2)$, $(3, 3)$으로 2개이다.

(iii) $a<b$일 때,

두 함수 $y=a^{x+1}$, $y=b^x$의 그래프는 $x>0$에서 한 점에서 만나므로 $\overline{\mathrm{PQ}}\leq 10$인 t가 존재한다.

그러므로 순서쌍 (a, b)는 $(2, 3)$ $(2, 4)$, $\cdots$, $(2, 10)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$, $\cdots$, $(3, 10)$, $\cdots$, $(9, 10)$으로 $\dfrac{8\times 9}{2}=36$개다.

따라서, 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는 39개다.

<답> 39