EBS
2012학년도 대수능 6월 모의평가 수리영역 나형 정답 및 해설

1.

출제의도 : 지수의 확장을 계산할 수 있는가?

$4\times 8^{\frac{1}{3}}=4\times(2^3)^{\frac{1}{3}}=4\times 2=8$

<답> ③

2.

출제의도 : 행렬의 실수배와 덧셈을 계산할 수 있는가?

$2A+B=2\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&4\\3&-1\end{pmatrix}$ 이므로

행렬 $2A+B$ 의 모든 성분의 합은

$4+4+3-1=10$

<답> ⑤

3.

출제의도 : 함수의 극한을 구할 수 있는가?

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n}{n}}{\frac{2n}{n}+\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{3}{2}$$

<답> ③

4.

출제의도 : 그래프와 행렬의 관계를 이해하고 있는가?

주어진 그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬의 성분 중 1의 개수는 행렬의 모든 성분의 합과 같다.

이 때 행렬의 모든 성분의 합은 그래프의 변의 개수의 2배이므로 $5\times 2=10$ 이다.

<답> ②

5.

출제의도 : 함수의 극한을 구할 수 있는가?

$f(x)=x^2+ax$ 이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+ax}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}(x+a)$$

$$=a$$

$\therefore\ a=4$

<답> ①

6.

출제의도 : 등차수열의 일반항을 구할 수 있는가?

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a라고 하면

$a_2=a+6,\ a_3=a+12$

이므로

$|a_2-3|=|a_3-3|$ 에서

$|a+3|=|a+9|$

따라서 $a+3=-(a+9)$ 이므로

$2a=-12,\ a=-6$

$\therefore\ a_5=a+4\times 6=-6+24=18$

<답> ②

7.

출제의도 : 그래프로부터 함수의 좌극한과 우극한을 구할 수 있는가?

주어진 그래프에서

$$\lim_{x \to -1-0} f(x) + \lim_{x \to 1+0} f(x) = 1 + 1 = 2$$

<답> ⑤

8.

출제의도 : 등비수열의 일반항을 알고 있는가?

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_3 = ar^2 = \sqrt{5}$ 이므로

$$\begin{aligned} a_1 \times a_2 \times a_4 \times a_5 &= a \times ar \times ar^3 \times ar^4 \\ &= a^4 r^8 = (ar^2)^4 \\ &= (\sqrt{5})^4 = 25 \end{aligned}$$

<답> ④

9.

출제의도 : 역행렬의 뜻을 알고 계산할 수 있는가?

ㄱ. $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$이므로

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (A-B)^2 &= \begin{pmatrix} 0 & a \\ -b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a \\ -b & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -ab & 0 \\ 0 & -ab \end{pmatrix} = -abE \end{aligned}$$ (거짓)

ㄴ. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$2E - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore A^{-1} = 2E - A$ (참)

ㄷ. ㄴ에서 $A^{-1} = 2E - A$이므로

$$A + A^{-1} = 2E$$

또 $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b & 1 \end{pmatrix}$ 이므로

$$B + B^{-1} = 2E$$

$\therefore A + A^{-1} = B + B^{-1}$ (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

<답> ⑤

10.

출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열의 일반항을 구할 수 있는가?

$a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} a_k$, $a_1 = 1$ 이므로

$$a_2 = 2^{1-1} a_1 = 1$$

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \sum_{k=1}^{n+1} 2^{n+1-k} a_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} 2^{n+1-k} a_k + a_{n+1} \\ &= 2 \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} a_k + a_{n+1} \\ &= 2 a_{n+1} + a_{n+1} = 3 a_{n+1} \end{aligned}$$

$\therefore$ (가)$=1$, (나)$=2$, (다)$=3$

$\therefore p + q + r = 1 + 2 + 3 = 6$

<답> ④

11.

함수의 극한과 미분계수의 관계를 이해하고 있는가?

$\lim_{x \to 1} \dfrac{f(x) - 2}{x^2 - 1} = 3$ 에서

$x \to 1$일 때 (분모)$\to 0$ 이므로

$x \to 1$일 때 (분자)$\to 0$ 이어야 한다.

따라서 $f(1) - 2 = 0$, $f(1) = 2$ 이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\left(\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}f'(1)=3$$

$$\therefore\ \frac{f'(1)}{f(1)}=\frac{6}{2}=3$$

<답> ①

12.
출제의도 : 상용로그를 이용하여 지수부등식을 풀 수 있는가?

$c_n=1.004\times c_{n-1},\ c_0=\frac{1}{99}$

에서 $\{c_n\}$은 첫째항이 $\frac{1}{99}\times1.004$이고 공비가 1.004인 등비수열이므로

$c_n=\frac{1}{99}(1.004)^n$ 이다.

따라서

$c_n=\frac{1}{99}(1.004)^n\ge\frac{1}{9}$ 에서

$(1.004)^n\ge11$

양변에 상용로그를 취하면

$n\log1.004\ge\log11$

$n\ge\frac{\log11}{\log1.004}=\frac{1.0414}{0.0017}=612.5\cdots$

따라서 자연수 n의 최솟값은 613이다.

<답> ②

13.
출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 로그함수를 구할 수 있는가?

$y=\log_2(ax+b)$가 두 점 $(-1,0)$과 $(0,2)$를 지나므로

$\log_2(-a+b)=0,\quad -a+b=2^0=1$

$\log_2 b=2,\quad b=2^2=4$

따라서 $a=3$ 이므로 $a+b=3+4=7$

<답> ②

14.
출제의도 : 무한등비급수를 이용하여 도형의 넓이를 구할 수 있는가?

중심의 좌표가 (a_n, b_n)인 원의 반지름의 길이를 r_n 이라고 하고

중심의 좌표가 (a_{n+1}, b_{n+1})인 원의 반지름의 길이를 r_{n+1} 이라고 하면 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이므로

$r_{n+1}=\frac{1}{2}r_n$

따라서

$$S_n=2\times\left(\frac{\pi r_n^2}{4}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times r_n^2\right)=\frac{r_n^2}{2}(\pi-1)$$

이고

$$S_{n+1}=\frac{r_{n+1}^2}{2}(\pi-1)=\frac{1}{4}\times\frac{r_n^2}{2}(\pi-1)$$

$$=\frac{1}{4}S_n$$

이므로

$\{S_n\}$ 은 공비가 $\frac{1}{4}$이고 첫째항이 $\frac{\pi-1}{2}$인 등비수열이다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{\pi-1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2(\pi-1)}{3}$$

<답> ③

15.
출제의도 : 미분을 이용하여 삼차함수가 항상 증가할 조건을 구할 수 있는가?
$f(x)=x^3+ax^2+2ax$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가하기 위해서는 $f(x)\geq 0$ 이어야한다.
즉 $f(x)=3x^2+2ax+2a\geq 0$
에서 $f(x)=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=a^2-6a\leq 0$
이므로 $0\leq a\leq 6$ 이다.
따라서 실수 a의 최댓값 $M=6$
최솟값 $m=0$ 이므로
$M-m=6$

<답> ④

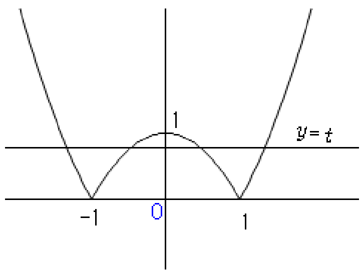
16.
출제의도 : 로그부등식을 풀 수 있는가?
진수 조건에서
$x\neq 0$ … ㉠
$\log_2 x^2-\log_2|x|=\log_2|x|^2-\log_2|x|$
$=2\log_2|x|-\log_2|x|$
$=\log_2|x|$
이고, $3=\log_2 8$이므로 주어진 부등식은
$\log_2|x|\leq\log_2 8$, $|x|\leq 8$
$-8\leq x\leq 8$ … ㉡
㉠, ㉡에서 구하는 정수 x는
±1, ±2, ±3, $\cdots$, ±8
의 16개다.

<답> ⑤

17.
출제의도 : 점의 좌표의 규칙성을 발견할 수 있는가?
자연수 n에 대하여
좌표가 $(n,\ 2-n)$인 점은 A_{2n-1}이므로
좌표가 $(9,-7)$인 점은 $A_{2\times9-1}$ 즉, A_{17}이다.
또, 좌표가 $(n+2,\ 3-n)$인 점은 A_{2n}이므로
좌표가 $(7,-2)$인 점은 $A_{2\times5}$ 즉, A_{10}이다.
$\therefore\ k=10,\ l=17$
$\therefore\ k+l=27$

<답> ①

18.
출제의도 : 그래프를 이용하여 함수의 좌극한을 구할 수 있는가?
그림과 같이 $t\to1-0$일 때 함수 $y=|x^2-1|$의 그래프와 직선 $y=t$는 서로 다른 네 점에서 만난다.



$\therefore\ \lim_{t\to1-0} f(t)=4$

<답> ④

19.
출제의도 : 미분을 이용하여 함수의 그래프를

추론할 수 있는가?

ㄱ. $0<x<2$일 때 $f'(x)<g'(x)$이므로

$h'(x)=f'(x)-g'(x)<0$이다.

따라서 $0<x<2$에서 $h(x)$는 감소한다. (참)

ㄴ. $x>2$일 때 $f'(x)>g'(x)$이므로

$h'(x)=f'(x)-g'(x)>0$이다.

따라서 $x>2$에서 $h(x)$는 증가한다.

따라서 $x=2$에서 감소상태에서 증가상태로 바뀌므로 $h(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다. (참)

ㄷ. $x<0$일 때 $f'(x)>g'(x)$이므로

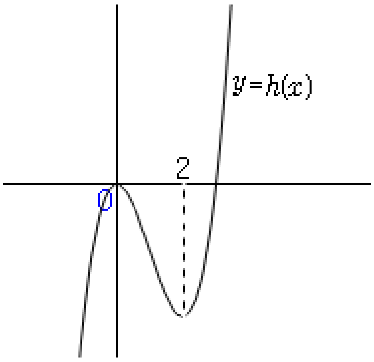
$h'(x)=f'(x)-g'(x)>0$이다.

따라서 $x<0$에서 $h(x)$는 증가한다.

따라서 $x=0$에서 증가상태에서 감소상태로 바뀌므로 $h(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

이때, $h(0)=f(0)-g(0)=0$이므로

함수 $y=h(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 방정식 $h(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

<답> ③

20.

출제의도 : 무한등비수열의 극한을 구할 수 있는가?

$S_n=\frac{1}{2}\times1\times(3^n-2^n)=\frac{3^n-2^n}{2}$이므로

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}S_k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(3^k-2^k)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{3(3^n-1)}{3-1}-\frac{2(2^n-1)}{2-1}\right\}$$

$$=\frac{3^{n+1}-3}{4}-\frac{2^{n+1}-2}{2}$$

$$=\frac{3^{n+1}-2^{n+2}+1}{4}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{3^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-2^{n+2}+1}{4\times3^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3-4\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{3^n}}{4}$$

$$=\frac{3-0-0}{4}=\frac{3}{4}$$

<답> ③

21.

출제의도 : 미분을 이용하여 넓이의 최댓값을 구할 수 있는가?

정사각형 $EFGH$의 두 대각선의 교점의 좌표를 $(x,\ x^2)$이라 하자.

곡선 $y=x^2$과 정사각형 ABCD는 y축에 대하여 각각 대칭이므로 $0<x<1$인 경우만 생각해도 일반성을 잃지 않는다.

이때, 점 C의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$이므로 구하는 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\left\{\frac{1}{2}-\left(x-\frac{1}{2}\right)\right\}\times\left\{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\right\}$

$\quad=(1-x)x^2=x^2-x^3$

이다.

$\therefore\ S'(x)=-3x^2+2x=x(-3x+2)$

이때, $S'(x)=0$에서

$x=\frac{2}{3}\ (\because\ 0<x<1)$

따라서 함수 $S(x)$는 $x=\frac{2}{3}$에서 극대이자 최대이므로 구하는 넓이의 최댓값은

$S\left(\frac{2}{3}\right)=\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{27}$

<답> ①

22.

출제의도 : 연속인 함수의 극한을 구할 수 있는가?

$x\to1$일 때, (분자)$\to2$이므로 (분모)$\to18$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}(x^2+ax+1)=1^2+a\cdot1+1=18$에서

$a=16$

<답> 16

23.

출제의도 : 등차수열의 공차를 구하여 합을 구할 수 있는가?

주어진 등차수열의 공차를 d라 하면

$a_4-a_2=2d=4$에서 $d=2$이다.

$\therefore\ a_n=2+(n-1)2=2n$

$\therefore\ \sum_{k=11}^{20}a_k=\sum_{k=1}^{20}2k-\sum_{k=1}^{10}2k$

$=20\cdot21-10\cdot11=420-110=310$

<답> 310

24.

출제의도 : 다항함수의 함숫값과 미분계수를 구할 수 있는가?

$f(2)=2^2+3\cdot2=10$이다.

또, $f'(x)=2x+3$이므로 $f'(2)=2\cdot2+3=7$이다.

$\therefore\ f(2)+f'(2)=10+7=17$

<답> 17

25.

출제의도 : 분수식으로 된 수열의 합을 구할 수 있는가?

$\sum_{k=1}^{14}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{14}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{14}-\frac{1}{15}\right)$

$=1-\frac{1}{15}=\frac{14}{15}$

$\therefore\ p+q=15+14=29$

<답> 29

26.

출제의도 : 역행렬의 성질을 이용할 수 있는가?

$\begin{pmatrix}2&-1\\1&a\end{pmatrix}A^{-1}=-E$이므로

$\begin{pmatrix}2&-1\\1&a\end{pmatrix}A^{-1}A=-EA$에서

$\begin{pmatrix}2&-1\\1&a\end{pmatrix}E=-A$

$\therefore\ A=-\begin{pmatrix}2&-1\\1&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\-1&-a\end{pmatrix}$

따라서 $A\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\3\end{pmatrix}$ 즉, $\begin{pmatrix}-2&1\\-1&-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\3\end{pmatrix}$에서

$-6+2=b$이고 $-3-2a=3$이다.

$\therefore$ $a=-3$, $b=-4$

$\therefore$ $ab=12$

<답> 12

27.

출제의도 : 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

$y'=3x^2-2x$이므로 $x=1$에서의 접선의 기울기는 $3-2=1$이다.

따라서 점 $(1,a)$에서의 접선의 방정식은

$y-a=1(x-1)$ 즉 $y=x+a-1$이다.

이 직선이 점 $(0,12)$를 지나므로

$12=0+a-1$

$\therefore$ $a=13$

<답> 13

28.

출제의도 : 직선의 교점을 구하고 무한등비수열의 극한을 구할 수 있는가?

두 일차방정식 $2x+y=4^n$, $x-2y=2^n$을 연립하여 풀면

$x=\dfrac{2\cdot 4^n+2^n}{5}$, $y=\dfrac{4^n-2^{n+1}}{5}$

이때, 두 직선의 교점의 좌표가 $(a_n,\ b_n)$이므로

$a_n=\dfrac{2\cdot 4^n+2^n}{5}$, $b_n=\dfrac{4^n-2^{n+1}}{5}$

$\therefore$ $p=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^n-2^{n+1}}{2\cdot 4^n+2^n}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore$ $60p=30$

<답> 30

29.

출제의도 : 행렬로 나타내어진 연립방정식이 부정일 조건을 구할 수 있는가?

주어진 집합이 무한집합이려면

$\dfrac{k+3}{-1}=\dfrac{5}{k-3}=\dfrac{10}{-2}$

이어야 하므로 $k=2$이다.

이때, 주어진 연립방정식은

$\begin{cases}5x+5y=10\\-x-y=-2\end{cases}$

이므로 주어진 집합은 직선 $x+y=2$ 즉, $x+y-2=0$ 위의 모든 점들의 집합이다.

$\therefore$ $a=1$, $b=1$

$\therefore$ $10a+b=11$

<답> 11

30.

출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 집합의 원소의 개수를 구할 수 있는가?

주어진 집합을 A_n이라 하자.

$\log_2 n-\log_2 k=\log_2\dfrac{n}{k}$이므로 $k\in A_n$이려면

$\log_2\dfrac{n}{k}=m$ (m은 정수) 즉, $\dfrac{n}{k}=2^m$이어야 한다.

(i) $1\le n\le 50$일 때,

$k=n$이면 $\dfrac{n}{k}=1=2^0$이므로 $n\in A_n$이다.

$k=2n$이면 $\dfrac{n}{k}=\dfrac{1}{2}=2^{-1}$이므로 $2n\in A_n$이다.

따라서 집합 A_n의 원소의 개수는 2 이상이다.

(ii) n이 짝수일 때,

$k=n$이면 $\dfrac{n}{k}=1=2^0$이므로 $n\in A_n$이다.

$k=\frac{n}{2}$ 이면 $\frac{n}{k}=2=2^1$이므로 $\frac{n}{2}\in A_n$이다.
따라서 집합 A_n의 원소의 개수는 2 이상이다.
(iii) n이 50보다 큰 홀수일 때,
$\frac{n}{k}=2^m$ 즉, $k=\frac{n}{2^m}$ (m은 정수)을 만족시키는 정수 m은 0뿐이다.
따라서 집합 A_n의 원소의 개수는 1이다.
(i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수 n은
51, 53, 55, $\cdots$, 99의 25개다.

<답> 25