**EBS**
# 2012학년도 대수능 6월 모의평가 수리영역 가형 정답 및 해설

1.
출제의도 : 지수의 확장을 계산할 수 있는가?

$4 \times 8^{\frac{1}{3}} = 4 \times (2^3)^{\frac{1}{3}} = 4 \times 2 = 8$

<답> ③

2.
출제의도 : 무리수 $e$의 정의를 이용하여 극한값을 계산할 수 있는가?

$\lim_{x \to 0}(1+3x)^{\frac{1}{6x}}$

$= \lim_{x \to 0}\left\{(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right\}^{\frac{1}{2}}$

$= e^{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{e}$

<답> ③

3.
출제의도 : 일차변환에 의하여 점의 이동을 이해할 수 있는가?

$x=1,\ y=-1$로 놓으면

$3x-y=4$,

$x+ay=1-a$

이므로 일차변환 $f$에 의하여

점 $(1, -1)$은 점 $(4, 1-a)$로 옮겨진다.

따라서, $1-a=0$에서

$a=1$

<답> ①

4.
출제의도 : 그래프와 행렬의 관계를 이해하고 있는가?

주어진 그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬의 성분 중 1의 개수는 행렬의 모든 성분의 합과 같다.

이 때 행렬의 모든 성분의 합은 그래프의 변의 개수의 2배이므로 $5 \times 2 = 10$ 이다.

<답> ②

5.
출제의도 : 고차부등식의 정수해를 구할 수 있는가?

$(2x+1)^4 - 7(2x+1)^3 \le 0$

$\Leftrightarrow\ (2x+1)^3(2x-6) \le 0$

$\Leftrightarrow\ (2x+1)^3(x-3) \le 0$

$\Leftrightarrow\ (2x+1)(x-3) \le 0$

$\therefore\ -\frac{1}{2} \le x \le 3$

따라서, 정수 $x$의 값은 $0, 1, 2, 3$의 $4$개다.

<답> ④

6.
출제의도 : 구간별로 정의된 함수가 연속일 때, 미지수의 값을 구할 수 있는가?

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to2} f(x)=f(2)$가 성립한다.

즉, $\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax-10}{x-2}=b$이고,

$x\to2$일 때, (분모) $\to0$이므로

(분자) $\to0$이어야 한다.

$\lim_{x\to2}(x^2+ax-10)=2a-6=0$에서

$a=3$

$\lim_{x\to2}\frac{x^2+3x-10}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\frac{(x+5)(x-2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}(x+5)$

$=7$

$\therefore\ b=7$

$\therefore\ a+b=10$

<답> ①

7.

출제의도 : 회전변환의 합성이 나타내는 의미를 이용하여 점의 이동을 이해하는가?

행렬 $A, A^2, A^3, A^4, A^5$이 나타내는 일차변환은 원점을 중심으로 각각

$90°, 180°, 270°, 360°, 450°$

만큼 회전하는 회전변환이다.

$\therefore\ A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix},\ A^2\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix},$

$A^3\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix},\ A^4\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix},$

$A^5\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$

$\therefore\ (A+A^2+A^3+A^4+A^5)\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$

즉, 점 $(2,0)$은 일차변환 $f$에 의하여 점 $(0,2)$로 옮겨진다.

$\therefore\ a=0,\ b=2$

$\therefore\ a+b=2$

<답> ⑤

8.

출제의도 : 함수 $f(x)$의 극솟값을 구할 수 있는가?

$f(x)=\frac{1}{2}x^2-a\ln x$

$f'(x)=x-\frac{a}{x}=\frac{x^2-a}{x}$

$f'(x)=0$에서 $x=\sqrt{a}$ ($\because\ x>0$)

이므로 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | $(0)$ | $\cdots$ | $\sqrt{a}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | | ↘ | | ↗ |

따라서, $f(x)$는 $x=\sqrt{a}$에서 극솟값을 갖는다.

$f(\sqrt{a})=0$이므로

$\frac{1}{2}a-a\ln\sqrt{a}=0$에서

$\ln\sqrt{a}=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\ln a=\frac{1}{2}$

$\ln a=1$

$\therefore\ a=e$

<답> ④

9.
출제의도 : 역행렬의 뜻을 알고 계산할 수 있는가?

ㄱ. $A=\begin{pmatrix}1 & a\\0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\b & 1\end{pmatrix}$이므로

$$A-B=\begin{pmatrix}1 & a\\0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\b & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & a\\-b & 0\end{pmatrix}$$

$$(A-B)^2=\begin{pmatrix}0 & a\\-b & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & a\\-b & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-ab & 0\\0 & -ab\end{pmatrix}=-abE \quad \text{(거짓)}$$

ㄴ. $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -a\\0 & 1\end{pmatrix}$

$$2E-A=\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & a\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -a\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$\therefore A^{-1}=2E-A$ (참)

ㄷ. ㄴ에서 $A^{-1}=2E-A$이므로

$A+A^{-1}=2E$

또 $B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\-b & 1\end{pmatrix}$ 이므로

$B+B^{-1}=2E$

$\therefore A+A^{-1}=B+B^{-1}$ (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

<답> ⑤

10.
출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열의 일반항을 구할 수 있는가?

$a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}2^{n-k}a_k$, $a_1=1$ 이므로

$a_2=2^{1-1}a_1=1$

$$a_{n+2}=\sum_{k=1}^{n+1}2^{n+1-k}a_k$$

$$=\sum_{k=1}^{n}2^{n+1-k}a_k+a_{n+1}$$

$$=2\sum_{k=1}^{n}2^{n-k}a_k+a_{n+1}$$

$$=2a_{n+1}+a_{n+1}=3a_{n+1}$$

$\therefore$ (가)$=1$, (나)$=2$, (다)$=3$

$\therefore p+q+r=1+2+3=6$

<답> ④

11.
출제의도 : 삼각함수의 합성을 이용하여 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

$f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x+1$

$$=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1$$

이고, $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{5}{6}\pi$이므로

$$\frac{\pi}{3}\le x+\frac{\pi}{6}\le\pi$$

따라서, $f(x)$는 $x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ 즉, $x=\frac{\pi}{3}$일 때 최댓값을 갖고,

$x+\frac{\pi}{6}=\pi$ 즉, $x=\frac{5}{6}\pi$일 때 최솟값을 갖는다.

$$\therefore\ M=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\frac{\pi}{2}+1=3$$

$$m=f\left(\frac{5}{6}\pi\right)=2\sin\pi+1=1$$

$$\therefore\ M+m=3+1=4$$

<답> ④

12.
출제의도 : 상용로그를 이용하여 지수부등식을 풀 수 있는가?

$c_n = 1.004 \times c_{n-1}$, $c_0 = \frac{1}{99}$

에서 $\{c_n\}$은 첫째항이 $\frac{1}{99} \times 1.004$이고 공비가 $1.004$인 등비수열이므로

$c_n = \frac{1}{99}(1.004)^n$ 이다.

따라서

$c_n = \frac{1}{99}(1.004)^n \geq \frac{1}{9}$ 에서

$(1.004)^n \geq 11$

양변에 상용로그를 취하면

$n\log 1.004 \geq \log 11$

$n \geq \frac{\log 11}{\log 1.004} = \frac{1.0414}{0.0017} = 612.5\cdots$

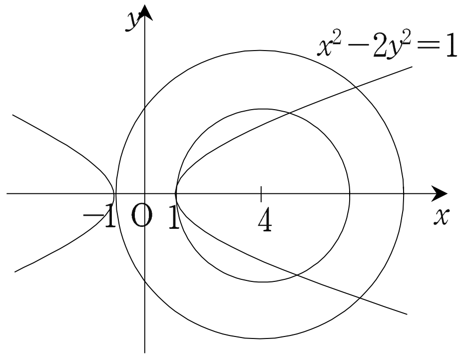
따라서 자연수 $n$의 최솟값은 $613$이다.

<답> ②

13.
출제의도 : 쌍곡선의 그래프를 그리고, 꼭짓점의 좌표를 구하여 원과 쌍곡선의 교점의 개수를 파악할 수 있는가?

원 $(x-4)^2 + y^2 = r^2$의 중심의 좌표는 $(4, 0)$이고, 반지름의 길이는 $r$이다.

또한, 쌍곡선 $x^2 - 2y^2 = 1$의 꼭짓점의 좌표는 $(1, 0), (-1, 0)$이다.




그림과 같이 원과 쌍곡선이 서로 다른 세 점에서 만나려면 원이 쌍곡선의 꼭짓점을 지나야 한다.

원이 점 $(1, 0)$을 지날 때,

$r = 4 - 1 = 3$

원이 점 $(-1, 0)$을 지날 때,

$r = 4 - (-1) = 5$

따라서, $r$의 최댓값은 $5$이다.

<답> ②

14.
출제의도 : 무한등비급수를 이용하여 도형의 넓이를 구할 수 있는가?

중심의 좌표가 $(a_n, b_n)$인 원의 반지름의 길이를 $r_n$ 이라고 하고

중심의 좌표가 $(a_{n+1}, b_{n+1})$인 원의 반지름의 길이를 $r_{n+1}$ 이라고 하면 $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이므로

$r_{n+1} = \frac{1}{2} r_n$

따라서

$S_n = 2 \times \left(\frac{\pi r_n^2}{4} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times r_n^2\right) = \frac{r_n^2}{2}(\pi - 1)$

이고

$S_{n+1} = \frac{r_{n+1}^2}{2}(\pi - 1) = \frac{1}{4} \times \frac{r_n^2}{2}(\pi - 1)$

$=\frac{1}{4}S_n$

이므로

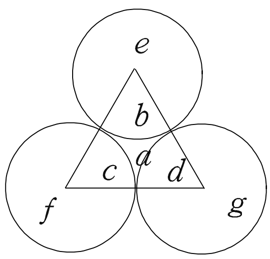
$\{S_n\}$ 은 공비가 $\frac{1}{4}$이고 첫째항이 $\frac{\pi-1}{2}$인 등비수열이다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n=\frac{\frac{\pi-1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2(\pi-1)}{3}$$

<답> ③

15.

출제의도 : 원순열의 수를 이용하여 영역에 색칠하는 방법의 수를 구할 수 있는가?




그림과 같이 7개의 영역을 각각

$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g$

라 하자.

( i ) $a$에 색칠하는 방법의 수는

$_7C_1=7$ (가지)

(ii) $b, c, d$에 색칠하는 것은 회전하여 일치하는 경우가 생기므로 그 방법의 수는

$_6C_3\times(3-1)!=40$ (가지)

(iii) $a, b, c, d$에 서로 다른 색이 칠해져 있으므로 $e, f, g$에 색칠하는 것은 회전에 의하여 일치할 수 없다. 따라서, $e, f, g$에 색칠하는 방법의 수는

$_3C_3\times3!=6$ (가지)

( i ),(ii),(iii)에 의해 구하는 방법의 수는

$7\times40\times6=1680$ (가지)

<답> ②

16.

출제의도 : 함수의 그래프를 이용하여 분수방정식의 실근의 개수를 구할 수 있는가?

$$\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(-x)}=1-\frac{f(x)}{f(-x)}$$

양변에 $f(x)f(-x)$를 곱하면

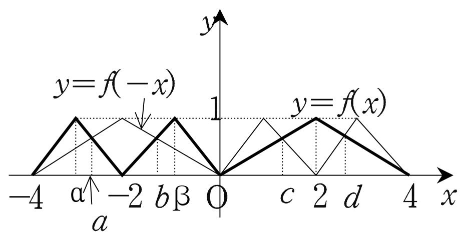
$f(-x)-f(x)=f(x)f(-x)-\{f(x)\}^2$

$\{f(x)\}^2-f(x)-f(x)f(-x)+f(-x)=0$

$f(x)\{f(x)-1\}-f(-x)\{f(x)-1\}=0$

$\{f(x)-f(-x)\}\{f(x)-1\}=0$

$f(x)=f(-x)$ 또는 $f(x)=1$




( i ) $f(x)=f(-x)$일 때,

위의 그림에서 $x=-4,\ a,\ b,\ 0,\ c,\ d,\ 4$

이고, $x=-4,\ 0,\ 4$이면 $f(x)=f(-x)=0$이므로 무연근이다.

$\therefore\ x=a,\ b,\ c,\ d$

(ii) $f(x)=1$일 때,

위의 그림에서 $x=\alpha,\ \beta,\ 2$이고,

$x=2$이면 $f(-x)=0$이므로 무연근이다.

$\therefore\ x=\alpha,\ \beta$

따라서, (ⅰ),(ⅱ)에 의해 주어진 부등식의 실근은 $x=a,\ b,\ c,\ d,\ \alpha,\ \beta$의 6개이다.

<답> ③

17.

출제의도 : 점의 좌표의 규칙성을 발견할 수 있는가?

자연수 $n$에 대하여

좌표가 $(n,\ 2-n)$인 점은 $A_{2n-1}$이므로

좌표가 $(9,-7)$인 점은 $A_{2\times9-1}$ 즉, $A_{17}$이다.

또, 좌표가 $(n+2,\ 3-n)$인 점은 $A_{2n}$이므로

좌표가 $(7,-2)$인 점은 $A_{2\times5}$ 즉, $A_{10}$이다.

$\therefore\ k=10,\ l=17$

$\therefore\ k+l=27$

<답> ①

18.

출제의도 : 정적분과 넓이의 의미를 이해하고 있는가?

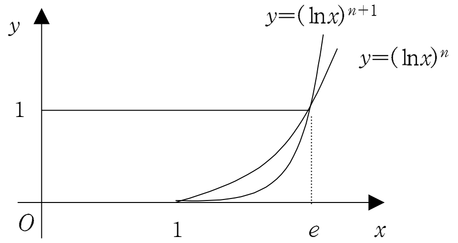
ㄱ. $1\le x\le e$ 아므로 $0\le \ln x\le 1$

따라서 $n$은 2이상의 자연수 이므로

$(\ln x)^n\ge(\ln x)^{n+1}$ (참)

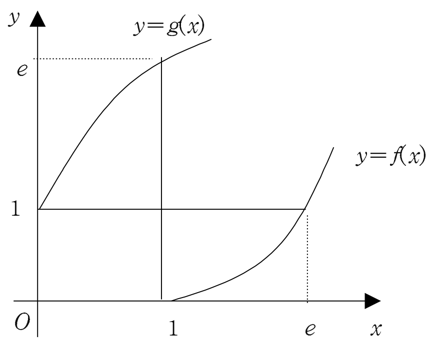
ㄴ. ㄱ에서 $(\ln x)^n\ge(\ln x)^{n+1}$ 이므로

$S_n < S_{n+1}$ (참)




ㄷ. 함수 $f(x)=(\ln x)^n$의 그래프와 역함수 $g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$S_n=\int_0^1 g(x)dx$ (참)




따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

<답> ⑤

19.

출제의도 : 부분적분법에 대하여 이해하고 있는가?

$$\int_0^1 f(x)g'(x)dx$$

$$=[f(x)g(x)]_0^1-\int_0^1 f'(x)g(x)dx$$

$$=\{f(1)g(1)-f(0)g(0)\}-\int_0^1\frac{x^2}{(1+x^3)^2}dx$$

$$=f(1)-\int_0^1\frac{x^2}{(1+x^3)^2}dx\cdots㉠$$

$\int_0^1\frac{x^2}{(1+x^3)^2}dx$ 에서

$1+x^3=t$ 라고 하면

$3x^2=\frac{dt}{dx}$

이고 $x=0$일 때 $t=1$, $x=1$ 일 때 $t=2$이므로

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^3)^2}\,dx=\int_1^2 \frac{1}{3}\times\frac{1}{t^2}\,dt$$

$$=\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{t}\right]_1^2$$

$$=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{6}$$

따라서 ㉠에서

$$f(1)-\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^3)^2}\,dx=f(1)-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

이므로

$$f(1)=\frac{1}{3}$$

<답> ④

20. 출제의도 : 무한등비수열의 극한을 구할 수 있는가?

$S_n=\frac{1}{2}\times1\times(3^n-2^n)=\frac{3^n-2^n}{2}$ 이므로

$$T_n=\sum_{k=1}^{n} S_k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(3^k-2^k)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{3(3^n-1)}{3-1}-\frac{2(2^n-1)}{2-1}\right\}$$

$$=\frac{3^{n+1}-3}{4}-\frac{2^{n+1}-2}{2}$$

$$=\frac{3^{n+1}-2^{n+2}+1}{4}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{3^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-2^{n+2}+1}{4\times3^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3-4\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{3^n}}{4}$$

$$=\frac{3-0-0}{4}=\frac{3}{4}$$

<답> ③

21.
출제의도 : 미분계수의 정의와 도함수의 활용에 대하여 이해하고 있는가?

ㄱ. $f'(x)=\frac{1}{27}(4x^3-18x^2+24x+19)$

$$f''(x)=\frac{1}{27}(12x^2-36x+24)$$

$$=\frac{4}{9}(x^2-3x+2)$$

$$=\frac{4}{9}(x-1)(x-2)$$

따라서 $f''(x)=0$ 에서 $x=1$, $x=2$ 이고 $f(1)=\frac{26}{27}$, $f(2)=2$이므로 변곡점은 $(1, \frac{26}{27})$, $(2,2)$ 이다. (참)

ㄴ. $f(x)=x$에서

$$x^4-6x^3+12x^2+19x=27x$$

$$x^4-6x^3+12x^2-8x=0$$

$$x(x^3-6x^2+12x-8)=0$$

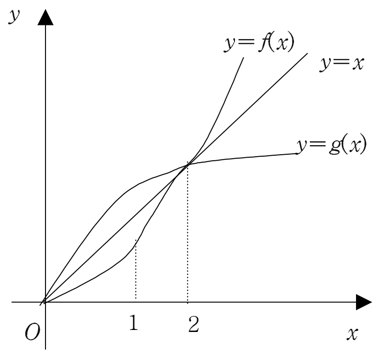
$$x(x-2)^3=0$$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=2$

따라서 실근 중 양수인 것은 $x=2$ 하나 뿐이다. (참)

ㄷ. ㄱ, ㄴ에서 점 (2, 2)에서의 함수 $y=f(x)$의 접선은 $y=x$ 이고 $f(x)$의 역함수 $g(x)$의 그래프는 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$$f(2)=g(2),\ f'(2)=g'(2)$$




따라서, $I(x)=|f(x)-g(x)|$라고 하면

$$I'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{I(2+h)-I(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{I(2+h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{|f(2+h)-g(2+h)|}{h}$$

이때,

$$\lim_{h\to +0}\frac{f(2+h)-g(2+h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to +0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}-\lim_{h\to +0}\frac{g(2+h)-g(2)}{h}$$
$$=f'(2)-g'(2)=0$$
$$\lim_{h\to -0}\frac{g(2+h)-f(2+h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to -0}\frac{g(2+h)-g(2)}{h}-\lim_{h\to -0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$=g'(2)-f'(2)=0$$
$$\therefore\ I'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{I(2+h)-I(2)}{h}=0$$

따라서 함수 $|f(x)-g(x)|$는 $x=2$에서 미분이 가능하다. (참)

따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

<답> ⑤

22.

출제의도 : 중복조합에 대하여 이해하고 있는가?

$${}_3H_{17}={}_{3+17-1}C_{17}$$
$$={}_{19}C_{17}$$
$$={}_{19}C_2$$
$$=\frac{19\times 18}{2}=171$$

<답> 171

23.

출제의도 : 등차수열의 공차를 구하여 합을 구할 수 있는가?

주어진 등차수열의 공차를 $d$라 하면

$a_4-a_2=2d=4$에서 $d=2$이다.

$\therefore\ a_n=2+(n-1)2=2n$

$$\therefore\ \sum_{k=11}^{20}a_k=\sum_{k=1}^{20}2k-\sum_{k=1}^{10}2k$$
$$=20\cdot 21-10\cdot 11=420-110=310$$

<답> 310

24.

출제의도 : 회전체의 부피를 구할 수 있는가?

$$\pi\int_0^1(e^x-1)^2dx$$
$$=\pi\int_0^1(e^{2x}-2e^x+1)dx$$
$$=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}-2e^x+x\right]_0^1$$
$$=\pi\left(\frac{1}{2}e^2-2e+\frac{5}{2}\right)$$
$$=\frac{\pi}{2}(e^2-4e+5)$$

따라서 $a=-4$, $b=5$ 이므로

$a^2+b^2=41$

<답> 41

25.
출제의도 : 삼각함수의 덧셈정리에 대하여 이해하고 있는가?

$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{5}{12}$

$5\tan^2\alpha+24\tan\alpha-5=0$

$(5\tan\alpha-1)(\tan\alpha+5)=0$

$\therefore\ \tan\alpha=\dfrac{1}{5}\ (\because 0<\alpha<\dfrac{\pi}{4})$

따라서 $p=\dfrac{1}{5}$ 이므로

$60p=12$

<답> 12

26.
출제의도 : 합성함수의 미분법에 대하여 이해하고 있는가?

$h'(x)=g'(f(x))f'(x)$이므로

$h'(0)=g'(f(0))f'(0)$

$\quad\quad=g'(1)f'(0)=15$

이때, $f'(x)=\dfrac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}$ 이므로

$f'(0)=\dfrac{3}{2}$

즉, $g'(1)\times\dfrac{3}{2}=15$ 이므로

$g'(1)=10$

<답> 10

27.
출제의도 : 삼각함수의 극한의 활용에 대하여 이해하고 있는가?

$\angle BOR=\theta$ 이므로 $\overline{OQ}=\cos\theta$

$\therefore\ \overline{QR}=1-\cos\theta$

$\therefore\ S(\theta)=\pi(\dfrac{1-\cos\theta}{2})^2$

$\therefore\ \lim\limits_{\theta\to+0}\dfrac{S(\theta)}{\theta^4}$

$=\lim\limits_{\theta\to+0}\dfrac{\pi(\frac{1-\cos\theta}{2})^2}{\theta^4}$

$=\dfrac{\pi}{4}\lim\limits_{\theta\to+0}\dfrac{(1-\cos\theta)^2}{\theta^4}$

$=\dfrac{\pi}{4}\lim\limits_{\theta\to+0}\dfrac{(1-\cos\theta)^2(1+\cos\theta)^2}{\theta^4(1+\cos\theta)^2}$

$=\dfrac{\pi}{4}\lim\limits_{\theta\to+0}\dfrac{\sin^4\theta}{\theta^4(1+\cos\theta)^2}$

$=\dfrac{\pi}{4}\lim\limits_{\theta\to+0}(\dfrac{\sin\theta}{\theta})^4\times\dfrac{1}{(1+\cos\theta)^2}$

$=\dfrac{\pi}{4}\times1\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{\pi}{16}$

$\therefore\ p+q=17$

<답> 17

28.
출제의도 : 타원의 정의와 타원에 접하는 접선의 방정식에 대하여 이해하고 있는가?

기울기가 $m$이고 타원 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$에 접하는 타원의 방정식은

$y=mx\pm\sqrt{8m^2+2}\cdots$㉠

이때, ㉠은 점 (0, 2)를 지나므로

$\sqrt{8m^2+2}=2$

$8m^2+2=4,\ \ m^2=\dfrac{1}{4}$

$\therefore m=\pm\dfrac{1}{2}$

따라서 접선의 방정식은

$y=\dfrac{1}{2}x+2$ 또는 $y=-\dfrac{1}{2}x+2$

이므로 점 $P$의 $x$좌표는

$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{(\frac{1}{2}x+2)^2}{2}=1,\ \ x^2+4(\frac{1}{2}x+2)^2=8$

$x^2+4x+4=0,\ \ (x+2)^2=0$

$\therefore\ x=-2$

이때, 두 점 $P,Q$는 $y$축에 대하여 대칭이므로

$\overline{PQ}=2-(-2)=4$

또한, 타원의 또 다른 한 초점을 $F'$이라고 하면

$\overline{PF}=\overline{QF'}$

이므로

$\overline{PF}+\overline{FQ}=\overline{QF'}+\overline{FQ}=4\sqrt{2}$

따라서 삼각형 $PFQ$의 둘레의 길이는

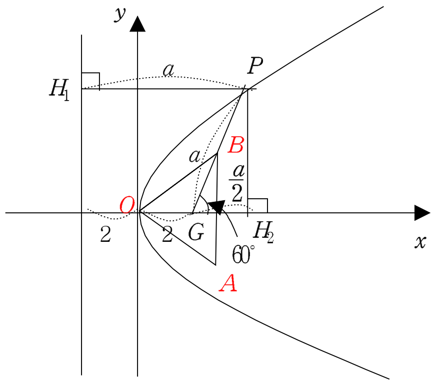
$4\sqrt{2}+4$

$\therefore a^2+b^2=32$

<답> 32

29.

출제의도 : 포물선의 정의에 대하여 이해하고 있는가?




삼각형 $OAB$가 정삼각형이고 무게중심 $G$가 $x$축 위에 있으므로 직선 $GP$는 $x$축과 이루는 양의 각의 크기가 $60°$ 이다. 또한, 정삼각형의 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$ 이므로

$\overline{OG}=2\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{2}{3}=2$

따라서 점 $P$에서 준선에 내린 수선의 발을 $H_1$, $x$축에 내린 수선의 발을 $H_2$라고 하고, $\overline{GP}=a$라고 하면

$\overline{PH_1}=\overline{GP}=a$

$\overline{GH_2}=a\cos 60°=\dfrac{a}{2}$

또한, 꼭짓점 $O$에서 준선까지의 거리도 2이므로

$a=2+2+\dfrac{a}{2}=4+\dfrac{a}{2}$

$\therefore\ a=8$

<답> 8

30.

출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 집합의 원소의 개수를 구할 수 있는가?

주어진 집합을 $A_n$이라 하자.

$\log_2 n-\log_2 k=\log_2\dfrac{n}{k}$ 이므로 $k\in A_n$이려면

$\log_2\dfrac{n}{k}=m$ ( $m$은 정수) 즉, $\dfrac{n}{k}=2^m$이어야 한

다.

(i) $1 \le n \le 50$일 때,

$k=n$이면 $\frac{n}{k}=1=2^0$이므로 $n \in A_n$이다.

$k=2n$이면 $\frac{n}{k}=\frac{1}{2}=2^{-1}$이므로 $2n \in A_n$이다.

따라서 집합 $A_n$의 원소의 개수는 $2$ 이상이다.

(ii) $n$이 짝수일 때,

$k=n$이면 $\frac{n}{k}=1=2^0$이므로 $n \in A_n$이다.

$k=\frac{n}{2}$이면 $\frac{n}{k}=2=2^1$이므로 $\frac{n}{2} \in A_n$이다.

따라서 집합 $A_n$의 원소의 개수는 $2$ 이상이다.

(iii) $n$이 $50$보다 큰 홀수일 때,

$\frac{n}{k}=2^m$ 즉, $k=\frac{n}{2^m}$ ($m$은 정수)을 만족시키는 정수 $m$은 $0$뿐이다.

따라서 집합 $A_n$의 원소의 개수는 $1$이다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수 $n$은

$51, 53, 55, \cdots, 99$의 $25$개다.

<답> 25