

제 2 교시

수리 영역(가형)

5지선다형

1. $4 \times 8^{\frac{1}{3}}$ 의 값은? [2점]

- ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

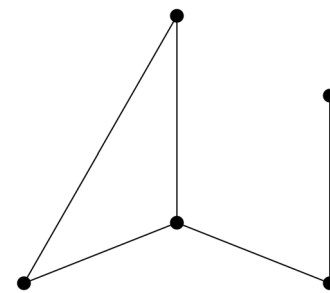
2. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{1}{6x}}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{e^2}$ ② $\frac{1}{e}$ ③ \sqrt{e} ④ e ⑤ e^2

3. 일차변환 $f: (x, y) \rightarrow (3x-y, x+ay)$ 에 의하여 점 $(1, -1)$ 이 점 $(4, 0)$ 으로 옮겨질 때, 상수 a 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. 다음 그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬의 성분 중 1의 개수는? [3점]



- ① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

5. 부등식 $(2x+1)^4 - 7(2x+1)^3 \leq 0$ 을 만족시키는 정수 x 의 개수는? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

6. 함수

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + ax - 10}{x - 2} & (x \neq 2) \\ b & (x = 2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 두 상수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값은? [3점]

- ① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

7. 원점을 중심으로 90° 만큼 회전하는 회전변환을 나타내는 행렬을 A 라 하자. 일차변환 f 를 나타내는 행렬이 $A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5$ 과 같을 때, f 에 의하여 점 $(2, 0)$ 이 점 (a, b) 로 옮겨진다. $a+b$ 의 값은? [3점]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

8. 함수

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - a \ln x \quad (a > 0)$$

의 극솟값이 0일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{2}{e}$ ③ \sqrt{e} ④ e ⑤ $2e$

9. 0이 아닌 두 실수 a, b 에 대하여 두 행렬 A, B 를
 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ 이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서
 있는 대로 고른 것은? (단, E 는 단위행렬이다.) [3점]

<보 기>

ㄱ. $(A-B)^2 = abE$
 ㄴ. $A^{-1} = 2E - A$
 ㄷ. $A + A^{-1} = B + B^{-1}$

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
 ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

10. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 1$ 이고

$$a_{n+1} = \sum_{k=1}^n 2^{n-k} a_k \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정이다.

주어진 식으로부터 $a_2 = \boxed{\text{(가)}}$ 이다.

자연수 n 에 대하여

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \sum_{k=1}^{n+1} 2^{n+1-k} a_k \\ &= \sum_{k=1}^n 2^{n+1-k} a_k + a_{n+1} \\ &= \boxed{\text{(나)}} \sum_{k=1}^n 2^{n-k} a_k + a_{n+1} \\ &= \boxed{\text{(다)}} a_{n+1} \end{aligned}$$

이다.

따라서 $a_1 = 1$ 이고, $n \geq 2$ 일 때 $a_n = (\boxed{\text{(다)}})^{n-2}$ 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r 라 할 때,
 $p+q+r$ 의 값은? [3점]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

11. 닫힌 구간 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right]$ 에서 함수

$$f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x + 1$$

의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M+m$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

12. 두 원소 A, B가 들어있는 기체 K가 기체확산장치를 통과하면 A, B의 농도가 변한다. 기체확산장치를 통과하기 전 기체 K에 들어있는 A, B의 농도를 각각 a_0, b_0 이라 하고, 기체확산장치를 n 번 통과한 기체에 들어있는 A, B의 농도를 각각 a_n, b_n 이라 하자. $c_0 = \frac{a_0}{b_0}, c_n = \frac{a_n}{b_n}$ 이라 하면 다음 관계식이 성립한다고 한다.

$$c_n = 1.004 \times c_{n-1}$$

$c_0 = \frac{1}{99}$ 일 때, 기체 K가 기체확산장치를 n 번 통과하면

$c_n \geq \frac{1}{9}$ 이 된다. 자연수 n 의 최솟값은?

(단, $\log 1.1 = 0.0414, \log 1.004 = 0.0017$ 로 계산한다.) [3점]

- ① 593 ② 613 ③ 633 ④ 653 ⑤ 673

13. 원 $(x-4)^2 + y^2 = r^2$ 과 쌍곡선 $x^2 - 2y^2 = 1$ 이 서로 다른 세 점에서 만나기 위한 양수 r 의 최댓값은? [3점]

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

14. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 의 일반항이 각각

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \quad b_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

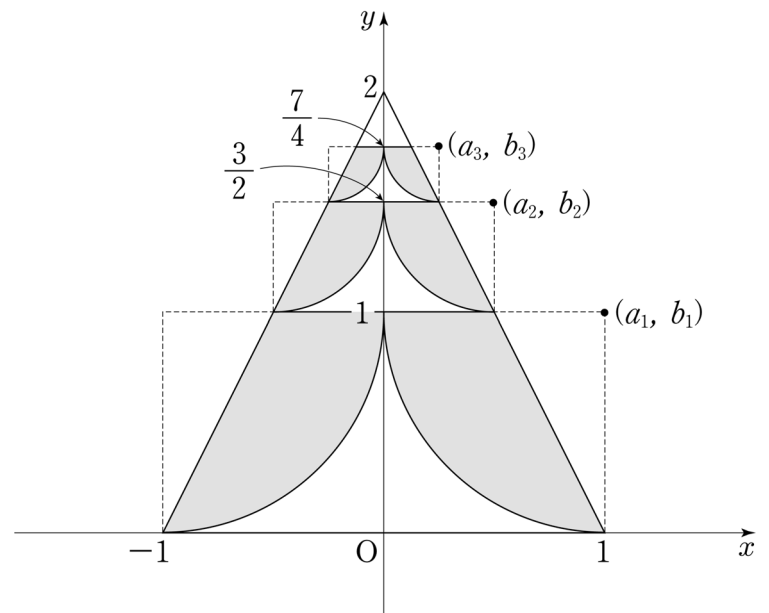
이다. 좌표평면에서 중심이 (a_n, b_n) 이고 y 축에 접하는 원의

내부와 연립부등식 $\begin{cases} y \leq b_n \\ 2x + y - 2 \leq 0 \end{cases}$ 이 나타내는

영역의 공통부분을 P_n 이라 하고, y 축에 대하여 P_n 과 대칭인 영역을 Q_n 이라 하자. P_n 의 넓이와 Q_n 의 넓이의 합을 S_n 이라

할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은? [4점]

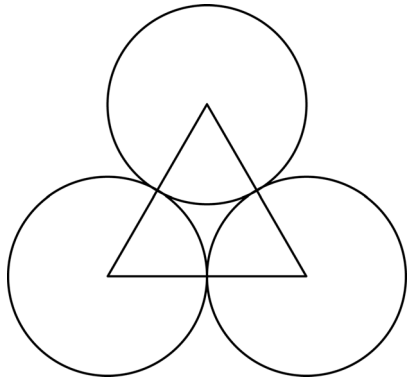
- ① $\frac{5(\pi-1)}{9}$ ② $\frac{11(\pi-1)}{18}$ ③ $\frac{2(\pi-1)}{3}$
 ④ $\frac{13(\pi-1)}{18}$ ⑤ $\frac{7(\pi-1)}{9}$



6

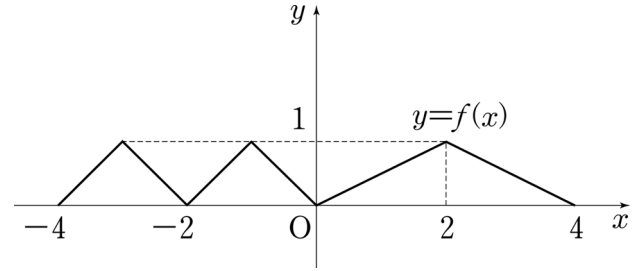
수리 영역(가형)

15. 그림과 같이 서로 접하고 크기가 같은 원 3개와 이 세 원의 중심을 꼭짓점으로 하는 정삼각형이 있다. 원의 내부 또는 정삼각형의 내부에 만들어지는 7개의 영역에 서로 다른 7가지 색을 모두 사용하여 칠하려고 한다. 한 영역에 한 가지 색만을 칠할 때, 색칠한 결과로 나올 수 있는 경우의 수는?
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]



- ① 1260 ② 1680 ③ 2520 ④ 3760 ⑤ 5040

16. 정의역이 $\{x \mid -4 \leq x \leq 4\}$ 인 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



이때, 방정식 $\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(-x)} = 1 - \frac{f(x)}{f(-x)}$ 를 만족시키는 실근의 개수는? [4점]

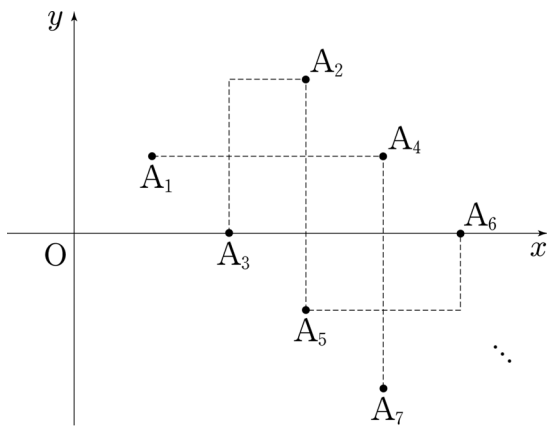
- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

17. 자연수 n 에 대하여 좌표평면 위의 점 A_n 을 다음 규칙에 따라 정한다.

- (가) 점 A_1 의 좌표는 $(1, 1)$ 이다.
- (나) n 이 짝수이면 점 A_n 은 점 A_{n-1} 을 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점이다.
- (다) n 이 3 이상의 홀수이면 점 A_n 은 점 A_{n-1} 을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 점이다.

위의 규칙에 따라 정해진 점 A_k 의 좌표가 $(7, -2)$ 이고 점 A_l 의 좌표가 $(9, -7)$ 일 때, $k+l$ 의 값은? [4점]

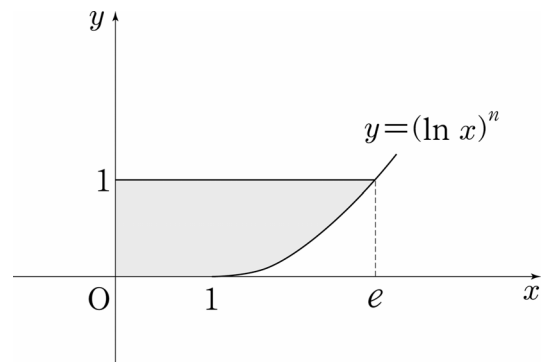
- ① 27 ② 29 ③ 31 ④ 33 ⑤ 35



18. 2 이상의 자연수 n 에 대하여 곡선 $y = (\ln x)^n$ ($x \geq 1$)과 x 축, y 축 및 직선 $y=1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n 이라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

- <보 기>
- ㄱ. $1 \leq x \leq e$ 일 때, $(\ln x)^n \geq (\ln x)^{n+1}$ 이다.
 - ㄴ. $S_n < S_{n+1}$
 - ㄷ. 함수 $f(x) = (\ln x)^n$ ($x \geq 1$)의 역함수를 $g(x)$ 라 하면 $S_n = \int_0^1 g(x) dx$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



19. 정의역이 $\{x \mid x > -1\}$ 인 함수 $f(x)$ 에 대하여

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x^3)^2} \text{이고, 함수 } g(x) = x^2 \text{일 때,}$$

$$\int_0^1 f(x)g'(x)dx = \frac{1}{6}$$

이다. $f(1)$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{5}{18}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{7}{18}$

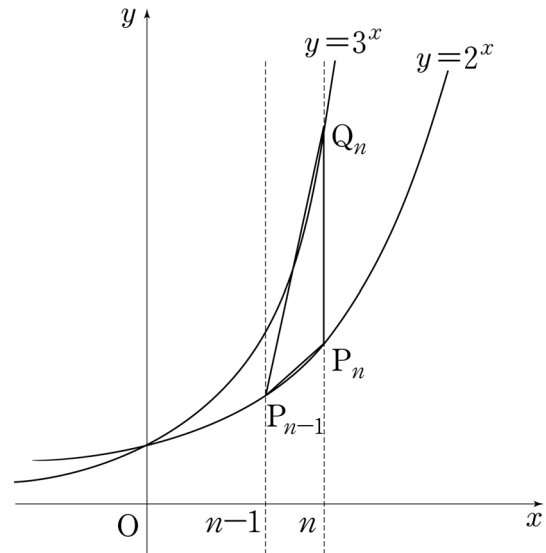
20. 자연수 n 에 대하여 직선 $x=n$ 이 두 곡선 $y=2^x$, $y=3^x$ 과

만나는 점을 각각 P_n , Q_n 이라 하자. 삼각형 $P_nQ_nP_{n-1}$ 의

넓이를 S_n 이라 하고, $T_n = \sum_{k=1}^n S_k$ 라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{3^n}$ 의 값은?

(단, 점 P_0 의 좌표는 $(0, 1)$ 이다.) [4점]

- ① $\frac{5}{8}$ ② $\frac{11}{16}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{13}{16}$ ⑤ $\frac{7}{8}$



21. 양의 실수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수

$$f(x) = \frac{1}{27}(x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 19x)$$

에 대하여 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

- ㄱ. 점 $(2, 2)$ 는 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점이다.
- ㄴ. 방정식 $f(x)=x$ 의 실근 중 양수인 것은 $x=2$ 하나뿐이다.
- ㄷ. 함수 $|f(x)-g(x)|$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하다.

- ① ㄱ
- ② ㄴ
- ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄱ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

22. 방정식 $x+y+z=17$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z 에 대하여 순서쌍 (x, y, z) 의 개수를 구하십시오. [3점]

23. 첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_4 - a_2 = 4$ 일 때,

$$\sum_{k=11}^{20} a_k \text{의 값을 구하십시오. [3점]}$$

24. 곡선 $y=e^x-1$ 과 x 축 및 직선 $x=1$ 로 둘러싸인 도형을 x 축 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피가

$\frac{\pi}{2}(e^2+ae+b)$ 이다. a^2+b^2 의 값을 구하시오.

(단, a, b 는 정수이다.) [3점]

26. 함수 $f(x)=(x+1)^{\frac{3}{2}}$ 과 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 를 $h(x)=(g \circ f)(x)$ 라 하자. $h'(0)=15$ 일 때, $g'(1)$ 의 값을 구하시오. [4점]

25. $\tan 2\alpha = \frac{5}{12}$ 일 때, $\tan \alpha = p$ 이다. $60p$ 의 값을 구하시오.

(단, $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ 이다.) [3점]

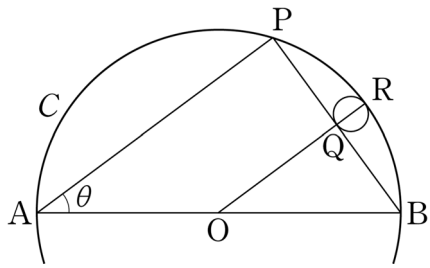
27. 중심이 O이고, 두 점 A, B를 지름의 양 끝으로 하며 반지름의 길이가 1인 원 C가 있다. 그림과 같이 원 C 위의 점 P에 대하여 점 O를 지나고 직선 AP와 평행한 직선이 선분 PB와 만나는 점을 Q, 호 PB와 만나는 점을 R라 하자.

$\angle PAB = \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)라 하고, 점 Q와 점 R를 지름의

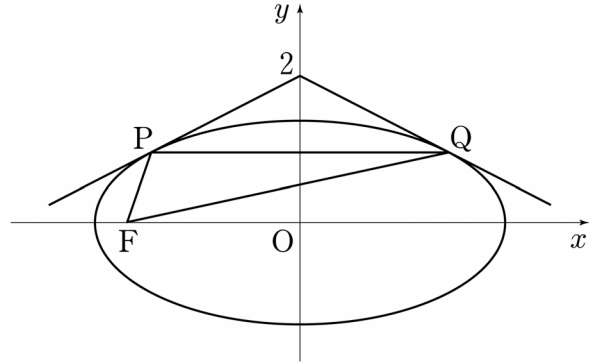
양 끝으로 하는 원의 넓이를 $S(\theta)$ 라 할 때,

$\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{S(\theta)}{\theta^4} = \frac{q}{p}\pi$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

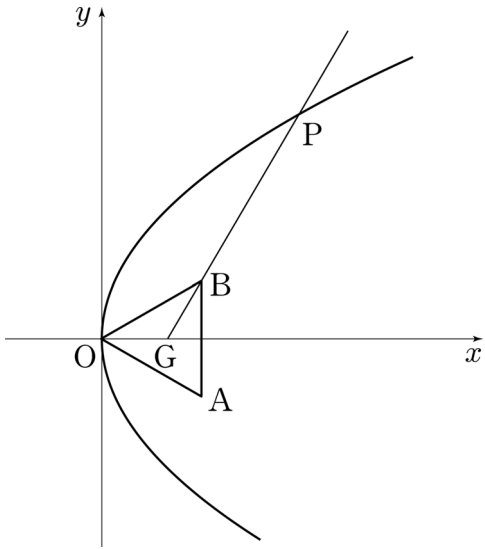
(단, $\overline{QR} < 1$ 이고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



28. 점 $(0, 2)$ 에서 타원 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ 에 그은 두 접선의 접점을 각각 P, Q라 하고, 타원의 두 초점 중 하나를 F라 할 때, 삼각형 PFQ의 둘레의 길이는 $a\sqrt{2}+b$ 이다. a^2+b^2 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 유리수이다.) [4점]



29. 그림과 같이 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 정삼각형 OAB의 무게중심 G가 x 축 위에 있다. 꼭짓점이 O이고 초점이 G인 포물선과 직선 GB가 제1사분면에서 만나는 점을 P라 할 때, 선분 GP의 길이를 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]



30. 100 이하의 자연수 전체의 집합을 S 라 할 때, $n \in S$ 에 대하여 집합

$$\{k \mid k \in S \text{ 이고 } \log_2 n - \log_2 k \text{ 는 정수}\}$$

의 원소의 개수를 $f(n)$ 이라 하자. 예를 들어, $f(10) = 5$ 이고 $f(99) = 1$ 이다. 이때, $f(n) = 1$ 인 n 의 개수를 구하시오. [4점]

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.