2011학년도 6월 고2 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수리 영역 •

수리'가'형 정답

1	④	2	①	3	④	4	②	5	②
6	②	7	⑤	8	③	9	⑤	10	④
11	④	12	③	13	③	14	①	15	④
16	②	17	①	18	⑤	19	⑤	20	⑤
21	①	22	5	23	15	24	27	25	67
26	14	27	22	28	25	29	16	30	214

해 설

1. [출제의도] 로그를 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\log_3 \sqrt{6} - \log_3 \sqrt{2}$

$= \log_3 \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$

$= \log_3 \sqrt{3} = \dfrac{1}{2}$

2. [출제의도] 지수를 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\left(8^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{1}{2}}\right)^2 = (2\sqrt{2} - \sqrt{2})^2$

$= (\sqrt{2})^2$

$= 2$

3. [출제의도] 행렬의 곱셈을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$에서

$AB - BA$

$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -12 & -6 \end{pmatrix}$

4. [출제의도] 등차수열의 일반항을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

첫째항이 $-\dfrac{2}{3}$이고 공차가 $\dfrac{2}{9}$인 등차수열을 $\{a_n\}$이라 하면

$a_n = -\dfrac{2}{3} + (n-1)\dfrac{2}{9}$

$= \dfrac{2}{9}(n-4)$

이때, a_n이 자연수가 되려면 $n-4$는 9의 배수이어야 한다.

따라서 $\{a_n\}$에서 처음으로 자연수가 되는 항은 제 13항이다.

$\therefore\ m = 13$

5. [출제의도] 행렬의 연산을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A + B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ …… ㉠

$A - 2B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ …… ㉡

㉠ − ㉡ 에서

$3B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$이므로

$B = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

㉠ 에서

$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - B$이므로

$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$= \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -8 & 11 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$

따라서 $A - B = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 & 10 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$에서 모든 성분의 합은 6이다.

[다른 풀이]

㉠ + ㉡ $\times 2$ 에서

$3A - 3B = \begin{pmatrix} -7 & 10 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$

이므로 $A - B = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 & 10 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$에서 모든 성분의 합은 6이다.

6. [출제의도] 합의 기호의 성질을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{9}\left\{\frac{k(k+1)}{10} + \frac{10}{k(k+1)}\right\}$

$= \dfrac{1}{10}\displaystyle\sum_{k=1}^{9}(k^2+k) + 10\sum_{k=1}^{9}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

$= \dfrac{1}{10}\displaystyle\sum_{k=1}^{9}k^2 + \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{9}k$

$+ 10\left\{\left(\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{10}\right)\right\}$

$= \dfrac{1}{10} \times \dfrac{9 \cdot 10 \cdot 19}{6} + \dfrac{1}{10} \times \dfrac{9 \cdot 10}{2} + 10\left(1 - \dfrac{1}{10}\right)$

$= \dfrac{57}{2} + \dfrac{9}{2} + 9$

$= 42$

7. [출제의도] 행렬의 성질을 이해하여 역행렬을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A + B = E$에서 양변의 왼쪽에 A를 곱하면

$A^2 + AB = A$이고 $AB = O$을 대입하면

$A^2 - A = O$

$(A+E)(A-2E) = -2E$ 에서

$(A+E)^{-1} = -\dfrac{1}{2}(A-2E)$

$= -\dfrac{1}{2}(E-B-2E)$

$= \dfrac{1}{2}(B+E)$

[다른 풀이]

$A + B = E$, $AB = O$에서 두 식을 더하면

$A + B + AB = E$

$(A+E)(B+E) = 2E$

$\dfrac{1}{2}(A+E)(B+E) = E$

따라서 $A+E$의 역행렬은 $\dfrac{1}{2}(B+E)$이다.

8. [출제의도] 등차중항의 성질을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. a_1, a_2, a_3, a_4, a_5가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$a_1 + a_5 = a_2 + a_4 = 2a_3$

이때, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 10$이므로

$5a_3 = 10$

$\therefore\ a_3 = 2$ (참)

ㄴ. $a_1 + a_5 = 2a_3 = 4$ (참)

ㄷ. $a_3 + a_5 = 2a_4$이고,

$a_2 + a_4 = 2a_3$이므로

$2a_2 + a_3 + a_5 = 2a_2 + 2a_4$

$= 2(a_2 + a_4)$

$= 2 \times 2a_3$

$= 4a_3 = 8$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

[다른 풀이]

a_1, a_2, a_3, a_4, a_5가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 공차를 d라 하면

$a_1 = a_3 - 2d$

$a_2 = a_3 - d$

$a_4 = a_3 + d$

$a_5 = a_3 + 2d$

ㄱ. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

$= (a_3 - 2d) + (a_3 - d) + a_3 + (a_3 + d) + (a_3 + 2d)$

$= 5a_3 = 10$

$\therefore\ a_3 = 2$ (참)

ㄴ. $a_1 + a_5 = (a_3 - 2d) + (a_3 + 2d)$

$= 2a_3 = 4$ (참)

ㄷ. $2a_2 + a_3 + a_5 = 2(a_3 - d) + a_3 + (a_3 + 2d)$

$= 4a_3 = 8$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

9. [출제의도] 로그의 성질을 이해하여 대소 관계를 알 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A = 5^{\log_5 3} = 3$

$= \log_5 125$

$B = \log_2 4 + \log_5 3$

$= 2 + \log_5 3 = \log_5 75$

$C = \dfrac{\log_3 30}{\log_3 5} = \log_5 30$

$\log_5 30 < \log_5 75 < \log_5 125$이므로

$C < B < A$

[다른 풀이]

$A = 5^{\log_5 3} = 3$

$B = \log_2 4 + \log_5 3$

$= 2 + \log_5 3$

에서 $\log_5 \sqrt{5} < \log_5 3 < \log_5 5$이므로

$\dfrac{1}{2} < \log_5 3 < 1$

$\therefore\ \dfrac{5}{2} < B < 3$

$C = \dfrac{\log_3 30}{\log_3 5} = \log_5 30$에서

$\log_5 25 < \log_5 30 < \log_5 25\sqrt{5}$ 이므로

$2 < \log_5 30 < \dfrac{5}{2}$

$\therefore\ 2 < C < \dfrac{5}{2}$

$\therefore\ C < B < A$

10. [출제의도] 수열을 이용하여 일반항을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

홀수인 자연수 1, 3, 5, 7, $\cdots$ 으로 이루어진 수열을 $\{a_n\}$이라 하면

$a_n = 2n - 1$

$a_n = 2n - 1 = 101$에서 $n = 51$이므로 101은 51번째 항이다.

또, 각 행의 항의 수는 1, 2, 3, $\cdots$ 이므로 제n행까지의 모든 항의 개수는 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k = \frac{n(n+1)}{2}$이다.

$\dfrac{n(n+1)}{2} \le 51$을 만족하는 자연수 n의 최댓값은 9이고 제9행까지의 항의 개수는 45개이다.

따라서 101은 제10행과 제6열이 만나는 위치에 있다.

$\therefore\ p + q = 10 + 6 = 16$

[다른 풀이]

각 행의 제1열의 수 1, 3, 7, 13, $\cdots$ 으로 이루어진 수열을 $\{a_n\}$이라 하면 $\{a_n\}$의 계차수열은 첫째항이 2이고 공차가 2인 등차수열이므로

$a_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}2k = 1 + 2 \times \frac{n(n-1)}{2}$

$= n^2 - n + 1$

$n = 10$일 때, $n^2 - n + 1 = 91$이므로 제10행의 첫 번째 항 a_{10}은 91이다.

이때, $101 = 91 + 2 \times 5$이므로 101은 제10행과 제6열이

만나는 위치에 있다.

$\therefore\ p+q=10+6=16$

11. [출제의도] 거듭제곱근을 이용하여 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

(ⅰ) $x^5=-7$의 실근은 $\sqrt[5]{-7}$ 이므로

$f(5)=1$

(ⅱ) $x^{10}=-2$의 실근은 존재하지 않으므로

$f(10)=0$

(ⅲ) $x^{15}=3$의 실근은 $\sqrt[15]{3}$ 이므로

$f(15)=1$

(ⅳ) $x^{20}=8$의 실근은 $\pm\sqrt[20]{8}$ 이므로

$f(20)=2$

$\therefore\ f(5)+f(10)+f(15)+f(20)=4$

12. [출제의도] 등비수열을 이용하여 도형의 길이를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

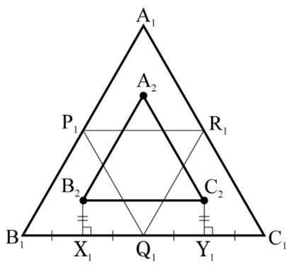
$l_1=3$이다.

두 점 B_2, C_2에서 선분 B_1C_1에 내린 수선의 발을 각각 X_1, Y_1이라 하자. 삼각형 $B_1Q_1P_1$과 삼각형 $C_1R_1Q_1$은 합동인 정삼각형이고 점 B_2는 삼각형 $B_1Q_1P_1$의 무게중심, 점 C_2는 삼각형 $C_1R_1Q_1$의 무게중심, 점 Q_1은 선분 B_1C_1의 중점이므로

$\overline{B_1X_1}=\overline{X_1Q_1}=\overline{Q_1Y_1}=\overline{Y_1C_1}$

$\overline{B_2X_1}=\overline{C_2Y_1}$

$\therefore\ \overline{B_2C_2}=\overline{X_1Y_1}=\frac{1}{2}\overline{B_1C_1}=\frac{1}{2}$



같은 방법으로 두 선분 A_2B_2, C_2A_2의 길이를 각각 구하면

$\overline{A_2B_2}=\overline{C_2A_2}=\frac{1}{2}$

따라서 삼각형 $A_2B_2C_2$는 한 변의 길이가 $\frac{1}{2}$인 정삼각형이다.

$\therefore\ l_2=\frac{3}{2}$

이와 같은 과정을 계속하면 삼각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$의 둘레의 길이는 삼각형 $A_nB_nC_n$의 둘레의 길이의 $\frac{1}{2}$이므로 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 3이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{8}l_n=\frac{3\left(1-\frac{1}{2^8}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{765}{128}$$

13. [출제의도] 지수의 성질을 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$P=6400$, $G=5120$이므로

$$S\le 0.215\left(\frac{6400}{100}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{5120}{10}\right)^{\frac{2}{3}}$$
$$=0.215\left(2^6\right)^{\frac{1}{3}}\left(2^9\right)^{\frac{2}{3}}$$
$$=0.215\times2^2\times2^6$$
$$=55.04$$

따라서 메달 가치의 최댓값은 55이다.

14. [출제의도] 행렬의 성질을 이용하여 등식을 증명할 수 있는가를 묻는 문제이다.

(가) : 등식 $X^n=A$에서 좌변을 E로 만들려면 양변에 $(X^{-1})^n$을 곱해야 한다.

(나) : 행렬 X가 역행렬을 갖는다고 가정하면 모순이 되므로 행렬 X는 역행렬을 갖지 않는다.

$\therefore\ xw-yz=0$

(다) : $X-(x+w)E=\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}-(x+w)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-w&y\\z&-x\end{pmatrix}$

15. [출제의도] 로그함수의 그래프를 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

함수 $y=\log_a(x+b)$의 그래프는 함수 $y=\log_a x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-b$만큼 평행이동 시킨 것이다.

함수 $y=\log_a x$의 그래프에서 x의 값이 증가할 때, y의 값이 감소하므로 $0<a<1$이다.

점 $(1,\ 0)$을 지나는 함수 $y=\log_a x$의 그래프가 x축의 방향으로 $-b$만큼 평행이동 시켰을 때 $x<0$인 부분에서 x축과 만나므로 $-b<-1$이다.

$\therefore\ b>1$

함수 $y=\log_b(x+a)$의 그래프는 함수 $y=\log_b x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-a\ (-1<-a<0)$만큼 평행이동 시킨 것이므로 함수 $y=\log_b(x+a)$의 그래프는 ④이다.

16. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이해하여 점의 좌표를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\overline{AB}=\log_4 a-\log_{\frac{1}{2}}a$

$=\frac{1}{2}\log_2 a+\log_2 a$

$=\frac{3}{2}\log_2 a=3$

이므로 $\log_2 a=2$에서

$a=4$

이때, 점 B의 좌표는 $(4,\ -2)$이므로 점 C의 y좌표는 -2이다.

점 C의 x좌표를 p라 하면

$-2=\log_4 p$

이므로

$p=4^{-2}=\frac{1}{16}$

17. [출제의도] 상용로그의 지표와 가수를 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. n이 증가할수록 $\log n$의 값은 증가하므로 $\log n=f(n)+g(n)$은 $n=1$일 때 최솟값을 갖는다. 따라서 $f(n)+g(n)$의 최솟값은 $\log1=0$ (참)

ㄴ. $f(m)=f(n)=2$이면 m, n은 세 자리의 자연수이므로 $|m-n|$의 최댓값은 $|999-100|=899$ (거짓)

ㄷ. $g(n)=\log7$을 만족시키는 자연수 n의 값은 $7,\ 70,\ 700,\ 7000,\ \cdots$ 따라서 $m\ne n$이고 $g(m)=g(n)=\log7$일 때, $|m-n|$의 최솟값은 $|70-7|=63$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

18. [출제의도] 행렬과 연립방정식의 해를 이용하여 최대, 최소를 구하는 문제이다.

$\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&5\\-3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}a-3&b-5\\-b+3&a-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

연립방정식이 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 가지려면

$\begin{pmatrix}a-3&b-5\\-b+3&a-3\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 한다.

즉 $(a-3)^2+(b-5)(b-3)=0$이므로

$(a-3)^2+(b-4)^2=1$

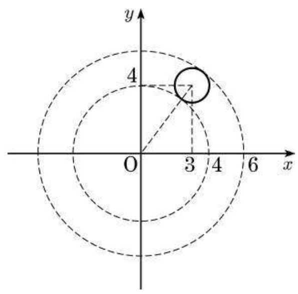
점 $P(a,\ b)$를 중심의 좌표가 $(3,\ 4)$이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점이라 하자.

이때, $a^2+b^2=\overline{OP}^2$이고 원점과 점 $(3,\ 4)$ 사이의 거리는 $\sqrt{3^2+4^2}=5$이므로

$5-1\le\overline{OP}\le5+1$

$4^2\le\overline{OP}^2\le6^2$

$\therefore\ M+m=36+16=52$



19. [출제의도] 행렬의 곱셈과 역행렬에 대한 성질을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $A=E$이면 (가)에서 $B=BC$

행렬 B의 역행렬이 존재하므로

$B^{-1}B=B^{-1}BC$

$\therefore\ C=B^{-1}B=E$ (참)

ㄴ. 행렬 A의 역행렬이 존재하면

$AB=BC$에서 $C=B^{-1}AB$

이때, $C^{-1}=(B^{-1}AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}B$ 이므로

행렬 C의 역행렬이 존재한다. (참)

ㄷ. (가), (나)에서 $A=BCB^{-1}$이므로

$A^7=(BCB^{-1})^7$

$=(BCB^{-1})(BCB^{-1})\cdots(BCB^{-1})$

$=BC^7B^{-1}$

$\therefore\ A^7B=BC^7$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

[다른 풀이]

ㄷ. $A^7B=AA\cdots AAB$

$=AA\cdots ABC$

$=AA\cdots BCC$

$\vdots$

$=BC\cdots CCC$

$=BC^7$

20. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

두 물체 A, B를 통과하여 나오는 X선의 세기를 각각 I_A, I_B라 하면

$3=\frac{2.3}{2.3}(\log I_0-\log I_A)$

$4.6=\frac{2.3}{2.5}(\log I_0-\log I_B)$

$\therefore\ \log I_A=\log I_0-3,\ \log I_B=\log I_0-5$

따라서

$\log I_A-\log I_B=(\log I_0-3)-(\log I_0-5)$

$=2$

이므로

$\log\frac{I_A}{I_B}=2$

$\frac{I_A}{I_B}=10^2=100$

$\therefore\ I_A=100I_B$

따라서 물체 A를 통과하여 나오는 X선의 세기는 물체 B를 통과하여 나오는 X선의 세기의 100배이다.

$\therefore\ k=100$

21. [출제의도] 지수함수와 이차함수를 이용하여 최댓값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$f(g(x))=f(a^x)$

$=-a^{2x}+2a^x+1$

$=-(a^x-1)^2+2 \quad (-1 \le x \le 2)$

$g(f(x))=a^{f(x)}$

$=a^{-x^2+2x+1}$

$=a^{-(x-1)^2+2} \quad (-1 \le x \le 2)$

(i) $a>1$일 때,

$a^x=t \ (t>0)$라 하면

$f(g(x))=-(t-1)^2+2 \quad \left(\frac{1}{a} \le t \le a^2\right)$

이때, $0<\frac{1}{a}<1$이고 $a^2>1$이므로 $f(g(x))$의 최댓값은 2이다.

함수 $g(f(x))=a^{f(x)}$은 $f(x)$가 최대일 때 최댓값을 갖는다.

따라서 $x=1$일 때 최댓값 a^2을 가지므로

$a^2=2$

$\therefore \ a=\sqrt{2} \quad (\because a>1)$

(ii) $0<a<1$일 때,

$a^x=t \ (t>0)$라 하면

$f(g(x))=-(t-1)^2+2 \quad \left(a^2 \le t \le \frac{1}{a}\right)$

이때, $0<a^2<1$이고 $\frac{1}{a}>1$이므로 $f(g(x))$의 최댓값은 2이다.

함수 $g(f(x))=a^{f(x)}$은 $f(x)$가 최소일 때 최댓값을 갖는다.

따라서 $x=-1$일 때 최댓값 a^{-2}을 가지므로

$a^{-2}=2$

$\therefore \ a=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\because 0<a<1)$

(i), (ii)에서 모든 a값의 합은

$\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

22. [출제의도] 지수부등식의 해를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$4^x-3\cdot 2^{x+2}+32 \le 0$

$\Leftrightarrow (2^x)^2-12\cdot 2^x+32 \le 0$

$\Leftrightarrow (2^x-4)(2^x-8) \le 0$

$\Leftrightarrow 4 \le 2^x \le 8$

$\therefore \ 2 \le x \le 3$

따라서 구하는 모든 자연수 x의 값의 합은 5이다.

23. [출제의도] 역행렬을 이용하여 행렬의 연산을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

A의 역행렬 A^{-1}가 존재하므로

$XA=B$에서 $X=BA^{-1}$이다.

$X=5\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

$=\frac{5}{2}\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 18 & -8 \end{pmatrix}$

따라서 모든 성분의 합은

$\frac{5}{2}\times 6=15$

24. [출제의도] 로그방정식의 해를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\left(\log_3\frac{9}{x}\right)\left(\log_3\frac{x}{3}\right)+6=0$

$(2-\log_3 x)(\log_3 x-1)+6=0$

$\log_3 x=t$로 치환하면

$(2-t)(t-1)+6=0$

$t^2-3t-4=0$

$\therefore \ t=4$ 또는 $t=-1$

따라서 $\log_3 x=4$ 또는 $\log_3 x=-1$이므로

$x=3^4$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

$\therefore \ \alpha\beta=3^4\times\frac{1}{3}=27$

25. [출제의도] 계차수열을 이용하여 수열의 항을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}$

$=1+\frac{1-(-1)^{n-1}}{1-(-1)}$

$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(-1)^n$

따라서 $a_{2k-1}=1$, $a_{2k}=2$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이므로

$a_{2k-1}+a_{2k}=3$

이때,

$100=3\times 33+1$

$=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{65}+a_{66})+a_{67}$

$=\sum_{k=1}^{67}a_k$

이므로 구하는 자연수 m의 값은 67이다.

26. [출제의도] 그래프의 경로를 이해하여 경우의 수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

(i) 변의 개수가 1인 경로 : AF

$\therefore$ 1 (개)

(ii) 변의 개수가 2인 경로 : AGF

$\therefore$ 1 (개)

(iii) 변의 개수가 5인 경로 :

AGBCGF

AGCBGF

AGDEGF

AGEDGF

$\therefore$ 4 (개)

(iv) 변의 개수가 8인 경로 :

AGBCGDEGF

AGCBGDEGF

AGBCGEDGF

AGCBGEDGF

AGDEGBCGF

AGDEGCBGF

AGEDGBCGF

AGEDGCBGF

$\therefore$ 8 (개)

따라서 꼭짓점 A에서 꼭짓점 F로 가는 모든 경로의 수는

$1+1+4+8=14$ (개)

[참고]

(1) 변의 개수가 5인 경로 :

경로 $\mathrm{AGP_1P_2GF}$에서 두 꼭짓점 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{P_2}$를 택하는 경우의 수는

$4\times 1=4$ (개)

(2) 변의 개수가 8인 경로 :

경로 $\mathrm{AGP_1P_2GP_3P_4GF}$에서 네 꼭짓점 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{P_2}$, $\mathrm{P_3}$, $\mathrm{P_4}$를 택하는 경우의 수는

$4\times 1\times 2\times 1=8$ (개)

27. [출제의도] 수열의 합과 일반항의 관계를 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a_n=2\cdot 3^{n-1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이다.

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=4n\cdot 3^n$이라 하면

$a_nb_n=S_n-S_{n-1} \quad (n \ge 2)$

$=4n\cdot 3^n-4(n-1)3^{n-1}$

$=4\cdot 3^{n-1}(2n+1)$

$b_n=2(2n+1) \ (n \ge 2)$

$=4n+2$

$\therefore \ b_5=22$

28. [출제의도] 이차함수를 이용하여 지수부등식의 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

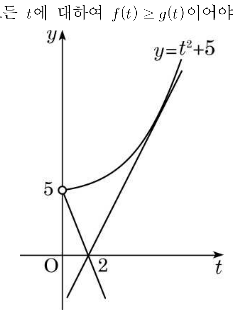
$5^x=t \ (t>0)$라 하면

$t^2-kt+2k+5 \ge 0$

$t^2+5 \ge k(t-2)$

$f(t)=t^2+5$, $g(t)=k(t-2)$라 하면

$t>0$인 모든 t에 대하여 $f(t) \ge g(t)$이어야 한다.



(i) $y=g(t)$의 그래프가 점 (0, 5)를 지날 때,

$5=k(0-2)$에서

$k=-\frac{5}{2}$

(ii) 두 함수 $f(t)$, $g(t)$의 그래프가 접할 때,

방정식 $t^2-kt+2k+5=0$이 중근을 가지므로

판별식 $D=k^2-8k-20=0$에서

$(k-10)(k+2)=0$

$\therefore \ k=10$ 또는 $k=-2$

이때, $k>0$이므로

$k=10$

(i), (ii)에서

$-\frac{5}{2} \le k \le 10$

$\therefore \ |\alpha\beta|=\left|-\frac{5}{2}\times 10\right|=25$

[다른 풀이]

지수부등식 $5^{2x}-k\cdot 5^x+2k+5 \ge 0$에서

$5^x=t \ (t>0)$로 놓으면

$t^2-kt+2k+5 \ge 0$

$f(t)=t^2-kt+2k+5$

$=\left(t-\frac{k}{2}\right)^2-\frac{1}{4}k^2+2k+5 \ (t>0)$

라 하면 꼭짓점의 t좌표는 $\frac{k}{2}$이다.

(i) $\frac{k}{2}>0$일 때,

$-\frac{1}{4}k^2+2k+5 \ge 0$이어야 하므로

$k^2-8k-20 \le 0$

$\therefore \ -2 \le k \le 10$

그런데, $k>0$이므로

$0<k \le 10$

(ii) $\frac{k}{2} \le 0$일 때,

$f(0) \ge 0$이어야 하므로

$2k+5 \ge 0$

$k \ge -\frac{5}{2}$

그런데, $k \le 0$이므로

$-\frac{5}{2} \le k \le 0$

(i), (ii)에 의하여

$-\frac{5}{2} \le k \le 10$

$\therefore \ |\alpha\beta|=\left|-\frac{5}{2}\times 10\right|=25$

29. [출제의도] 역행렬을 갖기 위한 조건을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

서로 다른 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$를 택하여 만든 행렬 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않으려면

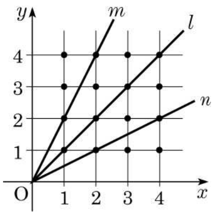
$x_1y_2-x_2y_1=0$이어야 한다.

이때, x_1, x_2, y_1, y_2는 모두 0이 아니므로

$\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}$

따라서 세 점 O, $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$가 한 직선 위에

있을 때 역행렬이 존재하지 않는다.



두 점을 택하는 순서에 따라 서로 다른 행렬이 만들어지므로

(i) 직선 l 위의 두 점을 택한 경우

$_4\mathrm{P}_2=12$ (개)

(ii) 직선 m 위의 두 점을 택한 경우

$_2\mathrm{P}_2=2$ (개)

(iii) 직선 n 위의 두 점을 택한 경우

$_2\mathrm{P}_2=2$ (개)

그러므로 역행렬을 갖지 않는 행렬의 개수는

$12+2+2=16$ 이다.

30. [출제의도] 수열을 이용하여 점의 좌표를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}=2\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3}=3\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4}=4\sqrt{2}$, … 이므로 점 A_n $(n=1,2,3,\cdots)$의 x좌표를 x_n이라 하면 수열 $\{x_n\}$은 다음과 같다.

$1,-1,2,-2,3,-3,\cdots$

$\therefore\ x_{2k-1}=k,\ x_{2k}=-k\ (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

한편, 점 A_n $(n=1,2,3,\cdots)$의 y좌표를 y_n이라 하면

$y_n=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

따라서 세 점 A_{19}, A_{20}, A_{21}의 좌표는

$\mathrm{A}_{19}(10,190)$, $\mathrm{A}_{20}(-10,210)$, $\mathrm{A}_{21}(11,231)$

이므로 삼각형 $\mathrm{A}_{19}\mathrm{A}_{20}\mathrm{A}_{21}$의 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{10-10+11}{3},\ \dfrac{190+210+231}{3}\right)$

즉, $\left(\dfrac{11}{3},\ \dfrac{631}{3}\right)$이다.

$\therefore\ a+b=\dfrac{11}{3}+\dfrac{631}{3}=\dfrac{642}{3}=214$

수리'나'형 정답

1	⑤	2	①	3	④	4	①	5	②
6	②	7	⑤	8	③	9	②	10	③
11	④	12	②	13	③	14	①	15	③
16	②	17	④	18	⑤	19	⑤	20	④
21	①	22	5	23	15	24	24	25	576
26	14	27	21	28	25	29	16	30	32

해 설

1. [출제의도] 지수를 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$8^3\times4^{-2}=2^9\times2^{-4}=2^5=32$

2 ~ 3. '가'형과 같음.

4. [출제의도] 지수방정식의 해를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2-3}=\left(\dfrac{1}{9}\right)^{x}$

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2-3}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x}$

양변의 지수를 비교하면

$x^2-3=2x$

$x^2-2x-3=0$

$(x-3)(x+1)=0$

$\therefore\ x=3$ 또는 $x=-1$

따라서 모든 근의 합은 2이다.

[다른 풀이]

이차방정식 $x^2-2x-3=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 2이다.

5. '가'형과 같음.

6. [출제의도] 행렬의 곱셈을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$ABA^{-1}=B$에서 $AB=BA$이므로

$\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\x&y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\x&y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1+2x&1+2y\\2+3x&2+3y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&5\\x+2y&2x+3y\end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의해

$1+2x=3,\ 1+2y=5,$

$2+3x=x+2y,\ 2+3y=2x+3y$

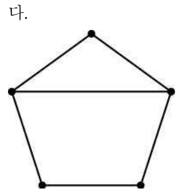
$\therefore\ x=1,\ y=2$

$\therefore\ xy=2$

7. '가'형과 같음.

8. [출제의도] 주어진 행렬이 나타내는 그래프를 찾을 수 있는가를 묻는 문제이다.

주어진 행렬이 나타내는 그래프를 그리면 다음과 같다.



9. [출제의도] 역행렬을 이용하여 연립일차방정식의 해를 판별할 수 있는가를 묻는 문제이다.

연립방정식의 해가 존재하지 않으려면 역행렬이 존재하지 않아야 하므로

$2\times4-(k-1)(k-3)=0$

$k^2-4k-5=0$

$(k-5)(k+1)=0$

$k=5$ 또는 $k=-1$

(i) $k=5$일 때,

$\dfrac{2}{4}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$이므로 해가 무수히 많다.

(ii) $k=-1$일 때,

$\dfrac{2}{-2}=\dfrac{-4}{4}\neq\dfrac{1}{2}$이므로 해가 없다.

따라서 해가 존재하지 않도록 하는 상수 k의 값은 -1이다.

10. [출제의도] 행렬을 이용하여 거리에 관한 성질을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $L(A)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$L(B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$\therefore\ L(A)=L(B)$ (참)

ㄴ. $L(2A)=\sqrt{(2x_2-2x_1)^2+(2y_2-2y_1)^2}$

$=2\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$=2L(A)$ (참)

ㄷ. $A+B=2\begin{pmatrix}x_1&x_2\\0&0\end{pmatrix}$ 이므로

$L(A+B)=2\,|x_2-x_1|$

$\therefore\ \dfrac{1}{2}L(A+B)=|x_2-x_1|$

$\leq\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

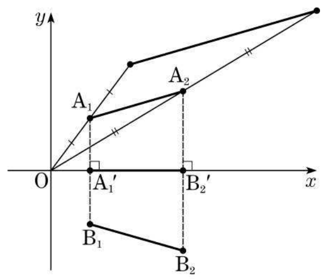
$=L(A)=L(B)$

$\therefore\ L(A+B)\leq L(A)+L(B)$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

[다른 풀이]

$\mathrm{A}_1(x_1,y_1)$, $\mathrm{A}_2(x_2,y_2)$, $\mathrm{B}_1(x_1,-y_1)$, $\mathrm{B}_2(x_2,-y_2)$ 라 하자.



ㄱ. $L(A)=\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}$, $L(B)=\overline{\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2}$

그런데 두 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$, $\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2$는 x축에 대하여 서로 대칭이므로 그 길이가 같다.

$\therefore\ L(A)=L(B)$ (참)

ㄴ. $L(2A)$는 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$를 원점을 닮음의 중심으로 하여 2배만큼 확대한 선분의 길이와 같으므로

$L(2A)=2L(A)$ (참)

ㄷ. $A+B=2\begin{pmatrix}x_1&x_2\\0&0\end{pmatrix}$이므로

$L(A+B)=2|x_2-x_1|$

이때, $\dfrac{1}{2}L(A+B)=|x_2-x_1|$은 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$의 양 끝점에서 x축에 각각 내린 두 수선의 발 A_1', A_2'을 양 끝점으로 하는 선분 $\mathrm{A}_1'\mathrm{A}_2'$의 길이와 같다.

$\overline{\mathrm{A}_1'\mathrm{A}_2'}\leq\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}$ 이므로

$\dfrac{1}{2}L(A+B)\leq L(A)$

$\therefore\ L(A+B)\leq L(A)+L(B)$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

11. '가'형과 같음.

12. [출제의도] 행렬의 곱셈과 역행렬의 성질을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$AB=AA^2=A^3$, $BA=A^2A=A^3$에서

$AB=BA$

$A^2B^2=AABB=ABAB=(AB)^2$

같은 방법으로

$A^3B^3=(AB)^3$, $A^4B^4=(AB)^4$, $A^5B^5=(AB)^5$

한편, $A^2B^2=B(-A)$에서

$(AB)^2=-AB$

이때, A, B의 역행렬이 모두 존재하므로 $(AB)^{-1}$을 양변에 곱하면

$AB=-E$

$\therefore\ AB+A^2B^2+A^3B^3+A^4B^4+A^5B^5$

$=AB+(AB)^2+(AB)^3+(AB)^4+(AB)^5$

$=-E+E-E+E-E$

$=-E$

[다른 풀이]

(나)에서 $A^4=B^2=-A$이므로

$A^4+A=O$

$\therefore\ A(A^3+E)=O$

(가)에서 A의 역행렬이 존재하므로 양변에 A^{-1}을 곱하면 $A^3+E=O$ 즉, $A^3=-E$이다.

$\therefore\ A^{-1}=-A^2=-B$

$\therefore\ AB=-E$

13 ~ 14. '가'형과 같음.

15. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{OD}}:\overline{\mathrm{BA}}=1:3$에서

$\overline{\mathrm{OD}}:\overline{\mathrm{OH}}=1:4$

이때, $\overline{\mathrm{OH}}=2$이므로

$\overline{\mathrm{OD}}=\frac{1}{2}$

따라서 점 D의 x좌표는 $\frac{1}{2}$이므로 $\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, 2\right)$이다.

점 B는 지수함수 $y=a^x$의 그래프 위의 점이므로

$a^{\frac{1}{2}}=2$

$\therefore\ a=4$

$\therefore\ \overline{\mathrm{CE}}=\overline{\mathrm{AC}}=4^2-2=14$

16. [출제의도] 행렬을 이용하여 행렬의 거듭제곱을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A+B=E,\ AB=E$ 에서

$A(E-A)=E$

$A^2-A+E=O$ ……㉠

양변에 $A+E$를 곱하면

$(A+E)(A^2-A+E)=O$

$A^3+E=O,\ A^3=-E,\ A^6=E$이므로

$A^{2012}=A^{6\times335+2}$

$\quad=(A^6)^{335}A^2=A^2$

한편, ㉠에서

$A^2=A-E$

같은 방법으로

$B^{2012}=B^2=B-E$

$\therefore\ A^{2012}+B^{2012}=A^2+B^2=A-E+B-E$

$\quad=A+B-2E=E-2E=-E$

[다른 풀이]

위에서 $A^{2012}=A^2,\ B^{2012}=B^2$

$AB=E$에서 $BA=E$ 이므로 $AB=BA$

$A^{2012}+B^{2012}=A^2+B^2$

$\quad=(A+B)^2-2AB$

$\quad=E-2E=-E$

17. [출제의도] 그래프를 나타내는 행렬을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

그래프 G를 나타내는 행렬의 성질에서

$a=b,\ c=d$ …… ㉠

행렬의 모든 성분의 합은 변의 개수의 2배와 같으므로 조건 (가)에서

$a+b+c+d+12=14$ …… ㉡

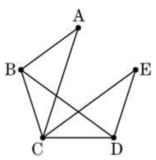
㉠, ㉡에서 $2(a+c)=2$이므로

$a+c=1$

그런데 a, c는 0 또는 1의 값을 가지므로 $a=1,\ c=0$ 또는 $a=0,\ c=1$이다.

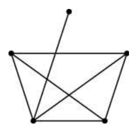
(i) $a=1,\ c=0$일 때,

다음과 같이 꼭짓점과 변을 정하면 모든 변을 빠짐없이 지나는 경로 BCABDCED가 존재한다.



(ii) $a=0,\ c=1$일 때,

주어진 행렬이 나타내는 그래프는 조건 (나)를 만족하지 않는다.



따라서 $a=b=1,\ c=d=0$이므로

$8a+4b+2c+d=12$

[참고]

그래프에서 꼭짓점에 연결된 변의 개수가 홀수인 꼭짓점의 개수가 0 또는 2이면 모든 변을 빠짐없이 지나는 경로가 존재한다.

(i) $a=1,\ c=0$일 때,

각 꼭짓점에 연결된 변의 개수가 2, 3, 4, 3, 2이므로 (나)를 만족한다.

(ii) $a=0,\ c=1$일 때,

각 꼭짓점에 연결된 변의 개수가 1, 3, 4, 3, 3이므로 (나)를 만족하지 않는다.

18 ~ 19. '가'형과 같음.

20. [출제의도] 지수의 성질을 이용하여 최솟값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$2^x\cdot4^y=2^{x+2y}$ 이므로 $x+2y$가 최소일 때 $2^x\cdot4^y$은 최솟값을 갖는다.

$\sqrt{x}+\sqrt{2y}=4$에서 $\sqrt{2y}=4-\sqrt{x}$ ……㉠

양변을 제곱하면 $2y=16-8\sqrt{x}+x$이므로

$x+2y=x+16-8\sqrt{x}+x$

$\quad=2(\sqrt{x})^2-8\sqrt{x}+16$

$\quad=2(\sqrt{x}-2)^2+8$

㉠에서 $4-\sqrt{x}>0$ 이므로 $0<\sqrt{x}<4$

따라서 $x+2y$는 $\sqrt{x}=2$일 때 최솟값 8을 가지므로 $2^x\cdot4^y$의 최솟값은 $2^8=256$이다.

[다른 풀이]

코시-슈바르츠 부등식에서

$(x+2y)(1^2+1^2)\ge(\sqrt{x}+\sqrt{2y})^2$

$2(x+2y)\ge4^2,\ x+2y\ge8$

따라서 $2^x\cdot4^y$의 최솟값은 $2^8=256$이다.

[다른 풀이]

$x>0,\ y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에서

$x+2y\ge2\sqrt{x\cdot2y}$ …… ㉠

(단, 등호는 $x=2y$일 때 성립)

한편 $\sqrt{x}+\sqrt{2y}=4$에서 $x=2y$이면

$\sqrt{x}=\sqrt{2y}=2$

$\therefore$ ㉠에서 $x+2y\ge2\sqrt{x\cdot2y}=2\sqrt{x}\cdot\sqrt{2y}=8$

따라서 $2^x\cdot4^y$의 최솟값은 $2^8=256$이다.

21 ~ 23. '가'형과 같음.

24. [출제의도] 행렬을 이용하여 행렬의 거듭제곱을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A^2=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2\\2&0\end{pmatrix}$

$A^4=(A^2)^2$

$\quad=\begin{pmatrix}0&-2\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-2\\2&0\end{pmatrix}$

$\quad=\begin{pmatrix}-4&0\\0&-4\end{pmatrix}=-4E$

이므로

$A^6=A^4A^2=-4A^2,$

$A^8=(A^4)^2=16E,$

$A^{10}=A^8A^2=16A^2$

$\therefore\ A^2+A^4+A^6+A^8+A^{10}$

$\quad=A^2-4E-4A^2+16E+16A^2$

$\quad=13A^2+12E$

그런데 A^2의 모든 성분의 합은 0이고 $12E$의 모든 성분의 합은 24이므로 주어진 행렬의 성분의 합은 $0+24=24$이다.

25. [출제의도] 행렬의 정의를 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

(i) $i=1,\ j=1$일 때, $f(x)=\sin\pi x$

$f(x)$의 최댓값은 1이므로

$a_{11}=1$

(ii) $i=1,\ j=2$일 때, $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$

$f(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$이므로

$a_{12}=4$

(iii) $i=1,\ j=3$일 때, $f(x)=\sin\frac{\pi}{3}x$

$f(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6$이므로

$a_{13}=6$

(iv) $i=2,\ j=1$일 때, $f(x)=2\sin\pi x$

$f(x)$의 최댓값은 2이므로

$a_{21}=2$

(v) $i=2,\ j=2$일 때, $f(x)=2\sin\frac{\pi}{2}x$

$f(x)$의 최댓값은 2이므로

$a_{22}=2$

(vi) $i=2,\ j=3$일 때, $f(x)=2\sin\frac{\pi}{3}x$

$f(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6$이므로

$a_{23}=6$

따라서 모든 성분의 곱은 576이다.

26. '가'형과 같음.

27. [출제의도] 지수 법칙을 이용하여 지수방정식의 해를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$2^{x+y}+2^x+2^y=1160$

$\Leftrightarrow\ 2^y(2^x+2^{x-y}+1)=2^3\cdot5\cdot29$

$\Leftrightarrow\ 2^{y-3}(2^x+2^{x-y}+1)=145$

따라서 $2^{y-3}=1,\ 2^x+2^{x-y}+1=145$이어야 한다.

$2^{y-3}=1$에서 $y-3=0$이므로

$y=3$

이때, $2^x+2^{x-3}+1=145$에서

$2^x=2^7$이므로

$x=7$

$\therefore\ \alpha\beta=3\times7=21$

[다른 풀이]

$2^{x+y}+2^x+2^y=1160$에서

$2^x2^y+2^x+2^y+1=1161$이므로

$(2^x+1)(2^y+1)=1161$

이때, $1161=3^3\cdot43$이고 $2^x+1,\ 2^y+1$은 모두 3 이상인 홀수이다.

(i) $2^x+1=3^2\cdot43,\ 2^y+1=3$일 때,

$2^x=386$인 자연수 x가 존재하지 않는다.

(ii) $2^x+1=3\cdot43,\ 2^y+1=3^2$일 때,

$2^x=128$에서 $x=7$

$2^y=8$에서 $y=3$

(iii) $2^x+1=43,\ 2^y+1=3^3$일 때,

자연수 x, y가 존재하지 않는다.

$\therefore\ \alpha\beta=3\times7=21$

28 ~ 29. '가'형과 같음.

30. [출제의도] 지수의 성질을 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

가로의 길이가 25π, 두께가 0.5이므로

$25\pi\ge\frac{0.5\pi}{6}(2^n+4)(2^n-1)$

$(2^n+4)(2^n-1)\le300$

$2^{2n}+3\cdot2^n-304\le0$

$2^n=t\ \ (t>0)$라 하면

$t^2+3t-304\le0$

$(t-16)(t+19)\le0$

$\therefore\ 0<t\le16$

이때, $2^n\le16$에서 $n\le4$이므로 $a=4$이다.

종이의 두께는 한 번 접을 때마다 2배씩 늘어나므로 4번 접었을 때 접은 종이의 총 두께는

$b=0.5\times2^4=8$

$\therefore\ ab=32$