

수리 영역 (나 형)

제 2 교시

성명

수험번호 3

1

- 자신이 선택한 유형(‘가’형 / ‘나’형)의 문제지인지 확인하십시오.
- 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 기입하십시오.
- 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하십시오.
- 단답형 답의 숫자에 ‘0’ 이 포함되면 그 ‘0’ 도 답란에 반드시 표시하십시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하십시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하십시오.

1. $\sqrt[5]{3^2} = \sqrt{9^k}$ 일 때, 상수 k 의 값은? [2점]

- ① $\frac{3}{10}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{1}{2}$
 ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{7}{10}$

2. 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ 에 대하여

$A + X = 3B + 2X$ 를 만족시키는 행렬 X 는? [2점]

- ① $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -9 & -11 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -9 & -11 \end{pmatrix}$
 ④ $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -9 & 11 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 9 & -11 \end{pmatrix}$

3. 수열 $\{a_n\}$ 이 $3n-1 < na_n < 3n+2$ 를 만족시킬 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의

값은? [3점]

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 2
 ④ 3 ⑤ 5

4. 이차정사각행렬 A 의 (i, j) 성분 a_{ij} 가 아래와 같이 정의될 때, 행렬 A 의 모든 성분의 합은? [3점]

$$a_{ij} = \begin{cases} i-1 & (i > j) \\ i+j & (i = j) \\ i-2j & (i < j) \end{cases}$$

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

5. $P_n = 3^{\frac{1}{n(n+1)}}$ 에 대하여 $P_1 \times P_2 \times P_3 \times \dots \times P_{2010} = 3^k$ 일 때, 상수 k 의 값은? (단, n 은 자연수이다.) [3점]

- ① $\frac{2009}{2010}$ ② $\frac{2010}{2011}$ ③ 1
- ④ $\frac{2011}{2010}$ ⑤ $\frac{2010}{2009}$

6. 0이 아닌 세 실수 a, b, c 가 $\frac{a+b}{4} = \frac{b+c}{7} = \frac{c+a}{9}$ 를 만족시킬 때, $(2^a \times 2^b)^{\frac{1}{c}}$ 의 값은? [3점]

- ① $\sqrt[4]{2}$ ② $\sqrt[3]{2}$ ③ $\sqrt[3]{4}$
- ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

7. 다음은 ‘ a, b 가 1이 아닌 양의 실수일 때, $\log_a b = \log_b a$ 이면 $\frac{a^2+1}{b^2+1} = \frac{a}{b}$ 이다.’ (*)가 성립함을 증명한 것이다.

[증명]

$\log_b a = \frac{1}{\text{(가)}}$ 이고 가정에서 $\log_a b = \log_b a$ 이므로

$\log_a b = 1$ 또는 $\log_a b = -1$ 이다.

(i) $\log_a b = 1$ 일 때, $\frac{a^2+1}{b^2+1} = \text{(나)}$ 이고 $\frac{a}{b} = \text{(나)}$ 이다.

(ii) $\log_a b = -1$ 일 때, $\frac{a^2+1}{b^2+1} = \text{(다)}$ 이고 $\frac{a}{b} = \text{(다)}$ 이다.

따라서 (i), (ii)에 의하여 $\frac{a^2+1}{b^2+1} = \frac{a}{b}$ 이므로 (*)가 성립한다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

- | | (가) | (나) | (다) |
|---|----------------------|-----|-------|
| ① | $\log_a b$ | -1 | b^2 |
| ② | $\log_b \frac{1}{a}$ | -1 | ab |
| ③ | $\log_a b$ | 1 | a^2 |
| ④ | $\log_b \frac{1}{a}$ | -1 | a^2 |
| ⑤ | $\log_a b$ | 1 | b^2 |

8. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & k \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ 과 이차정사각행렬 B 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, O 는 영행렬이다.) [3점]

< 보 기 >

ㄱ. $k=0$ 일 때, A^{-1} 이 존재한다.
 ㄴ. $k=1$ 일 때, $AB=O$ 이면 $B=O$ 이다.
 ㄷ. $k=4$ 일 때, $AB=O$ 이면 영행렬이 아닌 행렬 B 가 존재한다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

9. 다음 두 조건을 모두 만족시키는 모든 양의 실수 x 의 곱은?
 (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [3점]

(가) $[\log x] = [\log 365]$
 (나) $\log x^3 - [\log x^3] = \log \frac{1}{x} - \left[\log \frac{1}{x} \right]$

- ① 10^9 ② $10^{\frac{19}{2}}$ ③ 10^{10}
 ④ $10^{\frac{21}{2}}$ ⑤ 10^{11}

10. 모든 항이 양수인 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 에 대하여 a_n, b_n, a_{n+1} 은 이 순서대로 등차수열을 이루고, b_n, a_{n+1}, b_{n+1} 은 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, 일반항 a_n 과 b_n 을 구하는 과정이다. (단, $a_1 = 1, a_2 = 3, b_1 = 2$)

a_n, b_n, a_{n+1} 은 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2b_n = a_n + a_{n+1} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이다.

b_n, a_{n+1}, b_{n+1} 은 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$(a_{n+1})^2 = b_n b_{n+1}$$

이고, $a_{n+1} > 0, a_{n+2} > 0$ 이므로

$$a_{n+1} = \sqrt{b_n b_{n+1}}, a_{n+2} = \sqrt{b_{n+1} b_{n+2}} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이다.

또한, $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 얻어진 $2b_{n+1} = \sqrt{b_n b_{n+1}} + \sqrt{b_{n+1} b_{n+2}}$ 의 양변을 $\sqrt{b_{n+1}}$ 로 나누면 $2\sqrt{b_{n+1}} = \sqrt{b_n} + \sqrt{b_{n+2}}$ 이므로 $\{\sqrt{b_n}\}$ 은 (가) 수열이다.

그러므로 $a_2 = 3, b_1 = 2, (a_2)^2 = b_1 b_2$ 에서 $b_2 = \frac{9}{2}$ 이므로 $b_n =$ (나) 이다.

따라서, $a_n =$ (다) 이다.

위 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [4점]

- | | (가) | (나) | (다) |
|---|-----|----------------------|--------------------|
| ① | 등차 | $\frac{1}{2}(n+1)^2$ | $\frac{n(n+1)}{4}$ |
| ② | 등비 | $\frac{1}{2}(n+1)^2$ | $\frac{n(n+1)}{2}$ |
| ③ | 등차 | $\frac{1}{4}(n+1)^2$ | $\frac{n(n+1)}{4}$ |
| ④ | 등비 | $\frac{1}{4}(n+1)^2$ | $\frac{n(n+1)}{4}$ |
| ⑤ | 등차 | $\frac{1}{2}(n+1)^2$ | $\frac{n(n+1)}{2}$ |

11. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3}{n^4} \right)$ 이 수렴할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$
 ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

12. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

< 보 기 >

ㄱ. $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = 0$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ 이다.
 ㄴ. $\lim_{n \rightarrow \infty} (3n+1)a_n = 6$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 2$ 이다.
 ㄷ. 수열 $\{a_n b_n\}$ 이 수렴하면 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 은 각각 수렴한다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13. 첫째항이 1이고 공비가 $\frac{1}{3}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 대각선의 길이가 a_n 인 정사각형의 넓이를 S_n 이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{q}{p}$ 라 할 때, $p+q$ 의 값은? (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

- ① 22 ② 23 ③ 24
 ④ 25 ⑤ 26

14. 두 이차정사각행렬 A, B 가 $A+BA=2E$, $AB+BA=-A+B$ 를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, E 는 단위행렬이다.) [4점]

< 보 기 >

ㄱ. A^{-1} 이 존재한다.
 ㄴ. $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$
 ㄷ. $A+B=4E$

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 연립부등식 $\begin{cases} |x|+2|y| \leq 4 \\ 2^n(y-x)+y \geq 1 \end{cases}$ 의 해 (x, y) 가 나타내는 영역의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? (단, n 은 자연수이다.) [4점]

- ① 8 ② 10 ③ 12
- ④ 14 ⑤ 16

16. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 $\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$ 을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보기 >

ㄱ. $a_2 + b_2 = 17$ ㄴ. $b_n = 3^n - 1$ ㄷ. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 3$

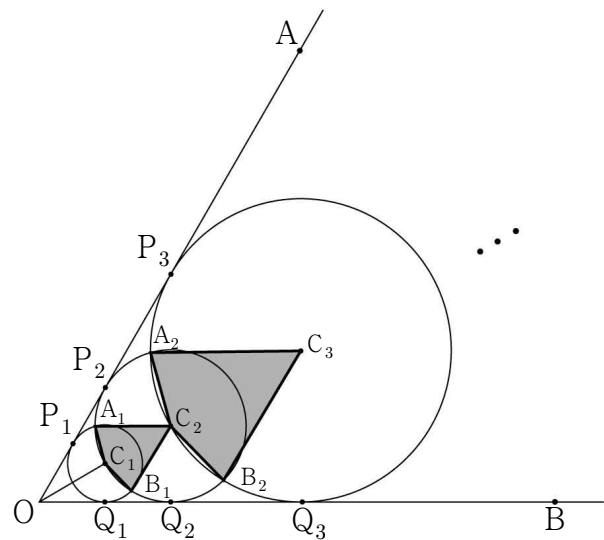
- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 그림과 같이 크기가 60° 인 $\angle AOB$ 의 이등분선 위에 $\overline{OC_1} = 2$ 인 점 C_1 을 잡아 점 C_1 을 중심으로 하고 반직선 OA와 OB에 접하는 원 C_1 을 그릴 때, 원 C_1 과 반직선 OA, OB와의 접점을 각각 P_1, Q_1 이라 하자.

점 C_1 을 지나고 반직선 OA와 OB에 접하는 두 원 중에서 큰 원의 중심을 C_2 , 원 C_2 와 반직선 OA, OB와의 접점을 각각 P_2, Q_2 라 하고, 원 C_1 과 원 C_2 가 만나는 점을 각각 A_1, B_1 이라 할 때, 사각형 $A_1C_1B_1C_2$ 의 넓이를 S_1 이라 하자.

점 C_2 를 지나고 반직선 OA와 OB에 접하는 두 원 중에서 큰 원의 중심을 C_3 , 원 C_3 과 반직선 OA, OB와의 접점을 각각 P_3, Q_3 이라 하고, 원 C_2 와 원 C_3 이 만나는 점을 각각 A_2, B_2 라 할 때, 사각형 $A_2C_2B_2C_3$ 의 넓이를 S_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 도형의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{4^n + 3^n}$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{3}{8}$
- ④ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{15}}{8}$

단답형

18. $\log_2 3 - \log_2 \frac{9}{2} + \log_2 12$ 의 값을 구하시오. [2점]

19. 무한수열 $\{(x+2)(x^2-4x+3)^{n-1}\}$ 이 수렴하도록 하는 모든 정수 x 의 합을 구하시오. [3점]

20. n 이 자연수일 때, x 에 대한

이차방정식 $x^2 - 33x + n(n+1) = 0$ 의 두 근을 α_n, β_n 이라 하자.

이 때, $\sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} \right)$ 의 값을 구하시오. [3점]

21. 그림과 같이 자연수를 다음 규칙에 따라 나열하였다.

[규칙1] 1행에는 2, 3, 6의 3개의 수를 차례대로 나열한다.

[규칙2] $n+1$ 행에 나열된 수는 1열에 2, 2열부터는 n 행에 나열된 각 수에 2를 곱하여 차례대로 나열한다.

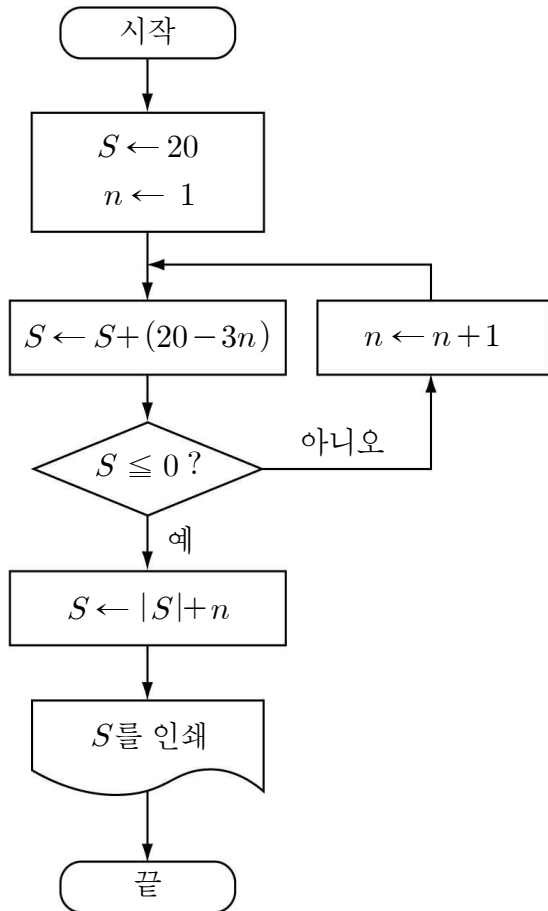
| | [1열] | [2열] | [3열] | [4열] | [5열] | ... |
|------|------|------|------|------|------|-----|
| [1행] | 2 | 3 | 6 | | | |
| [2행] | 2 | 4 | 6 | 12 | | |
| [3행] | 2 | 4 | 8 | 12 | 24 | |
| ⋮ | | | ⋮ | | | |

10행에 나열된 모든 자연수의 합을 S 라 할 때, $S = p \times 2^9 - 2$ 이다. 이 때, p 의 값을 구하시오. [3점]

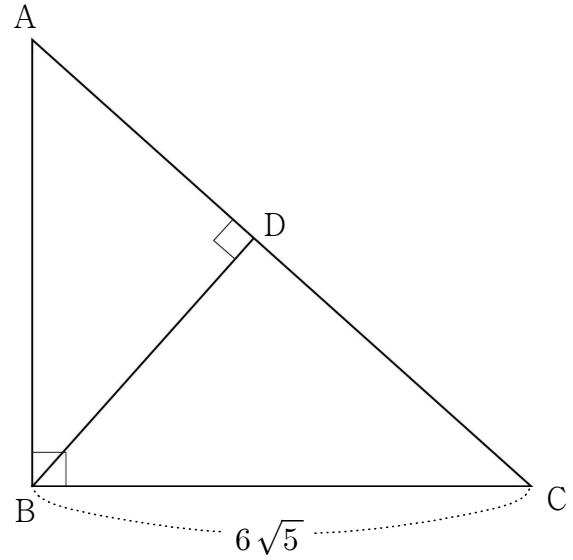
22. $a_1 = 5, a_{n+1} = a_n^5$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\log_5 a_{10}$ 은 m 자리 정수이다. 이 때, m 의 값을 구하시오. (단, $\log 2 = 0.3010$ 으로 계산한다.) [3점]

23. $(1+2x+3x^2+4x^3+\dots+11x^{10})^2$ 의 전개식에서 x^{10} 의 계수를 구하시오. [4점]

24. 다음 순서도에서 인쇄되는 S 의 값을 구하시오. [4점]



25. 그림과 같이 $\angle B = 90^\circ$ 이고 선분 BC의 길이가 $6\sqrt{5}$ 인 직각 삼각형 ABC의 꼭짓점 B에서 빗변 AC에 내린 수선의 발을 D라 하자. 세 선분 AD, CD, AB의 길이가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 선분 AC의 길이를 구하시오. [4점]



5지선다형

26. 다음 두 조건을 모두 만족시키는 실수 x, y 에 대하여 점 $P(x, y)$ 가 나타내는 도형의 길이의 최댓값은? [3점]

- (가) $x^2 + y^2 \leq 9$
- (나) 행렬 $\begin{pmatrix} m & y \\ 1 & x-3 \end{pmatrix}$ 은 역행렬이 존재하지 않는다. (단, m 은 실수이다.)

- ① 3 ② 4 ③ 5
- ④ 6 ⑤ 7

27. x, y 에 대한 연립방정식 $\begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ b-4 & 1-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 이 $x=y=0$ 이외의 해를 갖도록 하는 두 실수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 최댓값은?
[4점]

- ① $\frac{21}{4}$ ② $\frac{11}{2}$ ③ $\frac{23}{4}$
④ 6 ⑤ $\frac{25}{4}$

28. 수렴하는 무한수열만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보기 >

$$\text{ㄱ. } \left\{ \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right\} \quad \text{ㄴ. } \left\{ \frac{5^{n+1} - 3^n}{5^n + 4^n} \right\} \quad \text{ㄷ. } \left\{ \frac{\sqrt{n^2 + n} - n}{n} \right\}$$

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

29. 서로 다른 세 자연수 a, b, c 가 다음 세 조건을 모두 만족시킬 때, $a+b+c$ 의 값은? [4점]

- (가) a, b, c 는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.
(나) $b-a=n^2$ (단, n 은 자연수이다.)
(다) $\log_6 a + \log_6 b + \log_6 c = 3$

- ① 26 ② 28 ③ 30
④ 32 ⑤ 34

단답형

30. 어느 고등학교 3학년 학생 n 명을 대상으로 수학과 영어 과목에 대한 방과 후 교육활동을 실시하기 위해 희망조사를 하였다. 1차에 희망한 n 명의 학생을 대상으로 2차 희망조사를 하였더니 학생 수가 표와 같았고, 1, 2차 각 조사에서 수학과 영어 과목을 동시에 희망한 학생은 없었다.

(단위 : 명)

| 구분 | 1차 | 2차 |
|----|-----|-----|
| 수학 | a | c |
| 영어 | b | d |
| 계 | n | n |

1차 조사에서 수학을 희망한 학생 중 4%가 2차 조사 때 영어로, 영어를 희망한 학생 중 12%가 2차 조사 때 수학과로 과목을 바꾸어 희망하였다. $\frac{1}{25}A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ 일 때, 행렬 A 의 모든 성분의 합을 구하시오. [4점]

※ 확인사항

문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.