제 2 교시

수리 영역 (나형)

성명		수험번호						3				

◦ 자신이 선택한 유형('가'형/'나'형)의 문제지인지 확인하시오.
◦ 문제지에 성명과 수험번호를 정확히 써 넣으시오.
◦ 답안지에 성명과 수험번호를 써 넣고, 또 수험번호와 답을 정확히 표시하시오.
◦ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
◦ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
◦ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

1. $\log_4 \frac{16}{9} + \log_2 3$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n+3}-n)$의 값은? [2점]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

3. 이차정사각행렬 X에 대하여
$X\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, $X^{-1}\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$일 때, $X^2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$의 모든 성분의 합은?
[2점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

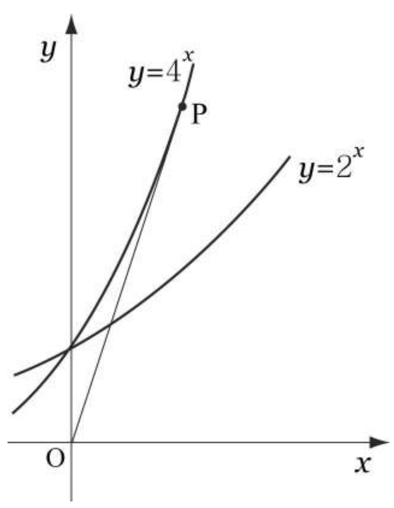
4. 자연수 n을 2진법으로 나타냈을 때, 일의 자리의 수를 a_n이라 하자. $\sum_{k=1}^{30} k a_k$의 값은? [3점]

① 225 ② 226 ③ 227 ④ 228 ⑤ 229

5. 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & m\\0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$에 대하여 이차정사각행렬 X는 $BX=AB$가 성립한다. X^{10}의 모든 성분의 합이 52일 때, m의 값은? [3점]

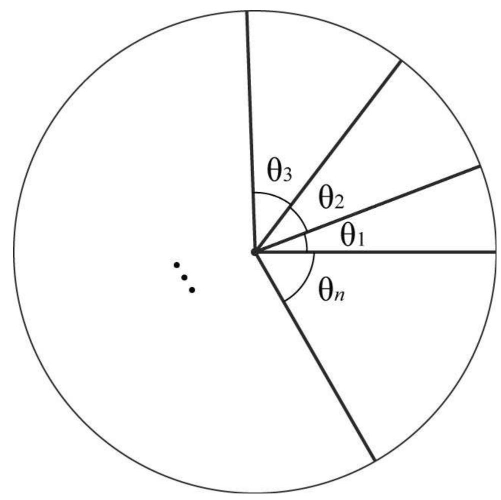
① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

6. 원점 O에서 함수 $f(x)=4^x$ 위의 한 점 P를 잇는 선분 OP가 있다. 함수 $g(x)=2^x$의 그래프가 선분 OP를 1 : 3으로 내분할 때, 점 P의 x좌표는? [3점]



① $\frac{4}{7}$ ② $\frac{5}{7}$ ③ $\frac{6}{7}$ ④ 1 ⑤ $\frac{8}{7}$

7. 넓이가 A인 원을 중심각이 θ_1, θ_2, θ_3, $\cdots$, θ_n인 n개의 부채꼴로 나누고 중심각이 $\theta_k(k=1, 2, \cdots, n)$인 부채꼴의 넓이를 A_k이라 하자. 수열 $\{\theta_n\}$이 등차수열을 이루고, $\sum_{k=1}^{n}\theta_k=2\pi$이다. $A_1+A_n=\frac{1}{5}A$일 때, n의 값은? [3점]



① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

8. $\log x$의 지표를 $f(x)$, 가수를 $g(x)$라 할 때, <보기>에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, m, n은 1보다 큰 자연수) [3점]

<보 기>

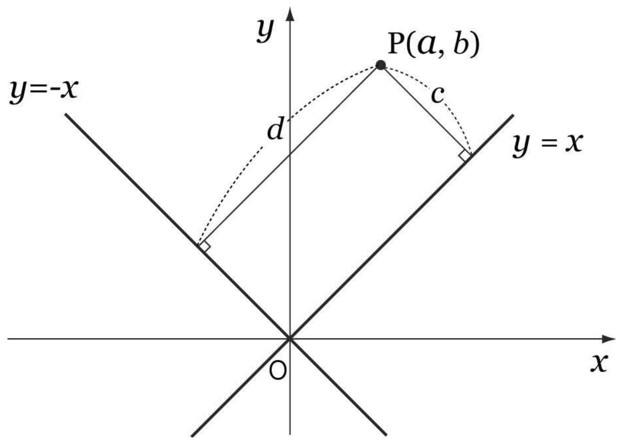
ㄱ. $f(x^{m+n})=f(x^m)+f(x^n)$

ㄴ. 모든 짝수 a에 대하여 $g(a\cdot 5^n)=0$이 되는 자연수 n이 존재한다.

ㄷ. $g(x)+g(x^2)+\cdots+g(x^n)=1$이면 $\frac{n(n+1)}{2}\log x=f(x)+f(x^2)+\cdots+f(x^n)+1$이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

9. 두 부등식 $x>0$, $y>x$의 영역에 속하는 점 $P(a, b)$에서 두 직선 $y=x$, $y=-x$에 이르는 거리를 각각 c, d라 하자. 이차정사각행렬 M이 $M\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$를 만족할 때, 행렬 $M+M^{-1}$의 모든 성분의 합은? [3점]



① 1　② $\sqrt{2}$　③ 2　④ $2\sqrt{2}$　⑤ 3

10. 세 양수 a, b, c가 $a^x=b^{2y}=c^{3z}=7$, $abc=49$를 만족할 때, $\dfrac{6}{x}+\dfrac{3}{y}+\dfrac{2}{z}$의 값은? [3점]

① 8　② 10　③ 12　④ 14　⑤ 16

11. 자연수 N에 대하여 수열 $\{a_n\}$을 $a_n=n(n+1)(n+2)\cdots(n+N-1)$이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{N+n}{N+1}a_n \cdots\cdots\cdots (\bigstar)$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

(1) $n=1$일 때,

(좌변)$=\displaystyle\sum_{k=1}^{1}a_k=a_1=\boxed{(가)}$

(우변)$=\dfrac{N+1}{N+1}a_1=a_1=\boxed{(가)}$

이므로 $(\bigstar)$이 성립한다.

(2) $n=m$일 때, $(\bigstar)$이 성립한다고 가정하면

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}a_k=\frac{N+m}{N+1}a_m$이다.

$n=m+1$일 때, $(\bigstar)$이 성립함을 보이자.

$$\sum_{k=1}^{m+1}a_k=\frac{N+m}{N+1}a_m+\boxed{(나)}$$
$$=\frac{1}{N+1}\times\frac{(m+N)!}{(m-1)!}+\boxed{(나)}$$
$$=\frac{1}{N+1}\left\{\boxed{(다)}\right\}$$
$$=\frac{N+m+1}{N+1}a_{m+1}$$

그러므로 $n=m+1$일 때도 $(\bigstar)$이 성립한다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $(\bigstar)$이 성립한다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	$N!$	$\dfrac{(m+N)!}{m!}$	$\dfrac{(m+N-1)!}{m!}$
②	$(N+1)!$	$\dfrac{(m+N-1)!}{m!}$	$\dfrac{(m+N)!}{m!}$
③	$N!$	$\dfrac{(m+N)!}{m!}$	$\dfrac{(m+N+1)!}{m!}$
④	$(N+1)!$	$\dfrac{(m+N)!}{m!}$	$\dfrac{(m+N+1)!}{m!}$
⑤	$N!$	$\dfrac{(m+N-1)!}{m!}$	$\dfrac{(m+N)!}{m!}$

12. 다음 조건을 만족하는 상자가 $n(n \geq 2)$개 있다.

[상자1] 흰 구슬 1개, 검은 구슬 $n-1$개
[상자2] 흰 구슬 2개, 검은 구슬 $n-2$개
[상자3] 흰 구슬 3개, 검은 구슬 $n-3$개
$\vdots$
[상자n] 흰 구슬 n개, 검은 구슬 0개

n개의 상자에서 임의로 한 상자를 택하여 2개의 구슬을 동시에 꺼낼 때, 모두 흰 구슬이 나올 확률을 P_n이라 하자. P_{10}의 값은? [4점]

① $\frac{19}{60}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{7}{20}$ ④ $\frac{11}{30}$ ⑤ $\frac{23}{60}$

13. 정의역이 $x<4$인 두 함수 $f(x)=2^x$, $g(x)=x^2$의 그래프가 만나는 두 점을 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $x_1<x_2$) [3점]

<보 기>

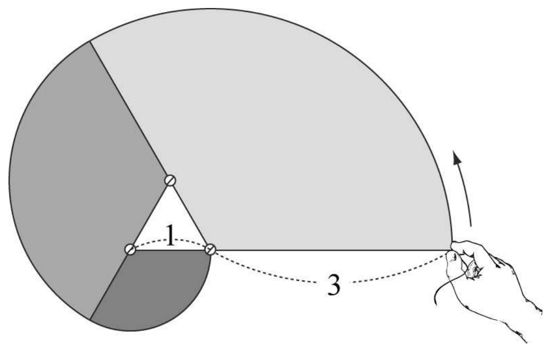
ㄱ. $x_1+x_2>0$

ㄴ. $x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 < 0$

ㄷ. $|x_1 \cdot y_2| - |x_2 \cdot y_1| > 0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. 한 변의 길이가 1인 정n각형의 꼭짓점에 못을 박아 놓는다. 실을 한 꼭짓점에 고정시켜 길이가 n이 되도록 잡고 한 변의 연장선 방향으로 팽팽하게 당긴 후 실의 끝의 이동거리가 최소가 되도록 정n각형의 둘레로 한 바퀴 돌릴 때, 실이 움직인 영역의 넓이를 S_n이라 하자. 예를 들어 S_3은 그림과 같이 정삼각형의 한 꼭짓점에 고정시킨 길이가 3이 되도록 실을 잡고 정삼각형 둘레로 한 바퀴 돌릴 때 실이 움직인 영역의 넓이를 나타낸다. 이 때, S_{20}의 값은? (단, 실과 못의 굵기는 고려하지 않는다.) [4점]



① $\frac{287}{2}\pi$ ② $\frac{289}{2}\pi$ ③ $\frac{291}{2}\pi$
④ $\frac{293}{2}\pi$ ⑤ $\frac{295}{2}\pi$

15. $2^4 \times 3^3$의 서로 다른 모든 양의 약수의 곱을 A라 할 때, A는 n자리 정수이다. $\left[\dfrac{A}{10^{n-1}}\right]$의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

16. A대학교에서는 수시 입학 전형을 위한 입학사정관을 선정하기 위하여 공모한 결과 남자 5명과 여자 3명이 응모하였다. 남녀 혼성으로 4명의 입학사정관을 선정하여 4가지 업무를 한 가지씩 4명에게 모두 배정하는 경우의 수는? [4점]

① 1080 ② 1200 ③ 1320
④ 1440 ⑤ 1560

17. 기울기가 0이 아닌 두 직선 $y = ax + b$, $y = cx + d$에 대하여 행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라고 정의할 때, <보기>에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 두 직선이 만나지 않으면 행렬 A의 역행렬이 존재한다.
ㄴ. 두 직선이 일치하면 행렬 A의 역행렬이 존재하지 않는다.
ㄷ. 두 직선이 x축 위에서 만나면 행렬 A의 역행렬이 존재하지 않는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

18. $a > 0$, $a \neq 1$에 대하여 $\left\{ \dfrac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{\sqrt[3]{a^4}}} \times \sqrt{\left(\dfrac{1}{a}\right)^{-4}} \right\}^6 = a^k$일 때, 상수 k의 값을 구하시오. [3점]

19. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$은 $b_n = a_{3n-2} + 2a_{3n-1} + a_{3n}$이다. $\sum_{k=1}^{n} a_k = A_n$, $\sum_{k=1}^{n} b_k = B_n$일 때 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{B_n}{A_n}$의 값을 구하시오. [3점]

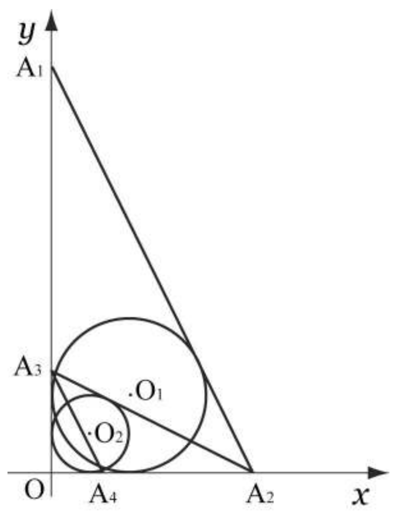
20. 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_n}=\frac{15}{14}$이다. r의 값을 구하시오. [3점]

21. 좌표평면 위의 네 점
A$(3,\ -1)$, B$(5,\ -1)$, C$(5,\ 2)$, D$(3,\ 2)$를 연결하여 만든 직사각형이 있다. 로그함수 $y=\log_a(x-1)-4$가 직사각형 ABCD와 만나기 위한 a의 최댓값을 M, 최솟값을 N이라 할 때, $\left(\frac{M}{N}\right)^{12}$의 값을 구하시오. [4점]

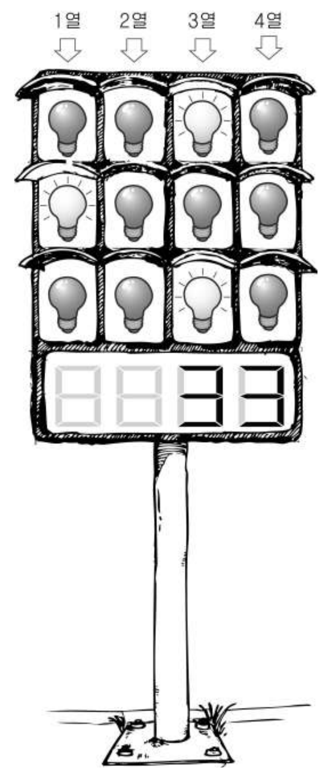
22. x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases}2^x-3^{y-1}=5\\2^{x+1}-3^y=-17\end{cases}$을 만족하는 해를 $x=a$, $y=b$라 하자. a, b의 곱 ab의 값을 구하시오. [3점]

23. 수진이가 10가지 종류의 놀이기구 중 서로 다른 놀이기구의 이용권을 8장 구입하여 3장, 3장, 2장으로 나눈 후, 수진, 현아, 원일 세 사람이 나누어 갖는 경우의 수를 x라 할 때, $\frac{x}{100}$의 값을 구하시오. [3점]

24. 그림과 같이 세 점 $O(0,\ 0)$, $A_1(0,\ 4)$, $A_2(2,\ 0)$으로 이루어진 $\triangle OA_1A_2$에 내접하는 원을 O_1이라 하자. y축 위의 점 A_3이 선분 A_1A_2의 기울기와 선분 A_2A_3의 기울기의 곱이 1이 되도록 하는 점일 때, $\triangle OA_2A_3$에 내접하는 원을 O_2라 하자. x축 위의 점 A_4가 선분 A_2A_3의 기울기와 선분 A_3A_4의 기울기의 곱이 1이 되도록 하는 점일 때, $\triangle OA_3A_4$에 내접하는 원을 O_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 생기는 $\triangle OA_nA_{n+1}$에 내접하는 원을 O_n이라 하고, O_n의 반지름의 길이를 r_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} r_n = a - 2\sqrt{b}$ (a, b는 자연수)이다. $a+b$의 값을 구하시오. [4점]



25. 그림과 같이 12개의 전구와 전광판으로 이루어진 신호기가 있다. m열의 전구가 n개 켜져 있는 경우 $n \cdot 4^{m-1}$으로 계산되고, 네 개의 열이 계산된 수의 합이 전광판에 나타난다. 예를 들어 1열에서 1개, 3열에서 2개의 전구가 켜진 경우, 전광판에 33이 나타난다. 12개의 전구 중 임의로 2개를 켤 때, 전광판에 짝수가 나타날 확률을 $\frac{q}{p}$ (p, q는 서로소)라 하자. $p+q$의 값을 구하시오. [4점]

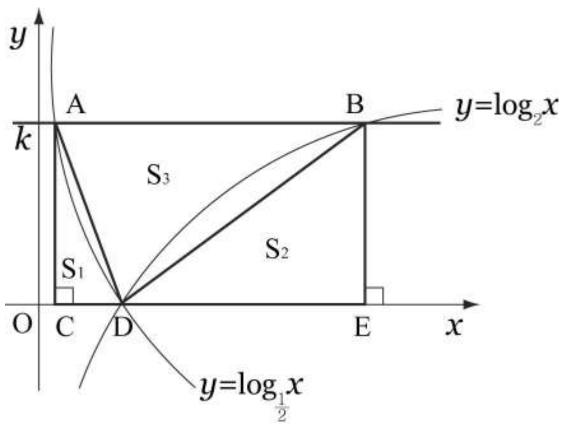


5지선다형

26. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $k \cdot 2^x \leqq 4^x - 2^x + 4$가 성립하도록 하는 실수 k값의 범위는? [3점]

① $k \leqq -1$ ② $-4 \leqq k \leqq 3$ ③ $-1 \leqq k \leqq 3$
④ $k \leqq 3$ ⑤ $k \geqq 0$

27. 그림과 같이 두 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$와 $y=\log_2 x$가 직선 $y=k$와 만나는 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, E라 하자. $y=\log_{\frac{1}{2}}x$와 $y=\log_2 x$의 교점 D에 대하여 $\triangle$ACD, $\triangle$BDE, $\triangle$ADB의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 할 때, S_1, S_2, S_3은 이 순서대로 등차수열을 이룬다. 양수 k의 값은? [4점]



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

28. 수열 $\{a_n\}$은

$$a_1=5\times6^5+5\times6^4+5\times6^3+5\times6^2+5\times6+5,$$

$$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{6}a_n & (a_n\text{이 6의 배수일 때})\\ a_n-1 & (a_n\text{이 6의 배수가 아닐 때})\end{cases}$$

이다. $a_k=1$일 때, k의 값은? [4점]

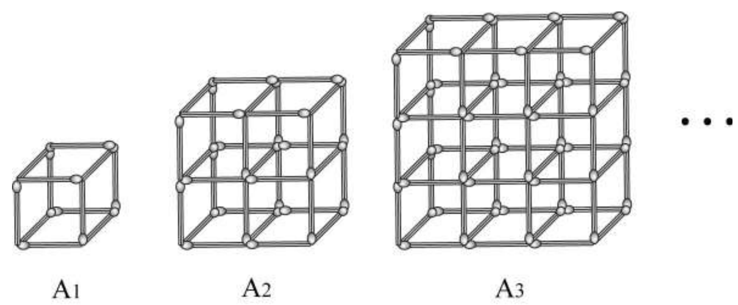
① 34 ② 35 ③ 36 ④ 37 ⑤ 38

29. 어느 고등학교의 3학년 학생들을 대상으로 주거형태를 조사한 결과 A형과 B형 두 가지였다. 주거형태가 B형인 남학생의 수는 주거형태가 A형인 여학생수의 2배이고, 주거형태가 A형인 학생 중 여학생의 비율은 40%이다. 3학년 학생 중 임의로 한명을 뽑았더니 남학생이었다. 이 학생의 주거형태가 A형일 확률은? [4점]

① $\frac{2}{7}$ ② $\frac{3}{7}$ ③ $\frac{4}{7}$ ④ $\frac{5}{7}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

단답형

30. 그림과 같이 길이가 1인 성냥개비를 이용하여 가로의 길이가 n, 세로의 길이가 1, 높이가 n인 직육면체 모양의 A_n을 계속 만들자.



직육면체 모양의 A_n을 만드는데 필요한 성냥개비의 개수와 겉넓이를 각각 a_n, b_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{n^4}$의 값을 구하시오. (단, 성냥개비의 두께는 무시한다.) [4점]

* 확인 사항

◦ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.