2010학년도 대수능 6월 모의평가 (수리영역-가형) 정답 및 해설

1.

$$2^{\log_2 4} \times 8^{\frac{2}{3}} = 2^2 \times (2^3)^{\frac{2}{3}}$$
$$= 4 \times 2^2 = 16$$

답 ④

2.

$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ 에서 $2B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$

이고 $A - 2B + 2B = A$이므로

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은 -5이다.

답 ⑤

3.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{\sqrt{x+8} - 3}$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{\{x^2(x-1) + x - 1\}(\sqrt{x+8}+3)}{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)}$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2+1)(\sqrt{x+8}+3)}{x-1}$$
$$= \lim_{x \to 1} (x^2+1)(\sqrt{x+8}+3)$$
$$= 2 \times 6 = 12$$

답 ⑤

4.

곡선 $y = x^2$ 위의 점 $(-2, 4)$에서의 접선의 방정식은

$$y - 4 = -4(x+2) \quad (\because\ y' = 2x)$$
$$\therefore\ y = -4x - 4 \ \cdots ㉠$$

또, 곡선 $y = x^3 + ax - 2$ 위의 점 $(\alpha,\ \alpha^3 + a\alpha - 2)$에서의 접선의 방정식은

$$y - \alpha^3 - a\alpha + 2 = (3\alpha^2 + a)(x - \alpha)$$
$$(\because\ y' = 3x^2 + a)$$
$$\therefore\ y = (3\alpha^2 + a)x - 2\alpha^3 - 2 \ \cdots ㉡$$

이때, 두 접선 ㉠, ㉡이 일치하려면

$3\alpha^2 + a = -4$이고 $-2\alpha^3 - 2 = -4$

이어야 한다.

$$\therefore\ \alpha = 1,\ a = -7$$

답 ②

5.

일주일 동안 운동하는 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(65, 15^2)$을 따르므로

임의추출한 25명이 일주일 동안 운동하는 시간의 평균 $\overline{X}$는 $E(\overline{X}) = 65$, $\sigma(\overline{X}) = \frac{15}{\sqrt{25}} = 3$인 정규분포 $N(65, 3^2)$을 따른다.

$$\therefore P(\overline{X} \geq 68) = P\left(Z \geq \frac{68-65}{3}\right)$$
$$= P(Z \geq 1)$$
$$= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1)$$
$$= 0.5 - 0.3413$$
$$= 0.1587$$

답 ③

6.

$f(2) = -3,\ f(4) = 6$이므로

$$\lim_{x \to -2} \frac{f(x^2) - f(4)}{f(x) - f(-2)}$$
$$= \lim_{x \to -2} \frac{\frac{f(x^2) - f(4)}{x^2 - 4} \times (x-2)}{\frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)}}$$

한편, $x^2 = t$로 놓으면 $x \to -2$일 때, $t \to 4$이므로

$$\lim_{x \to -2} \frac{f(x^2) - f(4)}{x^2 - 4}$$
$$= \lim_{t \to 4} \frac{f(t) - f(4)}{t - 4}$$
$$= f(4) \quad \text{----------------------} ㉠$$

또, 함수 $y = f(x)$의 그래프는 y축에 대칭이므로 임의의 실수 x에 대하여

$$f(-x) = f(x)$$

이므로

$$f(-x) = \lim_{t \to -x} \frac{f(x) - f(-x)}{t - (-x)}$$

이 때, $s = -t$로 놓으면 $t \to -x$일 때, $s \to x$이고 $f(-x) = f(x)$이므로

$$\lim_{t \to -x} \frac{f(x) - f(-x)}{t - (-x)}$$
$$= \lim_{s \to x} \frac{f(-s) - f(-x)}{-s - (-x)}$$
$$= -\lim_{s \to x} \frac{f(s) - f(x)}{s - x}$$
$$= -f(x)$$
$$\therefore\ f(-x) = -f(x) \quad \text{-------------} ㉡$$

따라서, ㉠과 ㉡에 의해

(주어진 식)

$$= \frac{\lim_{x \to -2} \frac{f(x^2) - f(4)}{x^2 - 4} \times \lim_{x \to -2} (x-2)}{\lim_{x \to -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)}}$$
$$= \frac{f(4) \times (-4)}{f(-2)}$$
$$= \frac{f(4) \times (-4)}{-f(2)}$$
$$= \frac{6 \times (-4)}{-(-3)}$$
$$= -8$$

답 ①

7.

$$\frac{x^2 + x + 1}{x - 2} - \frac{x + 2}{x - 1} = \frac{3}{(x-1)(x-2)} - 2$$

에서 분모의 최소공배수 $(x-1)(x-2)$를 양변에 곱하면

$$(x-1)(x^2+x+1) - (x+2)(x-2)$$
$$= 3 - 2(x-1)(x-2)$$
$$x^3 + x^2 - 6x + 4 = 0$$
$$(x-1)(x^2 + 2x - 4) = 0$$

$x = 1$은 무연근이므로 구하는 모든 실근의 합은 $x^2 + 2x - 4 = 0$에서 근과 계수의 관계에 의해 -2이다.

답 ②

8.

$n = 1, 2, 3, 4, \cdots$일 때 $\frac{n(n+1)}{2}$의 값은

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, \cdots$$

과 같이 홀수, 홀수, 짝수, 짝수가 반복되어 나타난다.

따라서 a_n을 차례로 나열하면

$$-1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, \cdots$$

이다.

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{2010} n a_n$$
$$= -1 - 2 + 3 + 4 - 5 - 6 + 7 + 8 - \cdots$$

2010학년도 대수능 6월 모의평가 (수리영역-가형) 정답 및 해설

$+2008-2009-2010$
$=4+4+\cdots+4-2009-2010$
$=4\times502-2009-2010$
$=-2011$

답 ①

9.

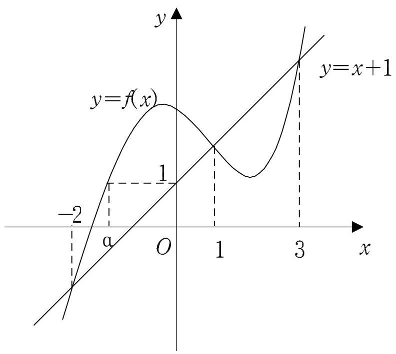
$\dfrac{x}{f(2x)-1}\geq\dfrac{1}{2}$에서 $\dfrac{2x}{f(2x)-1}\geq1$

$2x=t$로 놓으면

$\dfrac{t}{f(t)-1}\geq1$

$\dfrac{t+1-f(t)}{f(t)-1}\geq0$

$\{f(t)-1\}\{f(t)-(t+1)\}\leq0$, $f(t)\neq1$



(i) $t>0$일 때, $1<f(t)\leq t+1$
위의 그림에서
$1\leq t\leq3$
(ii) $t<0$일 때, $t+1\leq f(t)<1$
위의 그림에서
$-2\leq t<\alpha$ (단, $-2<\alpha<-1$)
(i), (ii)에서 $t=2x$의 최댓값은 3, 최솟값은 -2이므로

$M=\dfrac{3}{2}$, $m=-1$

$\therefore\ M+m=\dfrac{1}{2}$

답 ③

10.

$g(x)=\begin{cases}f(x) & (f(x)\geq0)\\ 0 & (f(x)<0)\end{cases}$

$\quad=\begin{cases}1 & (x=0)\\ 0 & (x\neq0)\end{cases}$

$h(x)=\begin{cases}0 & (f(x)\geq0)\\ f(x) & (f(x)<0)\end{cases}$

$\quad=\begin{cases}0 & (x=0)\\ f(x) & (x\neq0)\end{cases}$

ㄱ. $\lim\limits_{x\to1+0}h(x)=\lim\limits_{x\to1+0}f(x)=0$

$\lim\limits_{x\to1-0}h(x)=\lim\limits_{x\to1-0}f(x)=-1$

이므로 극한값 $\lim\limits_{x\to0}h(x)$는 존재하지 않는다. <거짓>

ㄴ. $x=0$일 때,
$(h\circ g)(0)=h(g(0))=h(1)=0$
$x\neq0$일 때,
$(h\circ g)(x)=h(g(x))=h(0)=0$
즉, 구간 $[-1,2]$에서 $(h\circ g)(x)=0$이므로 함수 $y=(h\circ g)(x)$는 연속이다. <참>

ㄷ. $x\to0$일 때, $h(x)\to0$이므로 $h(x)=t$로 놓으면

$\lim\limits_{x\to0}(g\circ h)(x)=\lim\limits_{x\to0}(g(h(x))$

$\quad=\lim\limits_{t\to0}g(t)$

$\quad=0$

한편,

$(g\circ h)(0)=g(h(0))$
$\quad=g(0)$
$\quad=1$

그러므로 $\lim\limits_{x\to0}(g\circ h)(x)\neq(g\circ h)(0)$

<거짓>

답 ①

11.

A지점에서의 수신 전력이 -25 이므로

$-25=P-20\log\left(\dfrac{4\pi fR_A}{c}\right)$ ⋯㉠

이고 또 B지점에서의 수신 전력이 -5 이므로

$-5=P-20\log\left(\dfrac{4\pi fR_B}{c}\right)$ ⋯㉡

㉠ − ㉡에서

$-20=-20\log\left(\dfrac{4\pi fR_A}{c}\right)+20\log\left(\dfrac{4\pi fR_B}{c}\right)$

$1=\log\left(\dfrac{4\pi fR_A}{c}\right)-\log\left(\dfrac{4\pi fR_B}{c}\right)$

$1=\log\left(\dfrac{\dfrac{4\pi fR_A}{c}}{\dfrac{4\pi fR_B}{c}}\right)=\log\dfrac{R_A}{R_B}$

$\therefore\ \dfrac{R_A}{R_B}=10$

답 ④

12.

R_1에서 색칠한 도형의 넓이 S_1은 선분 AP_2를 지름으로 하는 원의 넓이에서 선분 AP_1을 지름으로 하는 원의 넓이를 뺀 값이므로

$S_1=2^2\pi-1^2\pi=3\pi$

R_n과 R_{n+1}에서 R_{n+1}에 새롭게 생기는 원의 지름의 길이는 R_n에 새롭게 생기는 원의 지름의 길이의 $\dfrac{1}{3}$이고, R_{n+1}에서 새롭게 생기는 원의 개수는 2^n개이다.

따라서 R_{n+1}에서 새롭게 생기는 모든 원의 넓이의 합은 R_n에서 새롭게 생기는 모든 원의 넓이 합의 $\dfrac{1}{3^2}\times2=\dfrac{2}{9}$ 배이다.

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}S_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}3\pi\left(\dfrac{2}{9}\right)^{n-1}$

$\quad=\dfrac{3\pi}{1-\dfrac{2}{9}}=\dfrac{27}{7}\pi$

답 ②

13.

추가되는 부품 중 S의 개수는 이항분포 $B\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$을 따르므로 S의 개수가 0개, 1개, 2개일 사건을 각각 E_0, E_1, E_2라 하면

$P(E_0)={}_2C_0\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$

$P(E_1)={}_2C_1\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$

$P(E_2)={}_2C_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$

이고 7개의 부품 중 임의로 1개를 선택한 것이 T일 사건을 A라 하면 추가된 부품이 모두 S일 사건은 E_2이므로 구하는 확률은

$P(E_2\ A)=\dfrac{P(E_2\cap A)}{P(A)}$

$=\dfrac{P(E_2\cap A)}{P(E_0\cap A)+P(E_1\cap A)+P(E_2\cap A)}$

$$=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{2}{7}}{\frac{1}{4}\times\frac{4}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{7}}$$

$$=\frac{\frac{2}{28}}{\frac{12}{28}}=\frac{1}{6}$$

답 ①

14.

ㄱ. (거짓) (반례) 함수 $f(x)=-x^2$은 $x=0$에서 극댓값을 갖지만, 함수 $|f(x)|=x^2$은 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.

ㄴ. (참) $f(|x|)=\begin{cases} f(x) & (x\geq 0) \\ f(-x) & (x<0) \end{cases}$이므로

함수 $f(|x|)$의 그래프는 함수 $f(x)$의 그래프 중에서 $x\geq 0$인 부분을 그린 다음, $x<0$인 부분에는 $x\geq 0$일 때의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 다항함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극댓값을 가지면 함수 $f(|x|)$도 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

ㄷ. (참) $g(x)=-x^2|x|$라 하면

$g(x)=\begin{cases} -x^3 & (x\geq 0) \\ x^3 & (x<0) \end{cases}$이므로 $g(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

따라서 $x=0$에서 극댓값을 갖는 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 합으로 된 함수 $f(x)-x^2|x|$도 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

15.

두 다항식의 곱

$(a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1})(b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n)$

에서 x^{n-1}의 계수는

$a_0b_{n-1}+a_1b_{n-2}+\cdots+a_{n-1}b_0$ -----(*)

이다.

등식 $(1+x)^{2n-1}=(1+x)^{n-1}(1+x)^n$의 좌변에서 x^{n-1}의 계수는

${}_{2n-1}\mathrm{C}_{n-1}$이고,

(*)을 이용하여 우변에서 x^{n-1}의 계수를 구하면 $(1+x)^{n-1}$의 전개식에서 x^{k-1}의 계수와 $(1+x)^n$의 전개식에서 x^{n-k}의 계수의 곱이므로

$$\sum_{k=1}^{n}\left({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\times{}_{n}\mathrm{C}_{n-k}\right)$$

따라서,

$${}_{2n-1}\mathrm{C}_{n-1}=\sum_{k=1}^{n}\left({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\times{}_{n}\mathrm{C}_{n-k}\right)$$

이다

한편 $1\leq k\leq n$일 때,

$k\times{}_{n}\mathrm{C}_{k}=n\times{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$이므로

$$\sum_{k=1}^{n}k\left({}_{n}\mathrm{C}_{k}\right)^2$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(n\times{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\times{}_{n}\mathrm{C}_{n-k}\right)$$

$$=n\times\sum_{k=1}^{n}\left({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\times{}_{n}\mathrm{C}_{n-k}\right)$$

$$=n\times{}_{2n-1}\mathrm{C}_{n-1}$$

$$=n\times\frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!}$$

$$=\frac{n}{2}\times\frac{(2n)!}{n!n!}$$

$$=\frac{n}{2}\times{}_{2n}\mathrm{C}_{n}$$

답 ③

16.

점 $A_4(d, \log_2 d)$이고 점 A_4의 y좌표와 점 B_3의 y좌표가 같으므로

$\log_2 d=c$ 즉 $d=2^c=f(c)$

점 $A_3(c, \log_2 c)$이고 점 A_3의 y좌표와 점 B_2의 y좌표가 같으므로

$\log_2 c=b$ 즉 $c=2^b=f(b)$

점 $A_2(b, \log_2 b)$이고 점 A_2의 y좌표와 점 B_1의 y좌표가 같으므로

$\log_2 b=a$ 즉 $b=2^a=f(a)$

따라서 구하는 사각형의 넓이는

$$\frac{1}{2}(\log_2 d+\log_2 c)(d-c)$$

$$=\frac{1}{2}(c+b)\{f(c)-f(b)\}$$

$$=\frac{1}{2}\{f(b)+f(a)\}\{(f\circ f)(b)-(f\circ f)(a)\}$$

답 ①

17.

ㄱ. (거짓) (반례) $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\in S$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\in S$이면 $\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}$의 성분 중에서 홀수인 것이 존재한다.

ㄴ. (참) 집합 S의 네 원소를 모두 한 번씩 더한 행렬은 $\begin{pmatrix}3&3\\3&3\end{pmatrix}$이다.

따라서 집합 S의 모든 원소를 각각 세 번씩 더한 행렬은 $\begin{pmatrix}9&9\\9&9\end{pmatrix}$이다.

따라서 $m=12$가 존재한다.

ㄷ. (참) 주어진 조건을 만족시키려면 행렬 $A_1+A_2+\cdots+A_n$의 성분이 모두 홀수이어야 한다.

그런데 ㄴ에서 집합 S의 네 원소를 모두 한 번씩 더한 행렬은 $\begin{pmatrix}3&3\\3&3\end{pmatrix}$이므로 n의 최솟값은 4이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

18.

$f'(x)=6x^2(x-1)^2+2(2x^3+1)(x-1)$

이므로

$f'(-1)=6\times4-2\times(-2)=28$

답 28

19.

$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{x^3f(\frac{1}{x})-1}{x^3+x}$ 에서 $\frac{1}{x}=t$라 하면

$x\to+0$일 때 $t\to\infty$ 이므로

$$\lim_{x\to+0}\frac{x^3f(\frac{1}{x})-1}{x^3+x}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{t^3}f(t)-1}{\frac{1}{t^3}+\frac{1}{t}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)-t^3}{t^2+1}=5$$

따라서 $f(t)=t^3+5t^2+at+b$라 하면

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=\frac{1}{3}$ 에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$ 이므로 (분자)$\to0$이어야 한다. 즉,

$\displaystyle\lim_{x\to1}f(x)=1+5+a+b=0$

$\therefore$ $a+b=-6\cdots$㉠

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}$

2010학년도 대수능 6월 모의평가 (수리영역-가형) 정답 및 해설

$= \lim_{x\to1}\dfrac{x^3+5x^2+ax+b}{(x+2)(x-1)}$

$= \lim_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x^2+6x+a+6)}{(x+2)(x-1)}$

$= \lim_{x\to1}\dfrac{x^2+6x+a+6}{x+2}$

$= \dfrac{a+13}{3} = \dfrac{1}{3}$

$\therefore\ a=-12$

따라서 ㉠에서 $b=6$이므로

$f(x)=x^3+5x^2-12x+6$

$\therefore\ f(2)=10$

답 10

20.

선분 OP의 중점 M의 좌표는 $\mathrm{M}\left(\dfrac{t}{2},\ 1\right)$

이고, 선분 OP의 기울기는 $\dfrac{2}{t}$이므로 선분 OP의 수직이등분선의 방정식은

$$y-1=-\frac{t}{2}\left(x-\frac{t}{2}\right)$$

$$\therefore\ y=-\frac{t}{2}x+\frac{t^2}{4}+1$$

따라서 $\mathrm{B}\left(0,\ \dfrac{t^2}{4}+1\right)$이므로

$$f(t)=\frac{1}{2}\times t\times\left(2-\frac{t^2}{4}-1\right)$$

$$=-\frac{t^3}{8}+\frac{t}{2}$$

이때, $f'(t)=-\dfrac{3}{8}t^2+\dfrac{1}{2}=0$에서

$$t=\frac{2}{\sqrt{3}}\ \ (\because\ 0<t<2)$$

따라서 $f(t)$는 $t=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ 일 때 최댓값

$= \dfrac{2}{3\sqrt{3}} = \dfrac{2}{9}\sqrt{3}$을 갖는다.

$\therefore\ a+b=9+2=11$

답 11

21.

$\sqrt{4n+x}+\sqrt{4n-x}=2n \cdots$㉠에서

$\sqrt{4n+x}=2n-\sqrt{4n-x}$

양변을 제곱하면

$4n+x=4n^2-4n\sqrt{4n-x}+4n-x$

$4n\sqrt{4n-x}=4n^2-2x$

$2n\sqrt{4n-x}=2n^2-x$

다시 양변을 제곱하면

$4n^2(4n-x)=4n^4-4n^2x+x^2$

$x^2=16n^3-4n^4$

이 때, $16n^3-4n^4\ge0$이므로 $n\le4$이고

$n=1$일 때 ㉠은 무연근을 가지므로

$n=2,3,4$

따라서 모든 n의 값의 합은

$2+3+4=9$

답 9

22.

$f(3)=f(15)$에서 $f(15)-f(3)=0$이므로

$$f(15)-f(3)=\sum_{k=1}^{15}a_k-\sum_{k=1}^{3}a_k$$

$$=\sum_{k=4}^{15}a_k=0 \quad \text{------㉠}$$

한편,

$$f(n)-f(n-1)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_k$$

$$=a_n \quad (\text{단, } n\ge2)$$

이 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x=3$에서 $x=15$까지 증가한 후 감소하므로

적당한 자연수 $k(4\le k\le15)$가 존재하여 $4\le l\le k$인 임의의 자연수 l에 대하여

$$a_l>0$$

이다.

㉠에서

$a_4+a_5+\cdots+a_{15}=0$

이므로 $m\ge5$인 임의의 자연수 m에 대하여

$a_m+a_{m+1}+\cdots+a_{15}<0$

따라서 m의 최솟값은 5이다.

답 5

23.

$g(x)$를 x의 범위에 따라 구하면 다음과 같다.

(ⅰ) $|x|>1$일 때,

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}-1}{x^{2n}+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{-1}-\frac{1}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=\frac{1}{x}$$

(ⅱ) $|x|=1$일 때,

$$g(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1^{2n-1}-1}{1^{2n}+1}=0$$

(ⅲ) $|x|<1$일 때,

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}-1}{x^{2n}+1}=-1$$

$$\therefore\ g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & (|x|>1)\\ 0 & (|x|=1)\\ -1 & (|x|<1)\end{cases}$$

또, $h(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x} & (x\ne0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$

$$=\begin{cases}1 & (x>0)\\ 0 & (x=0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$$

함수 $f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$f(x)=x^2+ax+b$

로 놓으면 $f(x)g(x)$가 연속이므로 $x=1$에서 연속이어야 한다.

즉,

$\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=f(1)g(1)$이므로

$\lim_{x\to1+}f(x)g(x)$

$=\lim_{x\to1+}\left\{(x^2+ax+b)\times\dfrac{1}{x}\right\}=1+a+b$

$\lim_{x\to1-}f(x)g(x)$

$=\lim_{x\to1-}\{(x^2+ax+b)\times(-1)\}=-1-a-b$

$f(1)g(1)=(1+a+b)\times0=0$

에서

$1+a+b=0$ ------------------㉠

또, 함수 $f(x)h(x)$가 연속이므로 $x=0$에서 연속이어야 한다.

즉,

$\lim_{x\to0+}f(x)h(x)=\lim_{x\to0-}f(x)h(x)=f(0)h(0)$

이므로

$\lim_{x\to0+}f(x)h(x)=\lim_{x\to0+}\{(x^2+ax+b)\times1\}=b$

$\lim_{x\to0-}f(x)h(x)$

$=\lim_{x\to0-}\{(x^2+ax+b)\times(-1)\}=-b$

$f(0)h(0)=b\times0=0$

에서

$b=0$ ------------㉡

㉠과 ㉡에서 $a=-1$, $b=0$이므로

$f(x)=x^2-x$

따라서

$f(10)=10^2-10=90$

답 90

24.

조건 (가)에서 $f'(2)=0$

조건 (나)에서 $x=1$일 때, $|f(x)-f(1)|=0$을 만족하므로 함수 $y=|f(x)-f(1)|$의 그래프는 점 $(1, f(1))$에서 x축과 만나야 한다.

$f'(x)\neq 0$이면 $y=|f(x)-f(1)|$은 $x=1$에서 미분가능하지 않으므로 모순이다.

따라서 $f'(1)\neq 0$이다.

이때 함수 $y=f(x)-f(1)$이 $x=1$에서 극값을 가지면 $y=|f(x)-f(1)|$이 미분가능하지 않은 점은 0개 또는 2개이므로 모순이다.

따라서 $y=f(x)-f(1)$은 $x=1$에서 극값을 갖지 않는다.

따라서,

$f'(x)=k(x-1)^2(x-2)$

(단, k는 0이 아닌 상수)

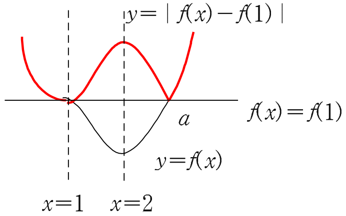
으로 놓을 수 있다.

$$\therefore \frac{f'(5)}{f'(3)}=\frac{k\cdot 4^2\cdot 3}{k\cdot 2^2\cdot 1}=12$$

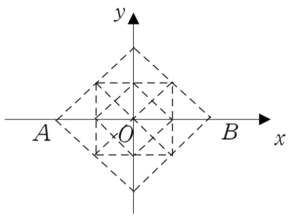
답 12

[참고]

최고차항이 양수인 경우 두 조건을 만족하는 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



25.



점 $A(-2,0)$에서 점 $B(2,0)$까지 4번만 '점프'하여 이동하는 경우에서 길이가 1만큼 이동하는 방향은 →, 길이가 $\sqrt{2}$만큼 이동하는 방향은 ↗ 또는 ↘ 이어야 한다.

즉, 점 A에서 점 B로 4번만 '점프'하여 이동하는 경우는

(i) → 4번 이용하는 경우

1 (가지)

(ii) ↗, ↘ 각각 한 번씩과 → 두 번이용하는 경우

$\frac{4!}{2!}=12$ (가지)

(iii) ↗, ↘ 각각 두 번씩 이용하는 경우

$\frac{4!}{2!2!}=6$ (가지)

따라서 (i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는 $1+12+6=19$ (가지)

답 19

미분과 적분

26.

$$\frac{\sin 50^\circ+\sin 10^\circ}{\cos 50^\circ+\cos 10^\circ}$$

$$=\frac{2\sin\frac{50^\circ+10^\circ}{2}\cos\frac{50^\circ-10^\circ}{2}}{2\cos\frac{50^\circ+10^\circ}{2}\cos\frac{50^\circ-10^\circ}{2}}$$

$$=\frac{2\sin 30^\circ\cos 20^\circ}{2\cos 30^\circ\cos 20^\circ}$$

$$=\tan 30^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 ⑤

27.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{1-\sin x}-e^{1-\tan x}}{\tan x-\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e}{e^{\tan x}}\times\frac{e^{\tan x-\sin x}-1}{\tan x-\sin x}\right)$$

이 때, $t=\tan x-\sin x$로 놓으면 $x\to 0$일 때, $\tan x-\sin x\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x-\sin x}-1}{\tan x-\sin x}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1$$

따라서,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e}{e^{\tan x}}\times\frac{e^{\tan x-\sin x}-1}{\tan x-\sin x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e}{e^{\tan x}}\times\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x-\sin x}-1}{\tan x-\sin x}$$

$$=e\times 1=e$$

답 ④

28.

점 P가 $2t(0\leq t\leq\pi)$만큼 움직일 때 점 Q는 t만큼 움직이고 그 때 동경 OP와 OQ가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 각각 $2t$, t 이므로 점 P의 좌표와 점 Q의 좌표를 구하면

$P(\cos 2t,\ \sin 2t)$, $Q(\cos t, \sin t)$

이 때, 점 P에서 y축까지의 거리와 점 Q에서 x축까지의 거리가 같으므로

$|\cos 2t|=|\sin t|$

즉 $\cos 2t=\sin t$ 또는 $\cos 2t=-\sin t$

(i) $\cos 2t=\sin t$에서

$1-2\sin^2 t=\sin t$

$(2\sin t-1)(\sin t+1)=0$

$\sin t\geq 0$이므로 $\sin t=\frac{1}{2}$

$\therefore t=\frac{\pi}{6}$ 또는 $t=\frac{5}{6}\pi$

(ii) $\cos 2t=-\sin t$에서

$1-2\sin^2 t=-\sin t$

$(2\sin t+1)(\sin t-1)=0$

$\sin t\geq 0$이므로 $\sin t=1$

$\therefore t=\frac{\pi}{2}$

(i),(ii)에서 모든 t의 값의 합은

$$\frac{\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}$$

답 ⑤

29.

ㄱ. (참) $f(x)=x^2$이면

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{f(x)}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\cdot x=1\cdot 0=0$$

ㄴ. (참) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{f(x)}=1$ 이면

$\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{f(x)}\cdot\frac{3^x-1}{x}\cdot\frac{x}{e^x-1}$

$=1\cdot\ln 3\cdot 1=\ln 3$

ㄷ. (거짓) (반례) $f(x)=\sqrt{x}$이면

$\lim_{x\to 0}f(x)=0$이지만

$\lim_{x\to 0}\frac{e^{f(x)}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$은 발산한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

30.

$f(\Theta)=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}$

$=10\tan\Theta+(\frac{10}{\cos\Theta}-10)$

$+\sqrt{10^2+10^2-2\times 10\times 10\cos\Theta}$

$=10\tan\Theta+10(\frac{1-\cos\Theta}{\cos\Theta})$

$+10\sqrt{2(1-\cos\Theta)}$

$\therefore\ \lim_{\Theta\to+0}\frac{f(\Theta)}{\Theta}$

$=\lim_{\Theta\to+0}(10\frac{\tan\Theta}{\Theta}+10\frac{1-\cos\Theta}{\Theta}\cdot\frac{1}{\cos\Theta}$

$+10\sqrt{2\frac{1-\cos\Theta}{\Theta^2}})$

$=\lim_{\Theta\to+0}\Big\{10\frac{\tan\Theta}{\Theta}$

$+10\frac{\sin^2\Theta}{\Theta(1+\cos\Theta)}\cdot\frac{1}{\cos\Theta}$

$+10\sqrt{2\frac{\sin^2\Theta}{\Theta^2(1+\cos\Theta)}}\Big\}$

$=\lim_{\Theta\to+0}\Big\{10\frac{\tan\Theta}{\Theta}$

$+10\frac{\sin\Theta}{\Theta}\cdot\sin\Theta\cdot\frac{1}{(1+\cos\Theta)\cos\Theta}$

$+10\sqrt{2(\frac{\sin\Theta}{\Theta})^2\cdot\frac{1}{1+\cos\Theta}}\Big\}$

$=10\times 1+10\times 1\times 0\times\frac{1}{2}+10\sqrt{2\times 1\times\frac{1}{2}}$

$=10+10=20$

답 20

확률과 통계

26.

자료 A의 범위는 $29-21=8$ 이고 자료 B의 평균이 35이므로

$34+35+38+36+m+n=35\times 7=210$

$\therefore\ m+n=67\cdots$㉠

이때 자료 B의 범위도 8이 되어야 하는데 34, 35, 38, 36의 범위는 4이므로 $m, n(\ m<n)$중에서 자료의 값 중 최댓값 또는 최솟값이 존재해야 한다.

(i) n이 최댓값이고 m이 최솟값이라면

$n-m=8\cdots$㉡

㉠,㉡에서 자연수 m, n의 값은 존재하지 않는다

(ii) n이 최댓값이고 34가 최솟값이라면

$n-34=8$ 에서 $n=42$

㉠에서 $m=25$ 이므로 모순이다

(iii) m이 최솟값이고 38이 최댓값이라면

$38-m=8$ 에서 $m=30$

㉠에서 $n=37$ 이므로 성립한다

(i), (ii), (iii)에 의하여 $n=37$

답 ②

27.

$a={}_{99}C_2=\frac{99\cdot 98}{2}$,

$b={}_{99}C_3=\frac{99\cdot 98\cdot 97}{3\cdot 2}$

이므로

$\frac{b}{a}=\frac{97}{3}$

답 ③

28.

1단계 치료 결과와 2단계 치료 결과는 서로 독립이고 1단계 치료와 2단계 치료에 성공할 확률이 각각 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$이므로 완치된 것으로 판단될 확률은

$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

따라서 4명의 환자중 2명의 환자가 완치된 것으로 판단될 확률은

${}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{24}{81}=\frac{8}{27}$

답 ②

29.

ㄱ. 자료 A의 범위는 $70-15=55$, 자료 B의 범위는 $105-50=55$이므로 두 자료의 범위는 같다. <참>

ㄴ. 자료 A의 자료의 크기를 N이라 하자.

N이 홀수일 때, 중앙값 40은 $\frac{N+1}{2}$번째의 자료이므로 40이하의 자료의 비율은 50%보다 크다.

N이 짝수일 때, 중앙값 40은 $\frac{N}{2}$번째의 자료와 $\frac{N}{2}+1$번째의 자료의 평균이므로 40이하의 자료의 비율은 50%이다.

그러므로 중앙값 40이하인 자료의 비율은 50%이상이다.

<참>

ㄷ. 자료 A의 크기를 N이라 하면

N이 홀수일 때, 중앙값 40은 $\frac{N+1}{2}$번째의 자료이고 평균 50이 중앙값 40보다 크므로 평균 50이상의 자료의 비율

은 50%미만이다.

또, N이 짝수일 때, 중앙값 40은 $\frac{N}{2}$번째의 자료와 $\frac{N}{2}+1$번째의 자료의 평균이고 평균 50이 중앙값 40보다 크므로 평균 50이상의 자료의 비율은 50%이하이다.

즉, 평균 50이상의 자료의 비율은 50% 이하이다.

마찬가지로 자료 B의 크기를 N이라 하면

N이 홀수일 때, 중앙값 78은 $\frac{N+1}{2}$번째의 자료이고 평균 70이 중앙값 78보다 작으므로 자료의 비율은 50%보다 크다.

또, N이 짝수일 때, 중앙값 40은 $\frac{N}{2}$번째의 자료와 $\frac{N}{2}+1$번째이 자료의 평균이고 평균 70이 중앙값 78보다 작으므로 평균 70이상인 자료의 비율은 50% 이상이다.

즉, 평균 70이상의 자료의 비율은 50% 이상이다.

그러므로 자료 B의 평균 이상인 자료의 비율이 자료 A의 평균 이상인 자료의 비율이 크거나 같다. <참>

답 ⑤

30.

	5인승	7인승	9인승
현재 탑승인원	4명	5명	6명
남은탑승 가능인원	1명	2명	3명

남은 6명을 차 3대에 나누어 태우는 방법의 수는

${}_6C_1\times{}_5C_2\times{}_3C_3=60$ (가지)

(i) A와 B를 7인승에 배정하는 경우

${}_4C_1\times{}_3C_3=4$(가지)

(ii) A와 B를 9인승에 배정하는 경우

${}_4C_1\times{}_3C_2\times{}_1C_1=12$(가지)

(i), (ii)에 의해 A와 B를 같은 차에 배정하는 경우는

$4+12=16$(가지)

따라서 구하는 확률은 $\frac{16}{60}=\frac{4}{15}$

$\therefore\ p=15,\ q=4$

$\therefore\ 10p+q=154$

답 154

이산수학

26. 주어진 도형은 꼭짓점의 개수가 10 이므로

완전그래프가 되기 위해서는

${}_{10}C_2$ 즉 45개의 변이 필요하다. 따라서

15개의 변이 주어져 있으므로 추가해야 할 변의 개수는 30이다.

답 ②

27.

첫 문자가 a 이고 a 끼리는 이웃하지 않으므로 6자리 문자열에서 두 번째 자리에 오 는 문자는 b 이다.

따라서 세 번째 자리부터 끝자리까지 문자 를 배열하는 경우의 수는 2^4 이고 이 때

a 끼리 이웃하는 경우의 수는

$(a,\ a),\ b,\ b$인 경우 3가지

$a,\ a,\ a,\ b$인 경우 4가지

$a,\ a,\ a,\ a$인 경우 1가지

로 모두 8가지이므로 조건에 맞게 만들 수 있는 문자열의 개수는 $16-8=8$ 이다.

답 ⑤

28.

꼭짓점 a 에서 꼭짓점 d 로 가는 경로 중 변의 수가 4인 경로의 개수는

먼저 꼭짓점 a 에서 꼭짓점 b 로 가는 경우

(a,b,a,b,d), (a,b,a,e,d), (a,b,c,b,d)

(a,b,c,e,d), (a,b,d,b,d), (a,b,d,e,d)

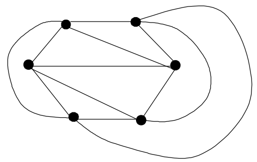
(a,b,d,c,d)

로 7개이고 꼭짓점 a 에서 꼭짓점 e 로 가는 경우도 마찬가지이므로 구하는 경로의 개수는 $7\times2=14$(개) 이다.

답 ②

29.

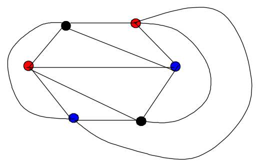
ㄱ. 주어진 도형을 변끼리 만나지 않게 연결할 수 있으므로 평면그래프이다. (참)



ㄴ. 각 꼭지점의 차수가 모두 짝수차수 이므로

오일러 회로를 갖는다. (참)

ㄷ. 다음과 같이 꼭지점을 색칠하는데 필요한 최소 색의 수는 3이다. (거짓)



따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

30. 구하는 경우의 수는 3개의 원소 중에서 12개 이하를 뽑는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore$

$${}_{3+0-1}C_0 + {}_{3+1-1}C_1 + {}_{3+2-1}C_2 + \cdots + {}_{3+12-1}C_{12}$$
$$= {}_3C_0 + {}_3C_1 + {}_4C_2 + \cdots + {}_{14}C_{12}$$
$$= {}_4C_1 + {}_4C_2 + \cdots + {}_{14}C_{12}$$
$$= {}_5C_2 + {}_5C_3 + \cdots + {}_{14}C_{12}$$
$$\vdots$$
$$= {}_{14}C_{11} + {}_{14}C_{12}$$
$$= {}_{14}C_3 + {}_{14}C_2$$
$$= \frac{14\times13\times12}{3!} + \frac{14\times13}{2!} = 455$$

답 455