수리 영역(나 형)

제 2 교시 | 성명 | 수험번호 | 3 | **1**

○ 먼저 수험생이 선택한 유형의 문제지인지 확인하시오.
○ 문제지에 성명과 수험 번호를 정확히 기입하시오.
○ 답안지에 성명, 수험 번호, 답을 표기할 때에는 반드시 '수험생이 지켜야 할 일'에 따라 표기하시오.
○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

1. $\log_5 81 \times \log_3 \sqrt[4]{25}$ 의 값은? [2점]

① 2
② 3
③ 4
④ 5
⑤ 6

2. $3^{\frac{1}{3}} \times 9^{\frac{2}{3}} \div 81^{-\frac{1}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 81
② 27
③ $3^{\frac{5}{3}}$
④ 3
⑤ $3^{\frac{1}{3}}$

3. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $(AB)^{-1}$의 모든 성분의 합은? [2점]

① 1
② 2
③ 3
④ 4
⑤ 5

4. 정수부분이 두 자리인 두 양수 a, b의 상용로그의 가수를 각각 x, y라 하자. $\log a^2 b$의 지표가 4일 때, 좌표평면에서 점(x, y)가 나타내는 영역의 넓이는? [3점]

① $\frac{1}{3}$
② $\frac{1}{2}$
③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{4}{5}$
⑤ $\frac{5}{6}$

5. 자연수 n에 대하여 $f(n)$을 $\log_4 n$의 정수부분이라 할 때, $f(1)+f(2)+f(4)+f(8)+f(16)$의 값은? [3점]

① 2
② 4
③ 6
④ 8
⑤ 10

6. 자연수 k에 대하여 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 $k+1$만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 그래프가 x축과 만나는 점의 좌표를 $(a_k, 0)$이라 하자. 이때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값은? [4점]

① $55+\frac{1}{2^9}$
② $56-\frac{1}{2^9}$
③ $65-\frac{1}{2^{10}}$
④ $65+\frac{1}{2^{10}}$
⑤ $66-\frac{1}{2^{10}}$

7. 수열 $\{a_n\}$을

$$\begin{cases} a_1=1,\ a_2=1 \\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\ (n=1,2,3,\cdots) \end{cases}$$

라고 정의할 때, 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} \quad \cdots\cdots(*)$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

(단, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2$, $\cdots$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$이다.)

<증명>

(i) $n=1$ 일 때,

(좌변)$=\begin{pmatrix} a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}=\boxed{\text{(가)}}$

(우변)$=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2=\boxed{\text{(가)}}$

이므로 $(*)$은 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$\begin{pmatrix} a_{k+2} & a_{k+1} \\ a_{k+1} & a_k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{k+1}$ 이다.

$n=k+1$ 일 때,

$$\begin{pmatrix} a_{k+3} & a_{k+2} \\ a_{k+2} & a_{k+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boxed{\text{(나)}} & a_{k+1}+a_k \\ a_{k+2} & a_{k+1} \end{pmatrix}$$

$$=\boxed{\text{(다)}}\begin{pmatrix} a_{k+2} & a_{k+1} \\ a_{k+1} & a_k \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{k+2} \text{이다.}$$

그러므로 $n=k+1$일 때에도 $(*)$이 성립한다.

따라서 (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

이 증명에서 (가)~(다)에 알맞은 것을 바르게 짝지은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$a_{k+1}+a_k$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
②	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$a_{k+2}+a_{k+1}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
③	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$a_{k+2}+a_{k+1}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
④	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$a_{k+2}+a_{k+1}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
⑤	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$a_{k+1}+a_k$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

8. 이차정사각행렬 A, B에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $ABAB=A^2B^2$이면 $AB=BA$이다.
ㄴ. A의 역행렬이 존재하지 않으면 $A^2=kA$를 만족하는 실수 k가 존재한다.
ㄷ. AB의 역행렬이 존재하지 않으면 A, B 중 적어도 하나는 역행렬이 존재하지 않는다.

① ㄱ
② ㄴ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

9. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}<a_n<0$를 만족할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$
ㄴ. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$은 발산한다.
ㄷ. $\{a_n\}$이 등비수열이면 공비 r는 $0<r<1$이다.

① ㄱ
② ㄴ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

10. 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 첫째항부터 제n항까지의 합을 각각 S_n, T_n이라고 하자. 다음은 $\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{4n-1}{3n+2}$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$의 값을 구하는 과정이다.

등차수열의 성질에 의하여
$a_n=\boxed{\text{(가)}}(a_1+a_{2n-1})=\boxed{\text{(나)}}S_{2n-1}$
$b_n=\boxed{\text{(가)}}(b_1+b_{2n-1})=\boxed{\text{(나)}}T_{2n-1}$
$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n-5}{6n-1}=\boxed{\text{(다)}}$

이 과정에서 (가)~(다)에 알맞은 것을 바르게 짝지은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2n-1}$	$\frac{4}{3}$
②	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2n-1}$	5
③	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2n+1}$	$\frac{4}{3}$
④	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2n+1}$	5
⑤	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2n-1}$	$\frac{4}{3}$

11. 무한등비수열 $\left\{\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^n\right\}$과 무한등비급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\log x)^n$이 동시에 수렴하는 x의 값의 범위로 옳은 것은? [3점]

① $\frac{1}{10}\le x\le 1$
② $\frac{1}{10}\le x<1$
③ $\frac{1}{10}<x\le 1$
④ $\frac{1}{10}<x\le 10$
⑤ $\frac{1}{10}\le x<10$

12. 두 함수 $f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$, $g(x)=a^{|x|}$에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $a>1$) [4점]

〈보 기〉

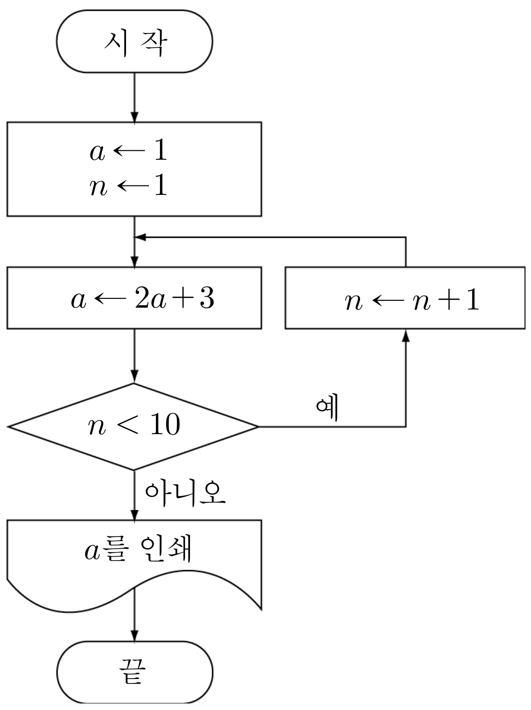
ㄱ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

ㄴ. 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)-g(x)\le 0$이다.

ㄷ. $c>1$일 때, 방정식 $f(x)=c$의 한 실근을 α, 방정식 $g(x)=c$의 한 실근을 β라 하면 $|\alpha|>|\beta|$이다.

① ㄱ
② ㄷ
③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13. 다음 순서도에서 인쇄되는 a의 값은? [4점]



① 1021
② 2045
③ 4093
④ 6057
⑤ 8189

14. 다음은 이차정사각행렬 A가 $A^3=A$를 만족할 때, $kE-A$의 역행렬이 존재하기 위한 실수 k의 조건과 그 역행렬을 구하는 과정이다. (단, O는 영행렬, E는 단위행렬이며 $A\neq O$, $A\neq \pm E$이다.)

$A^3=A$이므로

$-A=(-A)^3$

$\quad=\{(kE-A)-kE\}^3$

$\quad=(kE-A)^3-3k(kE-A)^2+3k^2(kE-A)-k^3E$

$-A=(kE-A)^3-3k(kE-A)^2+3k^2(kE-A)-k^3E \cdots ①$

이때, $kE-A$의 역행렬이 존재한다고 가정하고 그 역행렬을 B라고 하자.

①의 양변의 오른쪽에 B를 곱하면

$-AB=(kE-A)^3B-3k(kE-A)^2B+3k^2(kE-A)B-k^3B$

$\quad=A^2+kA+\boxed{(가)}$

$E=(kE-A)B=kB-AB$에서 $-AB=E-kB$이므로

$E-kB=A^2+kA+\boxed{(가)}$

$\therefore\ (k^3-k)B=A^2+kA+\boxed{(나)}$

따라서 $k\neq 0$, $k\neq \pm 1$ 일 때, $kE-A$의 역행렬 B가 존재하며

$B=\dfrac{1}{k^3-k}A^2+\dfrac{1}{k^2-1}A+\boxed{(다)}$ 이다.

이 과정에서 (가)~(다)에 알맞은 것을 바르게 짝지은 것은? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	k^2E-k^3B	$(k^2-1)E$	$\dfrac{1}{k}E$
②	k^2E-k^3B	$(-k^2-1)E$	$\dfrac{-k^2-1}{k^3-k}E$
③	k^2E-k^3B	$(-k^2-1)E$	$\dfrac{1}{k}E$
④	$-k^2E-k^3B$	$(-k^2-1)E$	$\dfrac{-k^2-1}{k^3-k}E$
⑤	$-k^2E-k^3B$	$(k^2-1)E$	$\dfrac{1}{k}E$

15. 방정식 $4^x-2^{x+2}+2=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta$의 값은? [3점]

① 1
② 2
③ 3
④ 4
⑤ 5

16. x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} k^2x+(1-2k)y=1 \\ (k+6)x+(k-8)y=1 \end{cases}$ 이 해를 갖지 않도록 하는 모든 실수 k의 값의 합은? [4점]

① 1
② 3
③ 5
④ 7
⑤ 9

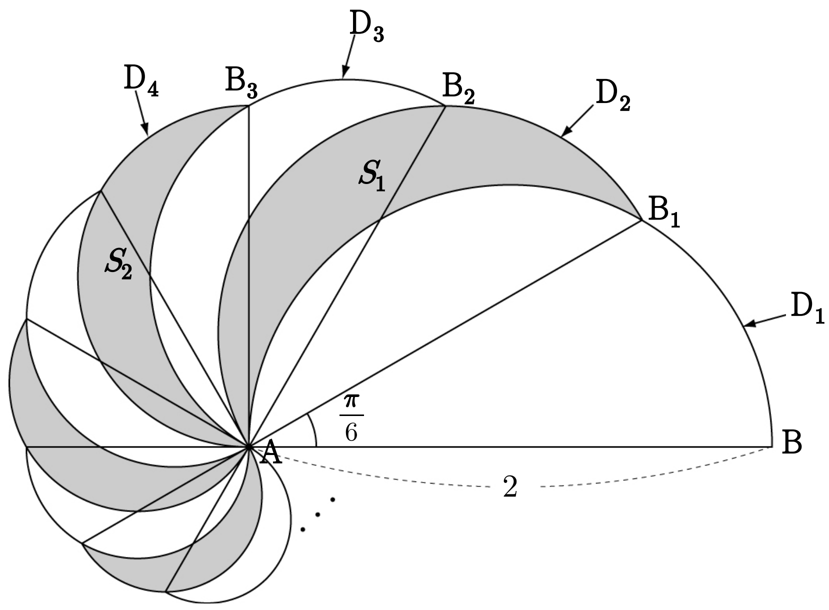
17. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=2$를 지름으로 하는 반원 D_1을 그리고, $\angle \mathrm{BAB}_1=\frac{\pi}{6}$가 되도록 반원 D_1위의 점 B_1을 잡는다.

$\overline{\mathrm{AB}_1}$을 지름으로 하는 반원 D_2를 그렸을 때, 반원 D_2에서 반원 D_1과의 공통부분을 뺀 나머지 도형의 넓이를 S_1 이라 하자.

$\angle \mathrm{B}_1\mathrm{AB}_2=\frac{\pi}{6}$가 되도록 반원 D_2위의 점 B_2를 잡아 $\overline{\mathrm{AB}_2}$를 지름으로 하는 반원 D_3를 그리고, $\angle \mathrm{B}_2\mathrm{AB}_3=\frac{\pi}{6}$ 가 되도록 반원 D_3위의 점 B_3를 잡는다.

$\overline{\mathrm{AB}_3}$를 지름으로 하는 반원 D_4를 그렸을 때, 반원 D_4에서 반원 D_3와의 공통부분을 뺀 나머지 도형의 넓이를 S_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속해서 n번째 얻은 도형의 넓이를 S_n이라 하면, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n=\frac{b}{a}\left(\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)$이다. 이때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 서로소인 자연수이다.) [4점]



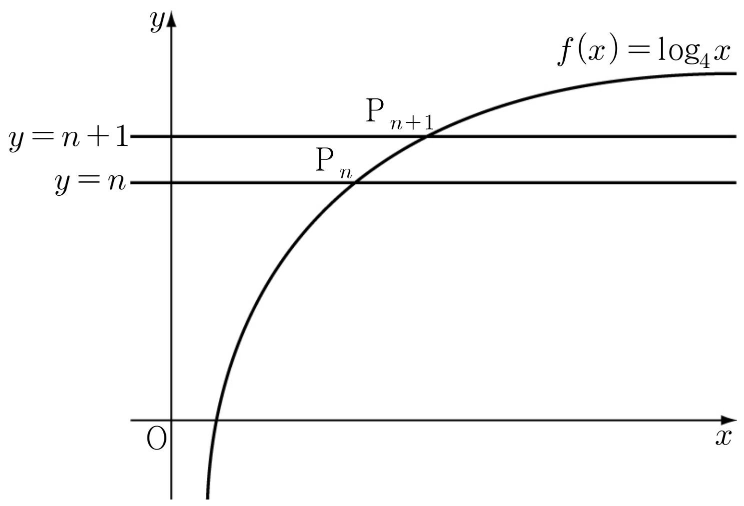
① 7
② 8
③ 9
④ 10
⑤ 11

단답형

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n-2}{a_n+5}=2$일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하시오. [3점]

19. 자연수 n에 대하여 $[\sqrt[3]{x}]=n$ 을 만족하는 정수 x의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{5}a_k$의 값을 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [3점]

20. 함수 $f(x)=\log_4 x$의 그래프와 두 직선 $y=n$, $y=n+1$이 만나는 점을 각각 P_n, P_{n+1}이라 하자. $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}^2=9\cdot 2^{2012}+1$을 만족하는 정수 n의 값을 구하시오. [3점]



21. $2^{2x}-3\cdot 2^x-1=0$ 일 때, $\frac{2^{3x}-2^{-3x}}{2^x-2^{-x}}$의 값을 구하시오. [3점]

22. 부등식 $\log_2[-2+\log_2 x]<1$를 만족하는 모든 정수 x의 값의 합을 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [3점]

23. 어느 담수화 공장에서는 바닷물을 식수로 사용하기 위해 여과장치를 가동하고 있다. 바닷물이 여과기를 한 번 통과할 때마다 포함된 염분의 양의 20%가 제거된다. 제거되지 않은 염분의 양이 처음 염분의 양의 $\frac{1}{1000}$ 이하가 되기 위해서 여과기에 통과시켜야 하는 최소 횟수를 구하시오. (단, $\log 2=0.3010$) [3점]

24. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$에 대하여

$A^{100}+A^{99}B+A^{98}B^2+\cdots+AB^{99}+B^{100}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$이다.

이때, $a+b+c+d$의 값을 구하시오. [4점]

25. 네 자리 자연수 N을 이진법의 수로 나타낼 때, 나타내어진 이진법의 수는 최소 a자릿수에서 최대 b자릿수까지 가능하다. 이때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, $\log 2=0.3010$) [4점]

5지선다형

26. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3\tan^n\frac{\pi}{3}+1}{\tan^n\frac{\pi}{3}-2}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$

② 1

③ 3

④ $-\frac{1}{2}$

⑤ $-\frac{4}{3}$

27. 행렬 A의 $(i,\ j)$성분 a_{ij}를 다음과 같이 정의하자.

$$a_{ij}=\begin{cases} i+j-1 & (i \geq j) \\ i \cdot j & (i<j) \end{cases} \quad (\text{단, } i=1,2,\ j=1,2)$$

행렬 A의 모든 성분의 합은? [3점]

① 5
② 6
③ 7
④ 8
⑤ 9

28. 함수 $f(x)=2^{-x+a}+1$에 대하여 함수 $g(x)$가 임의의 실수 x에 대하여 $g(f(x))=x$를 만족한다. $g(9)=-2$ 일 때, $g(17)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

[4점]

① -1
② -2
③ -3
④ -4
⑤ -5

29. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=1,\ a_1+a_2+a_3+\ \cdots\ +a_n=n^2a_n$일 때, a_{2009}의 값은? [4점]

① $\dfrac{1}{2009 \cdot 2010}$
② $\dfrac{1}{2008 \cdot 2010}$
③ $\dfrac{1}{2008 \cdot 2009}$
④ $\dfrac{1}{1005 \cdot 2009}$
⑤ $\dfrac{1}{1004 \cdot 2008}$

단답형

30. 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 두 조건을 모두 만족할 때, a_{30}의 값을 구하시오. [4점]

(가) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} a_{2k-1}=660$

(나) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} (-1)^k a_{2k-1}=70$

※ 확인사항

○ 문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.