2009학년도 5월 고3 경기도학업성취도평가 문제지

수리 영역(가 형)

제 2 교시

성명		수험번호						3				

- ○ 먼저 수험생이 선택한 유형의 문제지인지 확인하시오.
- ○ 문제지에 성명과 수험 번호를 정확히 기입하시오.
- ○ 답안지에 성명, 수험 번호, 선택 과목, 답을 표기할 때에는 반드시 '수험생이 지켜야 할 일'에 따라 표기하시오.
- ○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
- ○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- ○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

1. $\log_5 81 \times \log_3 \sqrt[4]{25}$ 의 값은? [2점]

① 2
② 3
③ 4
④ 5
⑤ 6

2. $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$ 의 값은? [2점]

① 1
② $\frac{1}{2}$
③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{6}$
⑤ $\frac{1}{9}$

3. 무리방정식 $\sqrt{2x-3} = x-3$의 실근을 α, 무연근을 β라 할 때, $\alpha - \beta$의 값은? [2점]

① -8
② -4
③ 0
④ 4
⑤ 8

4. 정수부분이 두 자리인 두 양수 a, b의 상용로그의 가수를 각각 x, y라 하자. $\log a^2 b$의 지표가 4일 때, 좌표평면에서 점$(x,\ y)$가 나타내는 영역의 넓이는? [3점]

① $\frac{1}{3}$
② $\frac{1}{2}$
③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{4}{5}$
⑤ $\frac{5}{6}$

5. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}ax^3-(b-1)x^2-(a-2)x-1$이 극값을 갖지 않을 때, 좌표평면에서 점$(a,\ b)$가 나타내는 영역의 넓이는? [3점]

① π
② 2π
③ 3π
④ 4π
⑤ 5π

6. 자연수 k에 대하여 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 $k+1$만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 그래프가 x축과 만나는 점의 좌표를 $(a_k,\ 0)$이라 하자. 이때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값은? [4점]

① $55+\frac{1}{2^9}$
② $56-\frac{1}{2^9}$
③ $65-\frac{1}{2^{10}}$
④ $65+\frac{1}{2^{10}}$
⑤ $66-\frac{1}{2^{10}}$

7. 수열 $\{a_n\}$을

$$\begin{cases} a_1 = 1,\ a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \ (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

라고 정의할 때, 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} \quad \cdots\cdots (*)$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

(단, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2$, $\cdots$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$이다.)

<증명>

(i) $n = 1$ 일 때,

(좌변)$= \begin{pmatrix} a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} = \boxed{(가)}$

(우변)$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \boxed{(가)}$

이므로 $(*)$은 성립한다.

(ii) $n = k$ 일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$\begin{pmatrix} a_{k+2} & a_{k+1} \\ a_{k+1} & a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{k+1}$ 이다.

$n = k+1$ 일 때,

$$\begin{pmatrix} a_{k+3} & a_{k+2} \\ a_{k+2} & a_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{(나)} & a_{k+1} + a_k \\ a_{k+2} & a_{k+1} \end{pmatrix}$$

$$= \boxed{(다)} \begin{pmatrix} a_{k+2} & a_{k+1} \\ a_{k+1} & a_k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{k+2} \text{이다.}$$

그러므로 $n = k+1$일 때에도 $(*)$이 성립한다.

따라서 (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

이 증명에서 (가)~(다)에 알맞은 것을 바르게 짝지은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$a_{k+1} + a_k$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
②	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$a_{k+2} + a_{k+1}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
③	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$a_{k+2} + a_{k+1}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
④	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$a_{k+2} + a_{k+1}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
⑤	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$a_{k+1} + a_k$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

8. 1004, 1130, 1912등과 같이 0부터 9까지의 숫자 중 서로 다른 3개의 숫자로 이루어진 2000 미만의 네 자리 자연수의 개수는? [3점]

① 422
② 432
③ 442
④ 452
⑤ 462

9. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} < a_n < 0$를 만족할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈 보 기 〉

ㄱ. $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = -\infty$

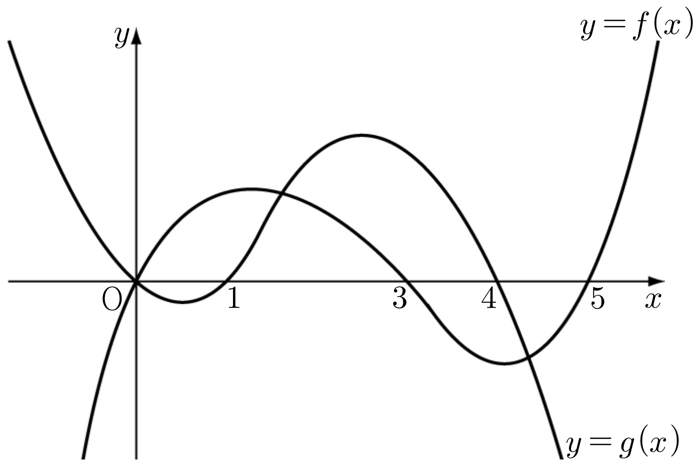
ㄴ. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

ㄷ. $\{a_n\}$이 등비수열이면 공비 r는 $0 < r < 1$이다.

① ㄱ
② ㄴ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

10. 다음은 두 삼차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프이다.

분수부등식 $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ 를 만족하는 모든 정수 x의 값의 합은? [3점]



① 9
② 10
③ 11
④ 14
⑤ 15

11. 두 사건 A, B에 대하여 $0<\mathrm{P}(A)<1$, $0<\mathrm{P}(B)<1$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $\mathrm{P}(A|B^C)=0$이면 $\mathrm{P}(A|B)\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A)$이다.
ㄴ. 사건 A와 B가 서로 독립이면 사건 A와 B는 서로 배반이다.
ㄷ. 사건 A와 B가 서로 독립이면
$\mathrm{P}(A|B)+\mathrm{P}(A|B^C)=2\mathrm{P}(A)$이다.

① ㄱ
② ㄴ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

12. 두 함수 $f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$, $g(x)=a^{|x|}$에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $a>1$) [4점]

〈 보 기 〉

ㄱ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

ㄴ. 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)-g(x)\le 0$이다.

ㄷ. $c>1$일 때, 방정식 $f(x)=c$의 한 실근을 α, 방정식 $g(x)=c$의 한 실근을 β라 하면 $|\alpha|>|\beta|$이다.

① ㄱ
② ㄷ
③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13. 어느 학교 학생들의 한 달 간 휴대폰 사용 시간을 조사하였더니 전체의 2.28%가 5시간 이하, 15.87%는 20시간 이상이었다. 휴대폰 사용시간의 분포가 정규분포를 따른다고 할 때, 휴대폰 사용시간의 평균을 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.00	0.3413
1.50	0.4332
2.00	0.4772
2.50	0.4938
3.00	0.4987

① 13
② 14
③ 15
④ 16
⑤ 17

14. 다음은 이차정사각행렬 A가 $A^3=A$를 만족할 때, $kE-A$의 역행렬이 존재하기 위한 실수 k의 조건과 그 역행렬을 구하는 과정이다. (단, O는 영행렬, E는 단위행렬이며 $A\neq O$, $A\neq\pm E$이다.)

> $A^3=A$이므로
> $-A=(-A)^3$
> $\quad=\{(kE-A)-kE\}^3$
> $\quad=(kE-A)^3-3k(kE-A)^2+3k^2(kE-A)-k^3E$
> $-A=(kE-A)^3-3k(kE-A)^2+3k^2(kE-A)-k^3E\cdots$①
> 이때, $kE-A$의 역행렬이 존재한다고 가정하고 그 역행렬을 B라고 하자.
> ①의 양변의 오른쪽에 B를 곱하면
> $-AB=(kE-A)^3B-3k(kE-A)^2B+3k^2(kE-A)B-k^3B$
> $\quad=A^2+kA+$ $\boxed{(가)}$
> $E=(kE-A)B=kB-AB$에서 $-AB=E-kB$이므로
> $E-kB=A^2+kA+$ $\boxed{(가)}$
> $\therefore\ (k^3-k)B=A^2+kA+$ $\boxed{(나)}$
> 따라서 $k\neq 0$, $k\neq\pm 1$ 일 때, $kE-A$의 역행렬 B가 존재하며
> $B=\dfrac{1}{k^3-k}A^2+\dfrac{1}{k^2-1}A+$ $\boxed{(다)}$ 이다.

이 과정에서 (가)~(다)에 알맞은 것을 바르게 짝지은 것은? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	k^2E-k^3B	$(k^2-1)E$	$\dfrac{1}{k}E$
②	k^2E-k^3B	$(-k^2-1)E$	$\dfrac{-k^2-1}{k^3-k}E$
③	k^2E-k^3B	$(-k^2-1)E$	$\dfrac{1}{k}E$
④	$-k^2E-k^3B$	$(-k^2-1)E$	$\dfrac{-k^2-1}{k^3-k}E$
⑤	$-k^2E-k^3B$	$(k^2-1)E$	$\dfrac{1}{k}E$

15. 함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 모두 만족한다.

> (가) 함수 $f(x)$는 모든 실수에서 연속이다.
> (나) 모든 정수 n에 대하여 $f(2n)=1$이고 $f(2n+1)=-1$이다.

함수 $f(x)$에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

> ㄱ. $f(x)$는 역함수가 존재하지 않는다.
> ㄴ. 폐구간 $[1, 2]$에서 $f(x)$의 최댓값은 1이다.
> ㄷ. 자연수 m에 대하여 방정식 $f(x)=0$은 개구간 $(0, 2m)$에서 적어도 $2m$개의 실근을 갖는다.

① ㄱ
② ㄴ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 연속함수 $f(x)$가 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{x-1} = a$를 만족할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $a \neq -1$인 상수이다.) [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{x^3-1} = \dfrac{a}{3}$

ㄴ. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x-f(x)}{x+f(x)} = \dfrac{1-a}{1+a}$

ㄷ. 방정식 $f(x)=0$은 개구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 한 개의 실근을 갖는다.

① ㄱ
② ㄷ
③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

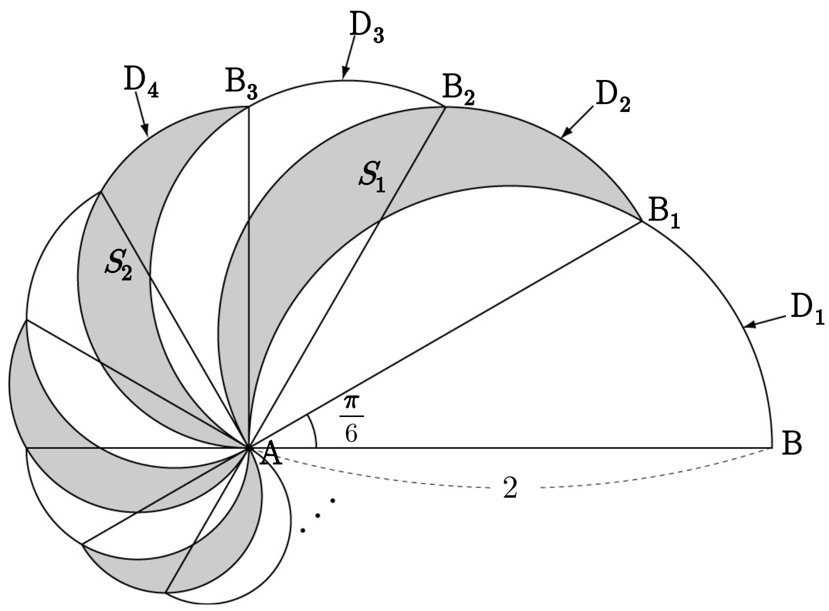
17. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}} = 2$를 지름으로 하는 반원 D_1을 그리고, $\angle \mathrm{BAB}_1 = \dfrac{\pi}{6}$가 되도록 반원 D_1위의 점 B_1을 잡는다.

$\overline{\mathrm{AB}_1}$을 지름으로 하는 반원 D_2를 그렸을 때, 반원 D_2에서 반원 D_1과의 공통부분을 뺀 나머지 도형의 넓이를 S_1 이라 하자.

$\angle \mathrm{B}_1\mathrm{AB}_2 = \dfrac{\pi}{6}$가 되도록 반원 D_2위의 점 B_2를 잡아 $\overline{\mathrm{AB}_2}$를 지름으로 하는 반원 D_3를 그리고, $\angle \mathrm{B}_2\mathrm{AB}_3 = \dfrac{\pi}{6}$ 가 되도록 반원 D_3위의 점 B_3를 잡는다.

$\overline{\mathrm{AB}_3}$를 지름으로 하는 반원 D_4를 그렸을 때, 반원 D_4에서 반원 D_3와의 공통부분을 뺀 나머지 도형의 넓이를 S_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속해서 n번째 얻은 도형의 넓이를 S_n이라 하면, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} S_n = \dfrac{b}{a}\left(\dfrac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right)$이다. 이때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 서로소인 자연수이다.) [4점]



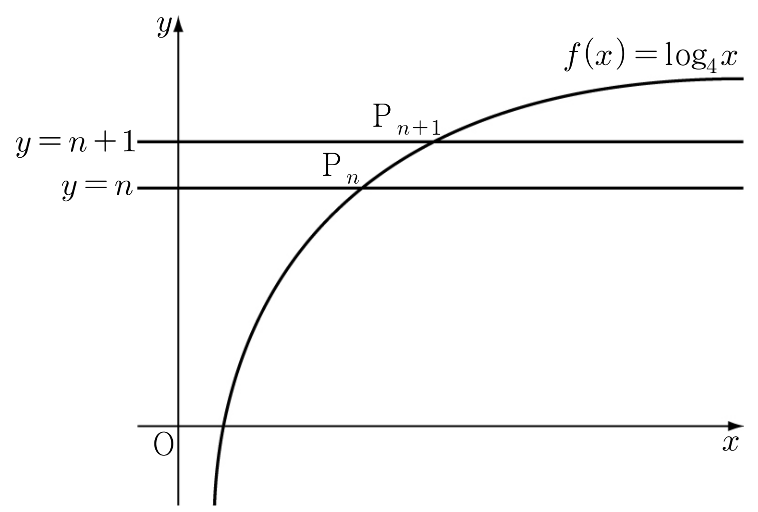
① 7
② 8
③ 9
④ 10
⑤ 11

단답형

18. 모자를 쓴 네 사람이 실내에 들어와 모자를 한 곳에 벗어놓은 후, 나갈 때는 놓여있던 모자를 임의로 하나씩 착용하였다. 네 사람 모두 자신의 모자를 착용하지 않게 될 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

19. 자연수 n에 대하여 $[\sqrt[3]{x}]=n$ 을 만족하는 정수 x의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{5} a_k$의 값을 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [3점]

20. 함수 $f(x)=\log_4 x$의 그래프와 두 직선 $y=n$, $y=n+1$이 만나는 점을 각각 P_n, P_{n+1}이라 하자. $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}^2=9\cdot 2^{2012}+1$을 만족하는 정수 n의 값을 구하시오. [3점]



21. 두 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2+3x+1 & (x \geq 1) \\ x+2 & (x<1) \end{cases}$, $g(x)=|3x-a|$에 대하여 함수 $y=(g \circ f)(x)$가 모든 실수에서 연속일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

22. 10개의 알파벳 $a,\ a,\ a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h$에서 동시에 3개를 선택하는 경우의 수를 구하시오. [4점]

23. 어느 담수화 공장에서는 바닷물을 식수로 사용하기 위해 여과장치를 가동하고 있다. 바닷물이 여과기를 한 번 통과할 때마다 포함된 염분의 양의 20%가 제거된다. 제거되지 않은 염분의 양이 처음 염분의 양의 $\frac{1}{1000}$ 이하가 되기 위해서 여과기에 통과시켜야 하는 최소 횟수를 구하시오. (단, $\log 2=0.3010$) [3점]

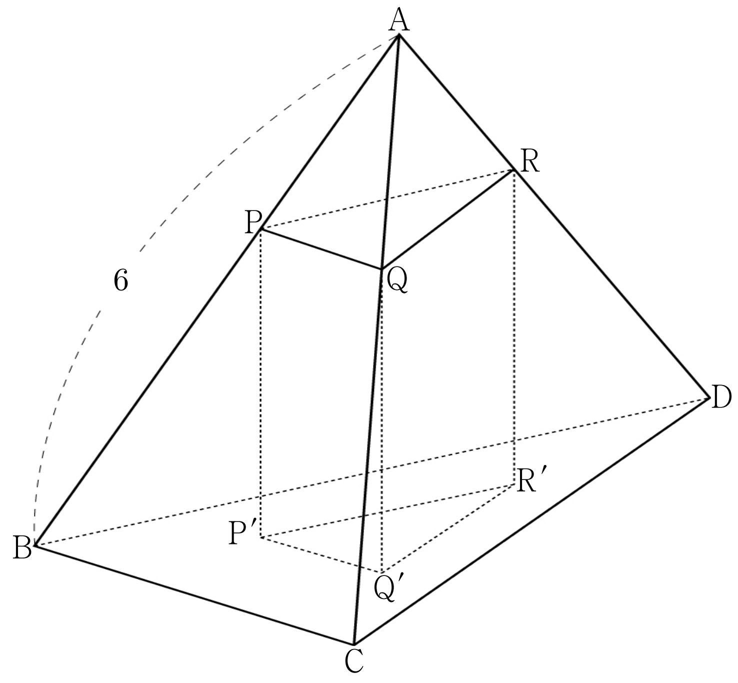
24. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$에 대하여

$A^{100}+A^{99}B+A^{98}B^2+\cdots+AB^{99}+B^{100}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$이다.

이때, $a+b+c+d$의 값을 구하시오. [4점]

25. 한 변의 길이가 6인 정사면체 A$-$BCD의 변 AB, AC, AD 위에 꼭짓점 A로부터 같은 거리에 있는 점 P, Q, R을 잡아 면 BCD에 내린 수선의 발을 각각 P$'$, Q$'$, R$'$이라 하자.

삼각기둥 PQR$-$P$'$Q$'$R$'$의 부피의 최댓값을 V라고 할 때, V^2의 값을 구하시오. [4점]



26번부터 30번까지는 선택과목 문항입니다. 선택한 과목의 문제를 풀기 바랍니다.

미분과 적분

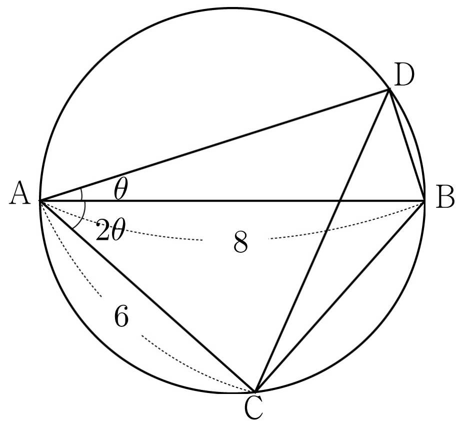
26. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{px+q}-1} = 2$가 성립하도록 하는 상수 p, q에 대하여 $p+q$ 의 값은? [3점]

① 1
② 3
③ 5
④ 7
⑤ 9

27. 방정식 $\sqrt{3}\sin x - \cos x = a$가 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 상수 a값의 범위가 $\alpha \le a < \beta$ 일 때, $\alpha^2 + \beta^2$의 값은? (단, $0 \le x \le \pi$) [3점]

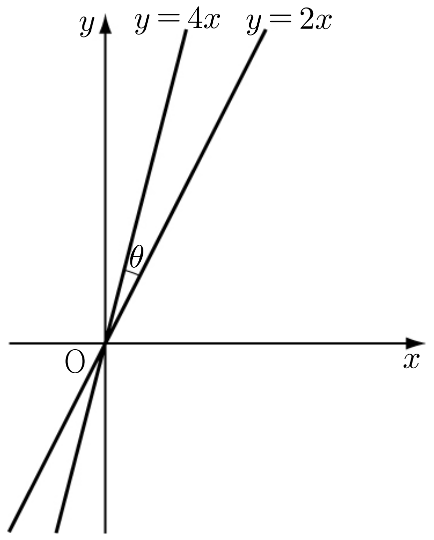
① 5
② 6
③ 7
④ 8
⑤ 9

28. 그림과 같이 지름 $\overline{\mathrm{AB}} = 8$인 원이 있다. 이 원 위의 두 점 C, D에 대하여 $\angle \mathrm{BAD} = \theta$, $\angle \mathrm{BAC} = 2\theta$이고 $\overline{\mathrm{AC}} = 6$일 때, 사각형 ACBD의 넓이는? [4점]



① $7\sqrt{7}$
② $8\sqrt{7}$
③ $9\sqrt{7}$
④ $10\sqrt{7}$
⑤ $11\sqrt{7}$

29. 다음은 두 함수 $y=2x$, $y=4x$의 그래프이다. 두 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\sin 2\theta$의 값은? [3점]

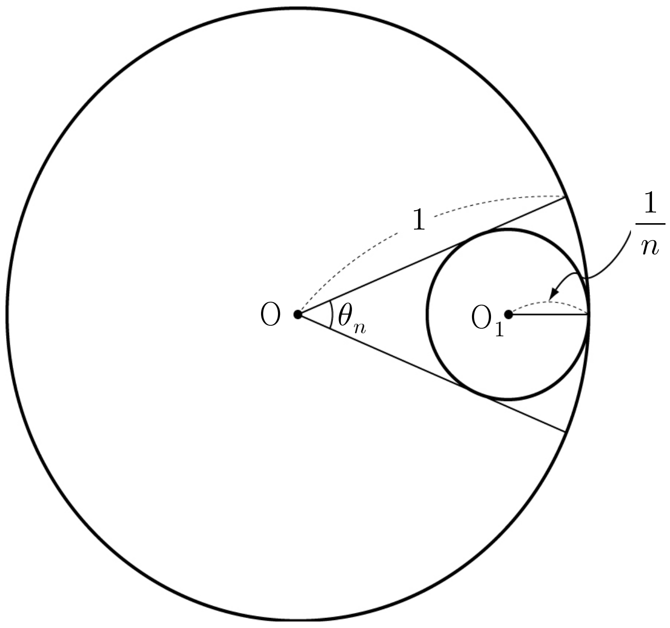


① $\frac{28}{85}$
② $\frac{6}{17}$
③ $\frac{32}{85}$
④ $\frac{34}{85}$
⑤ $\frac{36}{85}$

단답형

30. 그림과 같이 중심이 O이고, 반지름의 길이가 1인 원이 있다. 이 원에 내접하는 반지름의 길이가 $\frac{1}{n}$인 원 O_1을 그리고, 중심 O에서 원 O_1에 그은 두 접선이 이루는 예각의 크기를 θ_n이라 하자.

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{14n^2+1}{2n+1}\right)\theta_n$의 값을 구하시오. (단, $n>3$) [4점]



※ 확인사항

○ 문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

확률과 통계

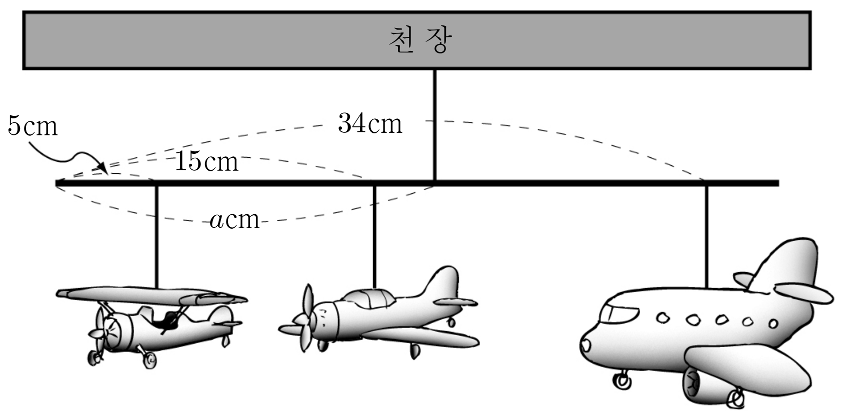
26. 다음은 어느 학급 학생 30명의 수학점수를 줄기와 잎 그림으로 나타낸 것이다.

줄기	잎
4	2 7 8
5	1 2 3 6 8
6	1 1 3 5 7 7 7 9
7	2 3 5 5 6
8	0 1 1 2 4 7
9	2 6 6

중앙값이 a, 최빈값이 b일 때, $a-b$의 값은? [3점]

① -2
② -1
③ 0
④ 1
⑤ 2

27. 그림과 같이 무게가 12g, 18g, 30g인 장난감을 길이가 40cm인 곧은 철사의 왼쪽 끝에서부터 차례대로 5cm, 15cm, 34cm 떨어진 지점에 줄을 달아 모빌을 만들었다. 철사의 왼쪽 끝으로부터 $a$cm 떨어진 지점에 줄을 달아 천장에 매달았더니 이 모빌이 균형을 이루었다. 이때, a의 값은? (단, 철사와 매단 줄의 무게는 무시한다.) [3점]



① 20.5
② 21
③ 21.5
④ 22
⑤ 22.5

28. 1부터 15까지의 자연수 중에서 서로 다른 세 수를 택하여, 택한 순서대로 나열할 때, 세 수가 나열된 순서대로 등차수열이 될 확률은? [4점]

① $\frac{7}{195}$
② $\frac{1}{13}$
③ $\frac{7}{65}$
④ $\frac{12}{65}$
⑤ $\frac{1}{5}$

29. 다음은 어느 날 하루 동안 25명의 이메일 사용시간을 조사하여 나타낸 누적상대도수의 분포표이다.

사용시간(분)	도수	누적상대도수
0이상 ~ 10미만	2	0.08
10 ~ 20	A	0.24
20 ~ 30	6	0.48
30 ~ 40	5	0.68
40 ~ 50	4	0.84
50 ~ 60	3	0.96
60 ~ 70	B	1.00
계	25	

이 표에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

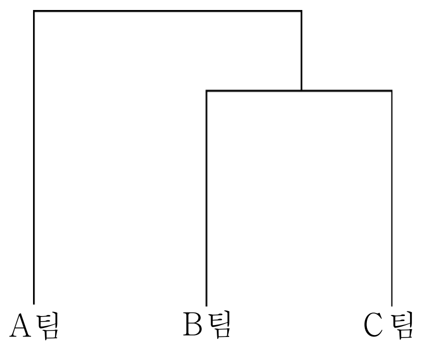
〈 보 기 〉

ㄱ. A의 값은 4이다.
ㄴ. 40분 이상 사용한 사람은 전체의 16%이다.
ㄷ. 도수가 가장 많은 계급의 상대도수는 0.24이다.

① ㄱ
② ㄴ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

30. 어떤 게임에 A, B, C 세 팀이 출전하였다. 과거의 승률에 따르면 A팀이 B팀을 이길 확률은 0.7, B팀이 C팀을 이길 확률은 0.2, C팀이 A팀을 이길 확률은 0.4이었다. 이 승률에 따라 그림과 같은 대진표로 경기를 진행할 때, A 팀이 우승할 확률은 p이다. $100p$의 값을 구하시오. (단, 비기는 경우는 없다.) [4점]



※ 확인사항

○ 문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

이산수학

26. 1000 미만의 자연수 중에서 숫자 3을 가지고 있지 않은 자연수의 개수는? [3점]

① 728
② 729
③ 730
④ 731
⑤ 732

27. 집합 T의 모든 원소의 합을 $S(T)$라 하자. 두 집합

$$A=\{a, b, c, d, e\}$$
$$B=\{2x+k \mid x \in A\}$$

에 대하여 $S(A)=32$, $S(A\cup B)=98$, $S(A\cap B)=18$일 때, 상수 k의 값은? [3점]

① 1
② 2
③ 3
④ 4
⑤ 5

28. 두 대의 자동차가 경주를 할 때, 자동차가 결승선을 통과하는 경우의 수는 동시에 통과하는 경우를 포함하여 3가지이다.

다섯 대의 자동차가 경주를 할 때, 두 대 이상 동시에 통과하는 경우를 모두 포함하여 자동차가 결승선을 통과하는 경우의 수는? (단, 모든 자동차는 결승선을 통과한다.) [4점]

① 537
② 538
③ 539
④ 540
⑤ 541

29. 한 자리 자연수인 서로 다른 세 수 x, y, z에 대하여 등식 $(x \square y)\times z=10$의 $\square$안에 $+$, $-$ 중의 하나를 넣을 때, 이 등식을 만족시키는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는? [3점]

① 15
② 16
③ 17
④ 18
⑤ 19

단답형

30. 두 집합 $X=\{1,2,3,4,5\}$이고 $Y=\{0,1\}$이다. X의 부분집합 A에 대하여 함수 $f: X\to Y$를

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x\in A\ \ ) \\ 0 & (x\in A^C)\end{cases}$$

로 정의할 때, $2\le n(A)\le 4$인 함수 f의 개수를 구하시오. [4점]

※ 확인사항

○ 문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

수리 영역(나 형)

제 2 교시

성명		수험번호						3				

- 먼저 수험생이 선택한 유형의 문제지인지 확인하시오.
- 문제지에 성명과 수험 번호를 정확히 기입하시오.
- 답안지에 성명, 수험 번호, 답을 표기할 때에는 반드시 '수험생이 지켜야 할 일'에 따라 표기하시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

1. $\log_5 81 \times \log_3 \sqrt[4]{25}$ 의 값은? [2점]

① 2
② 3
③ 4
④ 5
⑤ 6

2. $3^{\frac{1}{3}} \times 9^{\frac{2}{3}} \div 81^{-\frac{1}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 81
② 27
③ $3^{\frac{5}{3}}$
④ 3
⑤ $3^{\frac{1}{3}}$

3. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $(AB)^{-1}$의 모든 성분의 합은? [2점]

① 1
② 2
③ 3
④ 4
⑤ 5

4. 정수부분이 두 자리인 두 양수 a, b의 상용로그의 가수를 각각 x, y라 하자. $\log a^2 b$의 지표가 4일 때, 좌표평면에서 점$(x,\ y)$가 나타내는 영역의 넓이는? [3점]

① $\frac{1}{3}$
② $\frac{1}{2}$
③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{4}{5}$
⑤ $\frac{5}{6}$

5. 자연수 n에 대하여 $f(n)$을 $\log_4 n$의 정수부분이라 할 때, $f(1)+f(2)+f(4)+f(8)+f(16)$의 값은? [3점]

① 2
② 4
③ 6
④ 8
⑤ 10

6. 자연수 k에 대하여 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 $k+1$만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 그래프가 x축과 만나는 점의 좌표를 $(a_k,\ 0)$이라 하자. 이때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값은? [4점]

① $55+\frac{1}{2^9}$
② $56-\frac{1}{2^9}$
③ $65-\frac{1}{2^{10}}$
④ $65+\frac{1}{2^{10}}$
⑤ $66-\frac{1}{2^{10}}$

7. 수열 $\{a_n\}$을

$$\begin{cases} a_1=1,\ a_2=1 \\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\ (n=1,2,3,\cdots) \end{cases}$$

라고 정의할 때, 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} \quad \cdots\cdots(*)$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

(단, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2$, $\cdots$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$ 이다.)

<증명>

(ⅰ) $n=1$ 일 때,

$(\text{좌변})=\begin{pmatrix} a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}=\boxed{\text{(가)}}$

$(\text{우변})=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2=\boxed{\text{(가)}}$

이므로 $(*)$은 성립한다.

(ⅱ) $n=k$ 일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$\begin{pmatrix} a_{k+2} & a_{k+1} \\ a_{k+1} & a_k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{k+1}$ 이다.

$n=k+1$ 일 때,

$$\begin{pmatrix} a_{k+3} & a_{k+2} \\ a_{k+2} & a_{k+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boxed{\text{(나)}} & a_{k+1}+a_k \\ a_{k+2} & a_{k+1} \end{pmatrix}$$

$$=\boxed{\text{(다)}}\begin{pmatrix} a_{k+2} & a_{k+1} \\ a_{k+1} & a_k \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{k+2} \text{이다.}$$

그러므로 $n=k+1$일 때에도 $(*)$이 성립한다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

이 증명에서 (가)~(다)에 알맞은 것을 바르게 짝지은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$a_{k+1}+a_k$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
②	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$a_{k+2}+a_{k+1}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
③	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$a_{k+2}+a_{k+1}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
④	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$a_{k+2}+a_{k+1}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
⑤	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$a_{k+1}+a_k$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

8. 이차정사각행렬 A, B에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈 보 기 〉

ㄱ. $ABAB = A^2B^2$이면 $AB = BA$이다.

ㄴ. A의 역행렬이 존재하지 않으면 $A^2 = kA$를 만족하는 실수 k가 존재한다.

ㄷ. AB의 역행렬이 존재하지 않으면 A, B 중 적어도 하나는 역행렬이 존재하지 않는다.

① ㄱ
② ㄴ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

9. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} < a_n < 0$를 만족할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈 보 기 〉

ㄱ. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

ㄷ. $\{a_n\}$이 등비수열이면 공비 r는 $0 < r < 1$이다.

① ㄱ
② ㄴ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

10. 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 첫째항부터 제n항까지의 합을 각각 S_n, T_n이라고 하자. 다음은 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{4n-1}{3n+2}$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$의 값을 구하는 과정이다.

등차수열의 성질에 의하여

$$a_n = \boxed{(가)}(a_1 + a_{2n-1}) = \boxed{(나)}\, S_{2n-1}$$

$$b_n = \boxed{(가)}(b_1 + b_{2n-1}) = \boxed{(나)}\, T_{2n-1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{8n-5}{6n-1} = \boxed{(다)}$$

이 과정에서 (가)~(다)에 알맞은 것을 바르게 짝지은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2n-1}$	$\frac{4}{3}$
②	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2n-1}$	5
③	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2n+1}$	$\frac{4}{3}$
④	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2n+1}$	5
⑤	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2n-1}$	$\frac{4}{3}$

11. 무한등비수열 $\left\{\left(\frac{x+1}{2}\right)^n\right\}$과 무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(\log x)^n$이 동시에 수렴하는 x의 값의 범위로 옳은 것은? [3점]

① $\frac{1}{10} \le x \le 1$
② $\frac{1}{10} \le x < 1$
③ $\frac{1}{10} < x \le 1$
④ $\frac{1}{10} < x \le 10$
⑤ $\frac{1}{10} \le x < 10$

12. 두 함수 $f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$, $g(x)=a^{|x|}$에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $a>1$) [4점]

〈 보 기 〉

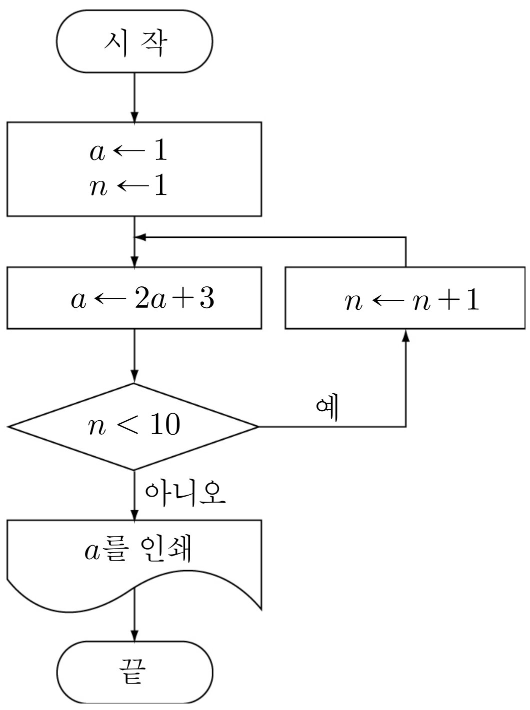
ㄱ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

ㄴ. 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)-g(x)\le 0$이다.

ㄷ. $c>1$일 때, 방정식 $f(x)=c$의 한 실근을 α, 방정식 $g(x)=c$의 한 실근을 β라 하면 $|\alpha|>|\beta|$이다.

① ㄱ
② ㄷ
③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13. 다음 순서도에서 인쇄되는 a의 값은? [4점]



① 1021
② 2045
③ 4093
④ 6057
⑤ 8189

14. 다음은 이차정사각행렬 A가 $A^3=A$를 만족할 때, $kE-A$의 역행렬이 존재하기 위한 실수 k의 조건과 그 역행렬을 구하는 과정이다. (단, O는 영행렬, E는 단위행렬이며 $A\neq O$, $A\neq \pm E$이다.)

$A^3=A$이므로

$-A=(-A)^3$

$\quad=\{(kE-A)-kE\}^3$

$\quad=(kE-A)^3-3k(kE-A)^2+3k^2(kE-A)-k^3E$

$-A=(kE-A)^3-3k(kE-A)^2+3k^2(kE-A)-k^3E \cdots$ ①

이때, $kE-A$의 역행렬이 존재한다고 가정하고 그 역행렬을 B라고 하자.

①의 양변의 오른쪽에 B를 곱하면

$-AB=(kE-A)^3B-3k(kE-A)^2B+3k^2(kE-A)B-k^3B$

$\quad=A^2+kA+\boxed{\text{(가)}}$

$E=(kE-A)B=kB-AB$에서 $-AB=E-kB$이므로

$E-kB=A^2+kA+\boxed{\text{(가)}}$

$\therefore\ (k^3-k)B=A^2+kA+\boxed{\text{(나)}}$

따라서 $k\neq 0$, $k\neq\pm1$ 일 때, $kE-A$의 역행렬 B가 존재하며

$B=\dfrac{1}{k^3-k}A^2+\dfrac{1}{k^2-1}A+\boxed{\text{(다)}}$ 이다.

이 과정에서 (가)~(다)에 알맞은 것을 바르게 짝지은 것은? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	k^2E-k^3B	$(k^2-1)E$	$\dfrac{1}{k}E$
②	k^2E-k^3B	$(-k^2-1)E$	$\dfrac{-k^2-1}{k^3-k}E$
③	k^2E-k^3B	$(-k^2-1)E$	$\dfrac{1}{k}E$
④	$-k^2E-k^3B$	$(-k^2-1)E$	$\dfrac{-k^2-1}{k^3-k}E$
⑤	$-k^2E-k^3B$	$(k^2-1)E$	$\dfrac{1}{k}E$

15. 방정식 $4^{x}-2^{x+2}+2=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta$의 값은? [3점]

① 1
② 2
③ 3
④ 4
⑤ 5

16. x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} k^2x+(1-2k)y=1 \\ (k+6)x+(k-8)y=1 \end{cases}$ 이 해를 갖지 않도록 하는 모든 실수 k의 값의 합은? [4점]

① 1
② 3
③ 5
④ 7
⑤ 9

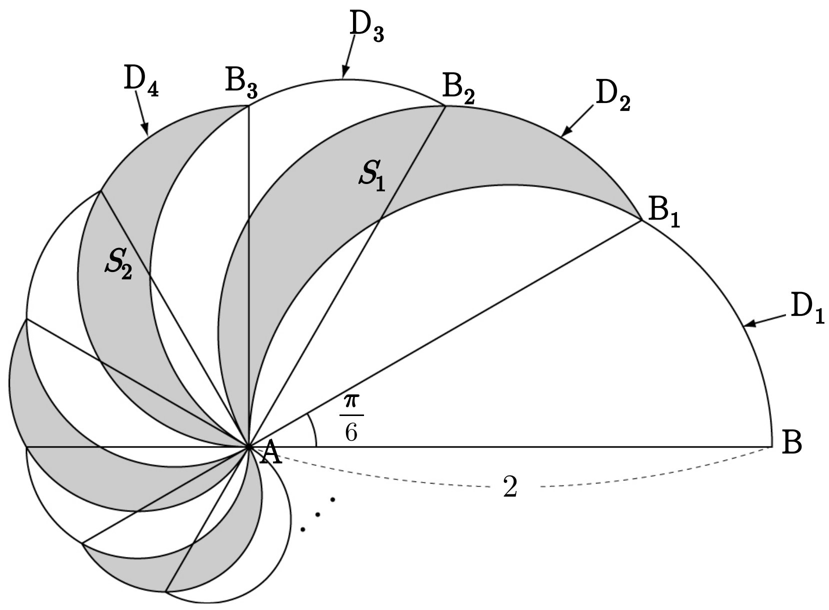
17. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=2$를 지름으로 하는 반원 D_1을 그리고, $\angle \mathrm{BAB}_1=\dfrac{\pi}{6}$가 되도록 반원 D_1위의 점 B_1을 잡는다.

$\overline{\mathrm{AB}_1}$을 지름으로 하는 반원 D_2를 그렸을 때, 반원 D_2에서 반원 D_1과의 공통부분을 뺀 나머지 도형의 넓이를 S_1 이라 하자.

$\angle \mathrm{B}_1\mathrm{AB}_2=\dfrac{\pi}{6}$가 되도록 반원 D_2위의 점 B_2를 잡아 $\overline{\mathrm{AB}_2}$를 지름으로 하는 반원 D_3를 그리고, $\angle \mathrm{B}_2\mathrm{AB}_3=\dfrac{\pi}{6}$ 가 되도록 반원 D_3위의 점 B_3를 잡는다.

$\overline{\mathrm{AB}_3}$를 지름으로 하는 반원 D_4를 그렸을 때, 반원 D_4에서 반원 D_3와의 공통부분을 뺀 나머지 도형의 넓이를 S_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속해서 n번째 얻은 도형의 넓이를 S_n이라 하면, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n=\frac{b}{a}\left(\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)$이다. 이때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 서로소인 자연수이다.) [4점]



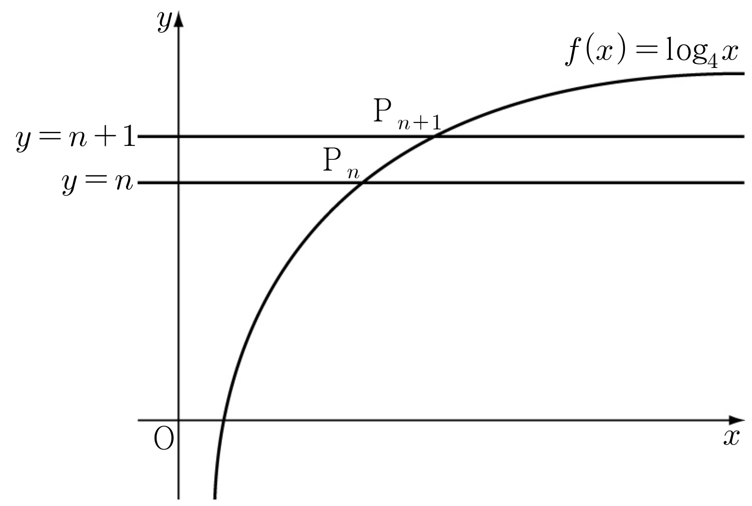
① 7
② 8
③ 9
④ 10
⑤ 11

단답형

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n-2}{a_n+5}=2$일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하시오. [3점]

19. 자연수 n에 대하여 $[\sqrt[3]{x}]=n$ 을 만족하는 정수 x의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{5}a_k$의 값을 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [3점]

20. 함수 $f(x)=\log_4 x$의 그래프와 두 직선 $y=n$, $y=n+1$이 만나는 점을 각각 P_n, P_{n+1}이라 하자. $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}^2=9\cdot 2^{2012}+1$을 만족하는 정수 n의 값을 구하시오. [3점]



21. $2^{2x}-3\cdot 2^x-1=0$ 일 때, $\frac{2^{3x}-2^{-3x}}{2^x-2^{-x}}$의 값을 구하시오. [3점]

22. 부등식 $\log_2[-2+\log_2 x]<1$를 만족하는 모든 정수 x의 값의 합을 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [3점]

23. 어느 담수화 공장에서는 바닷물을 식수로 사용하기 위해 여과장치를 가동하고 있다. 바닷물이 여과기를 한 번 통과할 때마다 포함된 염분의 양의 20%가 제거된다. 제거되지 않은 염분의 양이 처음 염분의 양의 $\frac{1}{1000}$ 이하가 되기 위해서 여과기에 통과시켜야 하는 최소 횟수를 구하시오. (단, $\log 2=0.3010$) [3점]

24. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}$에 대하여

$A^{100}+A^{99}B+A^{98}B^2+\cdots+AB^{99}+B^{100}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$이다.

이때, $a+b+c+d$의 값을 구하시오. [4점]

25. 네 자리 자연수 N을 이진법의 수로 나타낼 때, 나타내어진 이진법의 수는 최소 a자릿수에서 최대 b자릿수까지 가능하다. 이때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, $\log 2=0.3010$) [4점]

5지선다형

26. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3\tan^n\frac{\pi}{3}+1}{\tan^n\frac{\pi}{3}-2}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$

② 1

③ 3

④ $-\frac{1}{2}$

⑤ $-\frac{4}{3}$

27. 행렬 A의 $(i,\ j)$성분 a_{ij}를 다음과 같이 정의하자.

$$a_{ij}=\begin{cases} i+j-1 & (i \geq j) \\ i \cdot j & (i < j) \end{cases} \quad (\text{단, } i=1,2,\ j=1,2)$$

행렬 A의 모든 성분의 합은? [3점]

① 5
② 6
③ 7
④ 8
⑤ 9

28. 함수 $f(x)=2^{-x+a}+1$에 대하여 함수 $g(x)$가 임의의 실수 x에 대하여 $g(f(x))=x$를 만족한다. $g(9)=-2$ 일 때, $g(17)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

[4점]

① -1
② -2
③ -3
④ -4
⑤ -5

29. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=1,\ a_1+a_2+a_3+\ \cdots\ +a_n=n^2a_n$일 때, a_{2009}의 값은? [4점]

① $\dfrac{1}{2009 \cdot 2010}$
② $\dfrac{1}{2008 \cdot 2010}$
③ $\dfrac{1}{2008 \cdot 2009}$
④ $\dfrac{1}{1005 \cdot 2009}$
⑤ $\dfrac{1}{1004 \cdot 2008}$

단답형

30. 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 두 조건을 모두 만족할 때, a_{30}의 값을 구하시오. [4점]

(가) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} a_{2k-1}=660$

(나) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} (-1)^k a_{2k-1}=70$

※ 확인사항

○ 문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.