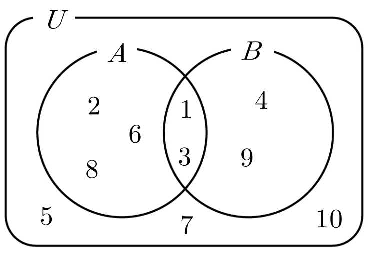
• 수리 영역 •

수리'가'형 정답

1	⑤	2	④	3	③	4	④	5	①
6	①	7	⑤	8	②	9	②	10	②
11	③	12	①	13	③	14	⑤	15	③
16	②	17	①	18	⑤	19	④	20	①
21	④	22	90	23	16	24	13	25	16
26	3	27	4	28	20	29	730	30	420

해 설

1. [출제의도] 집합의 연산 이해하기



집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 8\}$이므로 모든 원소의 합은 20이다.

2. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 거듭제곱 계산하기

$a=\log_2(\log_5 2)$이므로 $2^a=\log_5 2$

따라서 $2^{-a}=\log_2 5$

3. [출제의도] 이중근호가 포함된 식 이해하기

$x=2+\sqrt{3}$ 이므로 $\dfrac{1}{x}=2-\sqrt{3}$

$x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=4^3-12=52$

4. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$\sqrt{2}^x=\sqrt{2}+1,\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^y=3+2\sqrt{2}$ 이므로

$2^x+2^y=(3+2\sqrt{2})+(3-2\sqrt{2})=6$

5. [출제의도] 명제의 충분•필요조건 추론하기

ㄱ. $\dfrac{x}{y}\le 0$은 $xy\le 0, y\ne 0$이므로

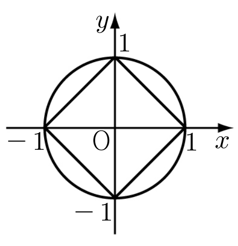
$\dfrac{x}{y}\le 0$은 $xy\le 0$이기 위한 충분조건 (거짓)

ㄴ. $x=y$이면 $\sin x=\sin y$이다.(참)

$\sin x=\sin y$이면 $x=y$이다.(거짓)

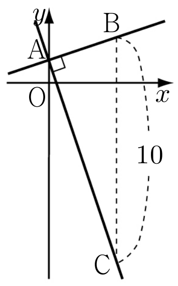
(반례) $\sin 30^\circ=\sin 150^\circ$ 이지만 $30^\circ\ne 150^\circ$

ㄷ.



$|x|+|y|\le 1$는 $x^2+y^2\le 1$이기 위한 충분조건 (거짓)

6. [출제의도] 두 직선의 기울기와 수직관계 이해하기



$\overline{\mathrm{BC}}=10$이므로 $p-q=10$ …①

직선 AB와 AC가 수직이므로 기울기의 곱은 -1

$\dfrac{p-1}{3}\times\dfrac{q-1}{3}=-1$ …②

①과 ②를 연립하여 풀면

$p=2,\ q=-8$ 또는 $p=10,\ q=0$

그런데 $q<0$이므로 $\mathrm{B}(3,\ 2),\ \mathrm{C}(3,\ -8)$

따라서 직선 AB의 기울기는 $\dfrac{1}{3}$

7. [출제의도] 복소수가 같을 조건을 이용하여 식의 값 구하기

ω는 방정식 $x^2+x+1=0$의 근이므로 $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$이다.

$f(n)=w^{2n}-w^n+1$

$f(n+1)=w^{2n+2}-w^{n+1}+1$

$f(n+2)=w^{2n+4}-w^{n+2}+1$이므로

$f(n)+f(n+1)+f(n+2)=3$

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(10)$

$=f(1)+9=-2w+9$이므로 $a=-2,\ b=9$

$\therefore ab=-18$

8. [출제의도] 로그의 정의 이해하기

$\log_a b=\dfrac{3}{2}$에서 $a^3=b^2$이고 2와 3은 서로소이므로 a는 제곱수이다.

$10\le a<100$이므로

$a=4^2,\ 5^2,\ 6^2,\ 7^2,\ 8^2,\ 9^2$이다.

따라서 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 6개이다.

9. [출제의도] 사인법칙을 이용하여 두 현의 길이의 합 유추하기

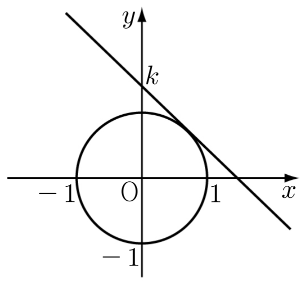
$\angle\mathrm{DBC}=\dfrac{\pi}{2}-\theta\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$이므로

$\triangle\mathrm{BCD}$에서 $\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)}=\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\cos\theta}=6$

$\therefore\overline{\mathrm{CD}}=6\cos\theta$

$\cos\theta=x,\ \sin\theta=y$라 하면 $x^2+y^2=1$이다.

$x+y=k$라 하면 원과 직선이 접할 때, k가 최대 또는 최소가 된다.



$(0,0)$에서 직선 $x+y=k$까지의 거리는

$\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}=1$이므로 $k=\pm\sqrt{2}$

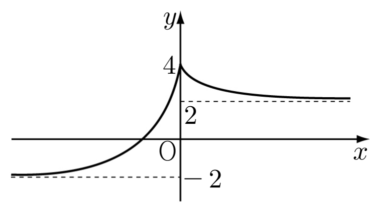
따라서 k의 최댓값은 $\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{CD}}=6(\sin\theta+\cos\theta)\le 6\sqrt{2}$

10. [출제의도] 분수함수의 그래프 이해하기

(ⅰ) $x<0$일 때 $y=\dfrac{2x+4}{-x+1}=\dfrac{-6}{x-1}-2$

(ⅱ) $x\ge 0$일 때, $y=\dfrac{2x+4}{x+1}=\dfrac{2}{x+1}+2$



$x=0$일 때 최댓값은 4

11. [출제의도] 최대공약수, 최소공배수 이해하기

두 다항식의 곱은 최대공약수와 최소공배수의 곱과 같으므로 $f(x)g(x)=(x-1)^7(x+3)$이다.

$x=2$를 대입하면, $f(2)g(2)=5$

12. [출제의도] 삼각함수의 최댓값, 최솟값 이해하기

$f(x)=1-\cos^2 x-\cos x=-\left(\cos x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{5}{4}$

이므로 $\cos x=-\dfrac{1}{2}$일 때 최댓값을 갖고

$\cos x=1$일 때 최솟값을 갖는다.

따라서 $a=\dfrac{2}{3}\pi,\ b=\dfrac{4}{3}\pi,\ c=0$

13. [출제의도] 행렬을 이용하여 문제해결하기

(ⅰ) 첫 번째 아이가 받은 구슬의 개수와 두 번째 아이가 받은 구슬의 개수가 같으므로

$x-y=1\cdots$ ①

(ⅱ) 첫 번째 아이가 10개의 구슬을 받고 더 받은 x개의 구슬은 나머지 구슬의 $\dfrac{1}{15}$이므로, 첫 번째 아이에게 주고 남은 구슬의 개수는 $14x$개이다.

(ⅲ) 두 번째 아이가 11개의 구슬을 받고 더 받은 y개의 구슬은 나머지 구슬의 $\dfrac{1}{15}$이므로, 두 번째 아이에게 주고 남은 구슬의 개수는 $14y$개이다.

따라서 (ⅱ)와 (ⅲ)에서 $14x=11+15y$ … ②

①, ②를 행렬로 나타내면 $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 14 & -15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 11\end{pmatrix}$

$\therefore a=-15$

14. [출제의도] 자료에 대한 분산 구하기

편차의 합은 0이므로 $x=-4$

분산 : $\dfrac{(-2)^2+(-4)^2+2^2+4^2}{4}=10$

15. [출제의도] 방정식에서 원의 성질 추론하기

ㄱ. $x=-1,\ y=0$일 때

$(-1)^2+0^2-2k(-1)-4k\cdot 0-2k-1=0$

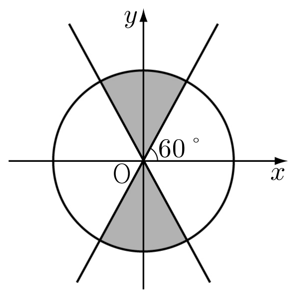
이므로 $(-1,\ 0)$을 지난다. (참)

ㄴ. 원 $(x-k)^2+(y-2k)^2=5k^2+2k+1$의 중심$(k,\ 2k)$는 직선 $y=2x$위에 있다. (참)

ㄷ. $x^2+y^2-2kx-4ky-2k-1=0$

$y=0$을 대입하면 $x^2-2kx-2k-1=0$이다. 판별식이 $4(k+1)^2 \geq 0$이므로 x축과 접하거나 서로 다른 두 점에서 만난다. (거짓)

16. [출제의도] 부등식의 영역을 이용하여 문제해결하기



도형의 넓이는 $2\times\left(\frac{1}{2}\times 24\times\frac{\pi}{3}\right)=8\pi$

17. [출제의도] 무리식의 값 유추하기

$ab=(\sqrt{2}+1)^n(\sqrt{2}-1)^n=1$

$\sqrt{x-1}=\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-ab}=\sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$

$=\frac{a-b}{2}$ $(\because a>b)$

$\sqrt{x}-\sqrt{x-1}=\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}=b=(\sqrt{2}-1)^n$

18. [출제의도] 실수의 거듭제곱근 추론하기

실수 a의 n제곱근 중 실수를 x라 하면

ㄱ. $a>0$이고 n이 짝수이면 $x=\pm\sqrt[n]{a}$ (2개) (참)

ㄴ. $a<0$일 때, n이 짝수이면 실수인 제곱근은 없고, n이 홀수이면 $x=\sqrt[n]{a}$ (1개) (참)

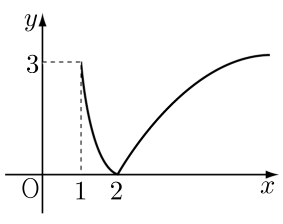
ㄷ. $a=0$일 때, $x=0$ (1개)

따라서 $f_n(a)$가 될 수 있는 값은 $0, 1, 2$ (참)

19. [출제의도] 무리함수의 그래프 이해하기

$y=3|\sqrt{x-1}-1|$

$=\begin{cases}3(\sqrt{x-1}-1) & (x\geq 2)\\ 3(1-\sqrt{x-1}) & (1\leq x<2)\end{cases}$



20. [출제의도] 행렬의 거듭제곱에 대한 성질 추론하기

ㄱ. $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$라 하면 A의 역행렬이 존재하지 않으므로 $A^2=(a+d)A$이다.

따라서 $A^n=(a+d)^{n-1}A=O$이므로

$\therefore a+d=0$ 또는 $A=O$

$A^2=O$ (참)

ㄴ. (반례) $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$일 때 $A^2=A$이지만

$A\neq E$이고, $A\neq O$이다.

ㄷ. (반례) $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$이면

$AB=O$이므로 $(AB)^n=A^nB^n=O$이지만

$BA=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}$이므로 $AB\neq BA$

21. [출제의도] 이차함수의 그래프를 이용하여 문제해결하기

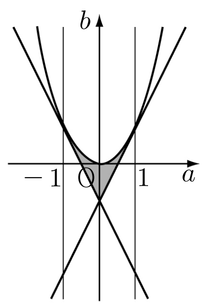
(ⅰ) $x^2-2ax+b=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 $b<a^2$

(ⅱ) $f(-1)=1+2a+b>0$이므로 $b>-2a-1$

$f(1)=1-2a+b>0$ 이므로 $b>2a-1$

(ⅲ) 이차함수 그래프의 축이 $x=a$이므로

$-1<a<1$



22. [출제의도] 행렬의 덧셈과 뺄셈 계산하기

$X=-2B-A=-2\begin{pmatrix}2 & 7\\ 1 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & 3\end{pmatrix}$

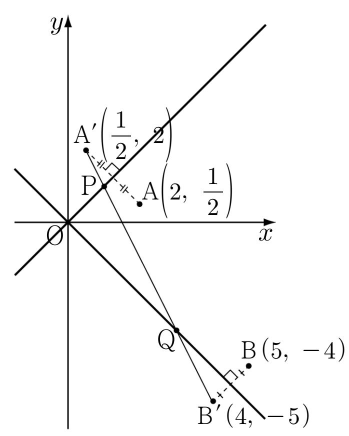
$=\begin{pmatrix}-5 & -18\\ -1 & -1\end{pmatrix}$이므로

행렬 X의 모든 성분의 곱은 90이다.

23. [출제의도] 지수법칙 이해하기

$(8◆4)◇3=(8^4)◇3=(8^4)^{\frac{1}{3}}=16$

24. [출제의도] 도형의 대칭이동 이해하기



그림과 같이 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}$이 최소가 될 때, 직선 PQ의 방정식은 직선 A′B′의 방정식과 같으므로 직선의 방정식은 $y=-2x+3$이다.

$\therefore a^2+b^2=13$

25. [출제의도] 행렬의 거듭제곱 이해하기

$A^2-A+E=O$이고, $A^3=-E$이므로 $A^6=E$

100이하의 자연수 중 6의 배수는 16개이다.

26. [출제의도] 삼각함수를 이용하여 행렬 문제 해결하기

$A=\begin{pmatrix}\tan\frac{\pi}{3} & \tan 0\\ \tan\pi & \tan\frac{2\pi}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 0\\ 0 & -\sqrt{3}\end{pmatrix}$에서

$A^2-3E=O$

$\therefore k=3$

27. [출제의도] 원과 직선의 위치관계 이해하기

$\overline{\mathrm{AB}}$를 $2:1$로 내분하는 점은 $(3, 5)$이다.

원의 반지름의 길이는 중심 $(3, 5)$에서 직선 $3x-4y-9=0$ 까지의 거리와 같으므로 반지름의 길이는 $\frac{|3\cdot 3-4\cdot 5-9|}{\sqrt{3^2+4^2}}=4$

28. [출제의도] 행렬의 곱셈을 이용하여 문제 해결하기

$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$을 만족하면

$AB=BA$가 성립한다.

$AB=\begin{pmatrix}2x^2y+1 & x^2+y^2\\ 4x+2y & 4xy^2+1\end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix}2x^2y+1 & 4x+2y\\ x^2+y^2 & 4xy^2+1\end{pmatrix}$

$x^2+y^2=4x+2y$에서 $x^2+y^2-4x-2y=0$

$(x-2)^2+(y-1)^2=5$

원의 둘레의 길이 $l=2\sqrt{5}\pi$이므로 $\left(\frac{l}{\pi}\right)^2=20$

29. [출제의도] 상용로그의 성질을 이용하여 문제해결하기

(가)에서 n은 세자리 자연수이다.

(나)에서 $[\log_3 n]=\log_3(n-1)$은 정수이므로

$n-1=3^k$ (k는 자연수)이다.

따라서 $n-1$의 최댓값은 $3^6=729$이고 $n=730$

30. [출제의도] 곱셈정리를 활용한 실생활 문제해결하기

$\overline{\mathrm{BD}}+\overline{\mathrm{CE}}=29+12=41$이므로 $x+y=41$

$\angle\mathrm{A}=\frac{\pi}{2}$이므로 $x^2+y^2=29^2$

$xy=\frac{1}{2}\{(x+y)^2-(x^2+y^2)\}=420$

수리'나'형 정답

1	⑤	2	④	3	④	4	④	5	③
6	①	7	⑤	8	⑤	9	②	10	①
11	③	12	②	13	①	14	②	15	③
16	②	17	①	18	⑤	19	②	20	③
21	④	22	11	23	39	24	13	25	12
26	16	27	4	28	6	29	730	30	420

해 설

1~2. '가'형과 같음.

3. [출제의도] 로그의 연산을 이용하여 식 변형하기

$\log 5=b$이므로 $\log 2=1-b$이다.

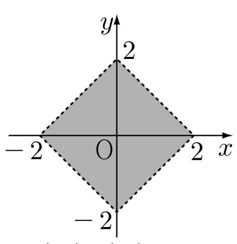
따라서 $\log\sqrt{6}=\frac{\log 2+\log 3}{2}=\frac{1+a-b}{2}$이다.

4. '가'형과 같음.

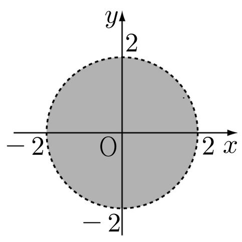
5. [출제의도] 명제의 충분•필요조건 추론하기

$x^2+y^2<4$는 $|x|+|y|<2$이기 위한 필요조건이고, $|x|<2$이고 $|y|<2$이기 위한 충분조건이다.

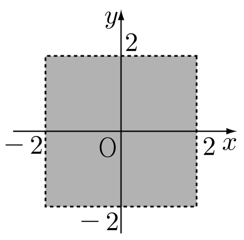
(그림 참조)



$|x|+|y|<2$



$x^2+y^2<4$



$|x|<2$이고 $|y|<2$

6~7. '가'형과 같음.

8. [출제의도] 거듭제곱근의 대소 관계 비교하기

$\sqrt{3}=\sqrt[6]{3^3}=\sqrt[6]{27}$

$\sqrt[3]{5}=\sqrt[6]{5^2}=\sqrt[6]{25}$ 이므로

$\sqrt[6]{7}<\sqrt[3]{5}<\sqrt{3}$

9. '가'형과 같음.

10. [출제의도] 지수법칙 이해하기

$2a=2^x$, $\frac{b}{9}=3^x$이므로

$12^x=(2^x)^2\cdot 3^x=(2a)^2\cdot\frac{b}{9}=\frac{4}{9}a^2b$

11. '가'형과 같음.

12. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$\sqrt{8+\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{15}+1}{\sqrt{2}}$

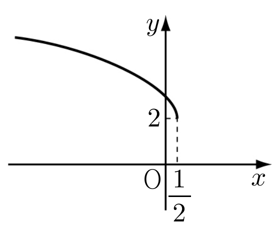
$\sqrt{8-\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{15}-1}{\sqrt{2}}$ 이므로

$\log_2(\sqrt{8+\sqrt{15}}-\sqrt{8-\sqrt{15}})=\log_2\sqrt{2}=\frac{1}{2}$

13. [출제의도] 무리함수의 그래프 유추하기

분수함수 $y=\frac{-4}{x+a}+b$ 의 점근선의 방정식이 $x=2$, $y=1$이므로 $a=-2$, $b=1$이다.

따라서 $y=\sqrt{ax+b}-ab=\sqrt{-2x+1}+2$이다.



14. [출제의도] 지수의 성질 이해하기

$9^x=2$이므로 $3^x=\sqrt{2}$이다.

$27^x=(3^x)^3=2\sqrt{2}$

$27^{-x}=(3^{-x})^3=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\therefore 27^x+27^{-x}=\frac{9\sqrt{2}}{4}$

15~18. '가'형과 같음.

19. [출제의도] 삼각형의 넓이를 이용하여 내접원의 반지름 구하기

그림과 같이 삼각형의 세 꼭짓점을 A, B, C라 하면

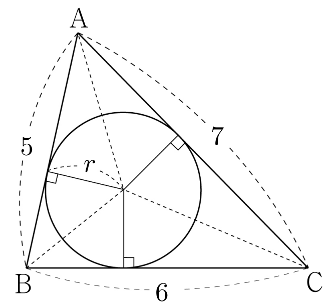
$\cos B=\frac{25+36-49}{2\cdot5\cdot6}=\frac{1}{5}$

$\sin B=\frac{2\sqrt{6}}{5}$

$\triangle$ABC 의 넓이를 S, 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$S=\frac{1}{2}\cdot5\cdot6\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}=\frac{r}{2}(5+6+7)=9r$

$\therefore r=\frac{2\sqrt{6}}{3}$



20. [출제의도] 이중근호를 이용하여 무리식의 값 구하기

$\ll x,\ y\gg=\sqrt{x+y+2\sqrt{xy}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

$\frac{1}{\ll x,\ y\gg}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=|\sqrt{x}-\sqrt{y}|$

$\frac{1}{\ll 1,\ 2\gg}+\frac{1}{\ll 2,\ 3\gg}+\cdots+\frac{1}{\ll 9,\ 10\gg}$

$=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{10}-\sqrt{9})$

$=\sqrt{10}-1$

21. '가'형과 같음.

22. [출제의도] 지수 계산하기

$\sqrt[3]{2\sqrt{2}\sqrt[4]{2^5}}=2^{\frac{1}{3}}\cdot2^{\frac{1}{6}}\cdot2^{\frac{5}{12}}=2^{\frac{11}{12}}$

$\therefore a=\frac{11}{12}$

23. [출제의도] 지수와 로그 관계 이해하기

$a=\sqrt[3]{3^{13}\times2^6}$ 이므로 $\frac{a}{4}=3^{\frac{13}{3}}$ 이다.

따라서 $9\log_3\frac{a}{4}=39$이다.

24. '가'형과 같음.

25. [출제의도] 선분의 내분과 외분을 이용하여 문제해결하기

삼각형 ABC의 무게중심을 G$(x,\ y)$라 하면

$x=\frac{1+(6-p)+(8+p)}{3}=5$

$y=\frac{5+(1+q)+(9-q)}{3}=5$

선분 AG를 3 : 1로 외분하는 점을 P(a, b)라 하면

$a=\frac{15-1}{2}=7$, $b=\frac{15-5}{2}=5$이다.

$\therefore 7+5=12$

(별해) 선분 AG를 3 : 1로 외분하는 점은 선분 BC의 중점이므로 P$(7,\ 5)$이다.

$\therefore 7+5=12$

26. [출제의도] 원과 직선의 위치관계를 이용하여 문제해결하기

(i) 그림에서 두 삼각형 AO′T′와 삼각형 AOT는 닮음이고 닮음비가 2 : 3이므로

직선 $y=mx+n$은 $(-12,\ 0)$을 지난다.

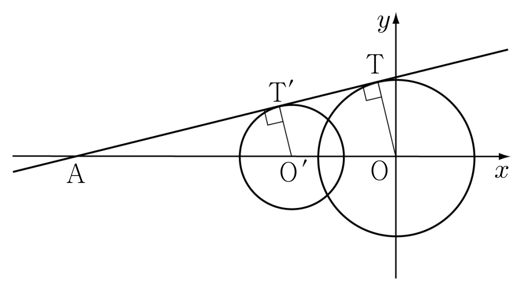
$\therefore -12m+n=0$

(ii) 점 $(0,\ 0)$으로부터 직선 $mx-y+n=0$까지의 거리는 3이므로 $\frac{|n|}{\sqrt{m^2+1}}=3$

따라서 (i)과 (ii)에 의하여

$m=\frac{\sqrt{15}}{15}$, $n=\frac{4\sqrt{15}}{5}$ 또는

$m=-\frac{\sqrt{15}}{15}$, $n=-\frac{4\sqrt{15}}{5}$



$\therefore 20mn=16$

27. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 로그값 구하기

$\log xy^3=10$ 에서 $\log x+3\log y=10$ ⋯ ①

$\log x^2y=5$에서 $2\log x+\log y=5$ ⋯ ②

①과 ②를 연립하면 $\log x=1$, $\log y=3$

$\log xy=\log x+\log y=4$

(별해) $\log xy^3=10$ ⋯ ①

$\log x^2y=5$ ⋯ ②

②$\times2$하면 $\log x^4y^2=10$ ⋯ ③

①$+$③하면 $\log x^5y^5=20$

$5\log xy=20$ $\therefore \log xy=4$

28. [출제의도] 도수분포표에서 분산 구하기

$x+y=12$

평균은 $\frac{1}{20}(16+4y)=\frac{y+4}{5}$

분산은

$\frac{1}{20}\left\{\left(\frac{y+4}{5}\right)^2(12-y)+\left(2-\frac{y+4}{5}\right)^2\times8+\left(4-\frac{y+4}{5}\right)^2y\right\}=\frac{-y^2+12y+24}{25}$

따라서 $y=6$일 때, 분산이 최대가 된다.

$\therefore x=6$

(별해) 분산은 $\frac{1}{20}(32+16y)-\left(\frac{y+4}{5}\right)^2$

$=\frac{-y^2+12y+24}{25}$

29~30. '가'형과 같음.