

수리 영역(가 형)

제 2 교시

성명	
----	--

수험번호						2			
------	--	--	--	--	--	---	--	--	--

1

- 먼저 수험생이 선택한 유형의 문제지인지 확인하십시오.
- 문제지에 성명과 수험 번호를 정확히 기입하십시오.
- 답안지에 성명, 수험 번호, 답을 표기할 때에는 반드시 '수험생이 지켜야 할 일'에 따라 표기하십시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하십시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하십시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하십시오.

1. 전체집합 $U = \{x | x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A^c \cap B^c = \{5, 7, 10\}$, $A \cap B^c = \{2, 6, 8\}$, $A^c \cap B = \{4, 9\}$ 일 때, 집합 A 의 모든 원소의 합은? [2점]

- ① 16
- ② 17
- ③ 18
- ④ 19
- ⑤ 20

2. $a = \log_2(\log_5 2)$ 일 때, 2^{-a} 의 값은? [2점]

- ① $\log_5 2$
- ② $\log_5 10$
- ③ $\log_5 20$
- ④ $\log_2 5$
- ⑤ $\log_2 10$

3. $x = \sqrt{7 + \sqrt{48}}$ 일 때, $x^3 + \frac{1}{x^3}$ 의 값은? [3점]

- ① 48
- ② 50
- ③ 52
- ④ 54
- ⑤ 56

4. $x = \log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2} + 1)$, $y = \log_{\frac{1}{2}}(3 + 2\sqrt{2})$ 일 때, $2^x + 2^y$ 의 값은? [3점]

- ① $2\sqrt{2}$
- ② 4
- ③ $4\sqrt{2}$
- ④ 6
- ⑤ $6\sqrt{2}$

5. 두 실수 x, y 에 대하여 참인 명제만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

< 보기 >

- ㄱ. $\frac{x}{y} \leq 0$ 는 $xy \leq 0$ 이기 위한 필요충분조건이다.
 ㄴ. $\sin x = \sin y$ 는 $x = y$ 이기 위한 필요조건이다.
 ㄷ. $|x| + |y| \leq 1$ 는 $x^2 + y^2 \leq 1$ 이기 위한 필요조건이다.

- ① ㄴ
 ② ㄷ
 ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ
 ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

6. 좌표평면 위의 세 점 $A(0, 1)$, $B(3, p)$, $C(3, q)$ 에 대하여 두 직선 AB 와 AC 는 서로 수직이고 $\overline{BC} = 10$ 일 때, 직선 AB 의 기울기는? (단, $q < 0$) [3점]

- ① $\frac{1}{3}$
 ② $\frac{2}{3}$
 ③ $\frac{4}{3}$
 ④ 2
 ⑤ 3

7. $x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근을 w 라 할 때, 자연수 n 에 대하여

$f(n) = w^{2n} - w^n + 1$ 로 정의하자.

$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(10) = aw + b$ 일 때, 두 실수 a, b 의 곱 ab 의 값은? [4점]

- ① -10
 ② -12
 ③ -14
 ④ -16
 ⑤ -18

8. 자연수 a, b 에 대하여 $\log_a b = \frac{3}{2}$ 을 만족하는 순서쌍 (a, b) 의 개수는?

(단, $10 \leq a < 100$) [3점]

- ① 5
 ② 6
 ③ 7
 ④ 8
 ⑤ 9

9. 다음은 반지름의 길이가 3인 원의 두 현 AC, BD가 원의 내부에서 수직으로 만날 때, $\overline{AB} + \overline{CD}$ 의 최댓값을 구하는 과정이다.

$\angle ACB = \theta$ 라 하면 $\angle DBC =$ 이다.
 사인법칙에 의하여
 $\frac{\overline{AB}}{\sin \theta} = 6$ 이고 $\overline{CD} =$ 이다.
 따라서 $\overline{AB} + \overline{CD}$ 의 최댓값은 이다.

이 과정에서 (가)~(다)에 알맞은 것을 바르게 짝지은 것은? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	$\frac{\pi}{2} - \theta$	$6 \sin \theta$	$6\sqrt{3}$
②	$\frac{\pi}{2} - \theta$	$6 \cos \theta$	$6\sqrt{2}$
③	$\frac{\pi}{2} - \theta$	$6 \cos \theta$	$6\sqrt{3}$
④	$\frac{\pi}{4} + \theta$	$6 \sin \theta$	$6\sqrt{2}$
⑤	$\frac{\pi}{4} + \theta$	$6 \cos \theta$	$6\sqrt{3}$

10. 분수함수 $y = \frac{2x+4}{|x|+1}$ 는 $x=p$ 에서 최댓값 q 를 갖는다. 이때 $p+q$ 의 값은? [4점]

- ① 2
- ② 4
- ③ 6
- ④ 8
- ⑤ 10

11. 최고차항의 계수가 1인 x 에 대한 두 다항식 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 최대공약수가 $(x-1)^3$ 이고 최소공배수가 $(x-1)^4(x+3)$ 일 때, $f(2)g(2)$ 의 값은? [3점]

- ① 1
- ② 3
- ③ 5
- ④ 7
- ⑤ 9

12. 함수 $f(x) = \sin^2 x - \cos x$ ($0 \leq x < 2\pi$)는 $x=a$ 와 $x=b$ 에서 최댓값, $x=c$ 에서 최솟값을 갖는다. 이때 $b-a+c$ 의 값은? (단, $b > a$) [4점]

- ① $\frac{2}{3}\pi$
- ② $\frac{5}{3}\pi$
- ③ $\frac{11}{6}\pi$
- ④ 2π
- ⑤ $\frac{7}{3}\pi$

13. 갑이 n 명의 아이들에게 다음과 같은 단계로 구슬을 나누어 주었더니 모든 아이가 받은 구슬의 개수는 같고 남은 구슬은 없었다고 한다.

[1단계] 첫 번째 아이에게는 구슬 10개를 주고, 남은 구슬의 $\frac{1}{15}$ 을 더 주었다.
 [2단계] 두 번째 아이에게는 남아있는 구슬 중에서 11개를 주고, 남은 구슬의 $\frac{1}{15}$ 을 더 주었다.
 [3단계] 세 번째 아이에게는 남아있는 구슬 중에서 12개를 주고, 남은 구슬의 $\frac{1}{15}$ 을 더 주었다.
 ⋮
 [n단계] n 번째 아이에게는 남아있는 구슬 중에서 $(n+9)$ 개를 주고, 남은 구슬의 $\frac{1}{15}$ 을 더 주었다.

첫 번째 아이가 받은 구슬의 개수를 $(10+x)$ 개, 두 번째 아이가 받은 구슬의 개수를 $(11+y)$ 개라 할 때, x 와 y 를 구하는 식을 행렬로 나타내면 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 14 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix}$ 이다. 이때 a 의 값은? [4점]

- ① -17
 ② $-\frac{31}{2}$
 ③ -15
 ④ $-\frac{59}{4}$
 ⑤ $-\frac{73}{5}$

14. 표는 어느 학생의 4회에 걸친 수학시험 점수에 대한 편차이다. 이 학생의 수학시험 점수의 분산은? [3점]

회	1	2	3	4
편차	-2	x	2	4

- ① 6
 ② 7
 ③ 8
 ④ 9
 ⑤ 10

15. 원 $x^2 + y^2 - 2kx - 4ky - 2k - 1 = 0$ 에 대한 설명 중 항상 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, k 는 실수이다.) [4점]

— < 보기 > —

- ㄱ. 원은 점 $(-1, 0)$ 을 지난다.
 ㄴ. 원의 중심은 직선 $y = 2x$ 위에 있다.
 ㄷ. 원은 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

- ① ㄱ
 ② ㄷ
 ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ
 ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 24 \\ |y| \geq |\sqrt{3}x| \end{cases}$ 를 만족하는 좌표평면 위의 점 (x, y) 가 나타내는 도형의 넓이는? [3점]

- ① 4π
 ② 8π
 ③ 12π
 ④ 16π
 ⑤ 20π

17. 다음은 자연수 n 에 대하여 $x = \left\{ \frac{(\sqrt{2}+1)^n + (\sqrt{2}-1)^n}{2} \right\}^2$ 일 때, $\sqrt{x} - \sqrt{x-1}$ 의 값을 구하는 과정이다.

$a = (\sqrt{2}+1)^n, b = (\sqrt{2}-1)^n$ 이라 하면
 $a > 0, b > 0$ 이므로 $\sqrt{x} = \frac{a+b}{2}$ 이다.
 $ab = \boxed{\text{(가)}}$ 이므로 $\sqrt{x-1} = \boxed{\text{(나)}}$ 이다.
 따라서 $\sqrt{x} - \sqrt{x-1} = \boxed{\text{(다)}}$ 이다.

이 과정에서 (가)~(다)에 알맞은 것을 바르게 짝지은 것은? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	1	$\frac{a-b}{2}$	$(\sqrt{2}-1)^n$
②	1	$\frac{a-b}{2}$	$\frac{3}{4}(\sqrt{2}-1)^n$
③	1	$\frac{2a-b}{4}$	$\frac{3}{4}(\sqrt{2}-1)^n$
④	2	$\frac{a-b}{2}$	$(\sqrt{2}-1)^n$
⑤	2	$\frac{2a-b}{4}$	$\frac{3}{4}(\sqrt{2}-1)^n$

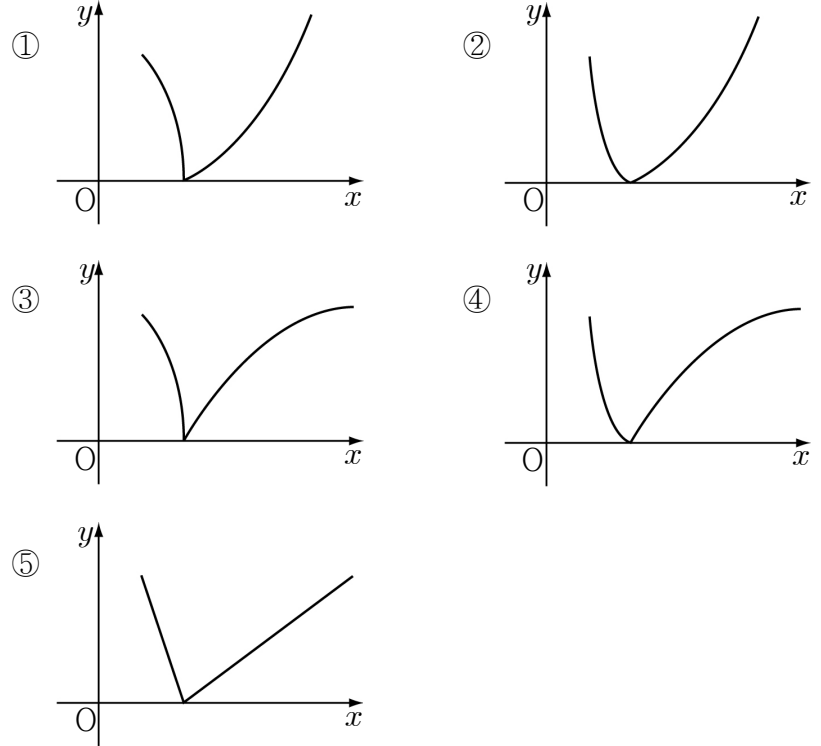
18. 실수 a 의 n 제곱근 중 서로 다른 실수의 개수를 $f_n(a)$ 라 할 때, $f_n(a)$ 에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, n 은 2이상의 자연수이다.) [4점]

< 보기 >

ㄱ. $a > 0$ 이고 n 이 짝수이면 $f_n(a)$ 의 값은 2이다.
 ㄴ. $a < 0$ 이면 $f_n(a)$ 의 값은 0 또는 1이다.
 ㄷ. $f_n(a)$ 가 될 수 있는 값은 0, 1, 2이다.

- ① ㄱ
- ② ㄷ
- ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. 무리함수 $y = 3\sqrt{x-2}\sqrt{x-1}$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은? [4점]



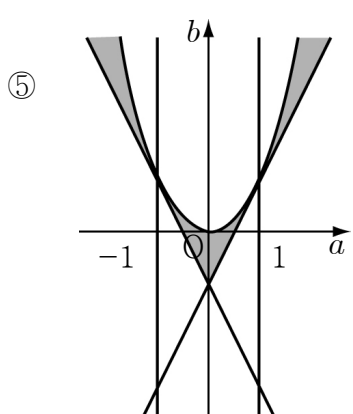
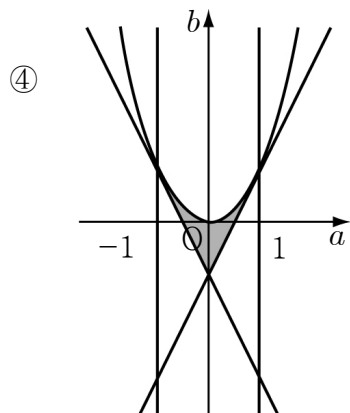
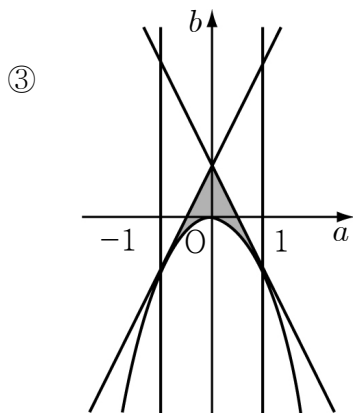
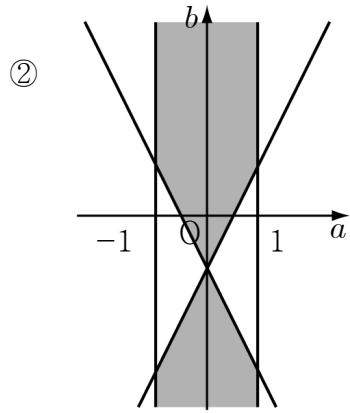
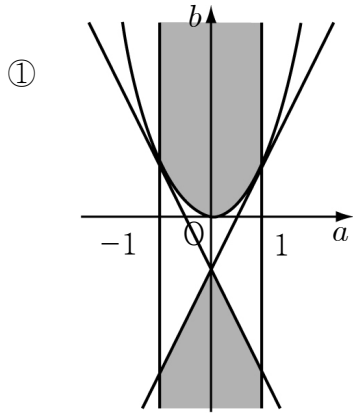
20. 두 이차정사각행렬 A, B 에 대한 설명으로 항상 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E 는 단위행렬, O 는 영행렬이다.) [4점]

< 보기 >

ㄱ. $A^7 = O$ 이면 $A^2 = O$ 이다.
 ㄴ. $A = A^2$ 이면 $A = E$ 또는 $A = O$ 이다.
 ㄷ. $(AB)^n = A^n B^n$ 이면 $AB = BA$ 이다. (단, n 은 자연수이다.)

- ① ㄱ
- ② ㄷ
- ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 이차함수 $f(x) = x^2 - 2ax + b$ 가 $-1 < x < 1$ 에서 x 축과 서로 다른 두 점에서 만날 때, 점 (a, b) 가 존재하는 영역을 바르게 색칠한 것은? (단, a, b 는 실수이고 경계선은 제외한다.) [4점]

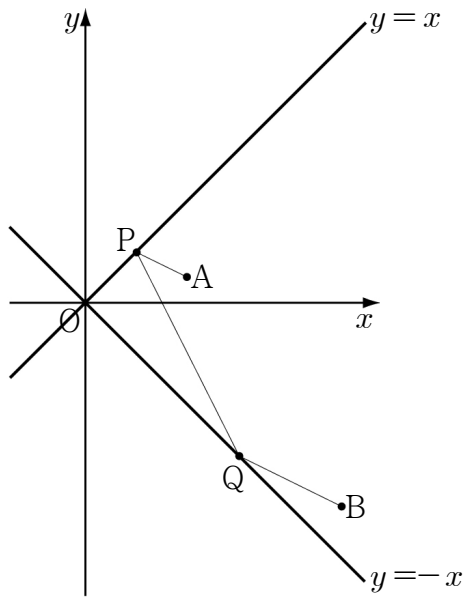


단답형

22. 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 일 때, $2(X+B) = X-A$ 를 만족하는 행렬 X 의 모든 성분의 곱을 구하시오. [2점]

23. 두 양수 a, b 에 대하여 연산 $\blacklozenge, \blacklozenge$ 를 $a \blacklozenge b = a^b, a \blacklozenge b = a^{\frac{1}{b}}$ 로 정의할 때, $(8 \blacklozenge 4) \blacklozenge 3$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 좌표평면 위에 두 점 $A\left(2, \frac{1}{2}\right)$, $B(5, -4)$ 가 있다. 직선 $y=x$ 위를 움직이는 점 P 와 직선 $y=-x$ 위를 움직이는 점 Q 에 대하여 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB}$ 가 최소가 될 때, 두 점 P 와 Q 를 지나는 직선의 방정식을 $y=ax+b$ 라 하자. 이때 a^2+b^2 의 값을 구하시오. [3점]



25. 이차정사각행렬 $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ 에 대하여 $A^n = E$ 를 만족하는 100이하의 자연수 n 의 개수를 구하시오. (단, E 는 단위행렬이다.) [3점]

26. 이차정사각행렬 A 의 성분 a_{ij} 를 $a_{ij} = \tan\left(\frac{2i-j}{3}\right)\pi$ 라 정의하자. 행렬 A 가 $A^2 = kE$ 를 만족할 때, 상수 k 의 값을 구하시오. (단, a_{ij} 는 i 행 j 열의 성분이고, E 는 단위행렬이다.) [3점]

27. 좌표평면 위의 두 점 $A(1, -1)$, $B(4, 8)$ 에 대하여 \overline{AB} 를 2:1로 내분하는 점을 중심으로 하고, 직선 $3x-4y-9=0$ 에 접하는 원의 반지름의 길이를 구하시오. [3점]

28. 좌표평면 위의 점 (x, y) 에 대하여 두 행렬 A, B 를

$$A = \begin{pmatrix} x^2 & 1 \\ 1 & 4x \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2y & 1 \\ 1 & y^2 \end{pmatrix} \text{ 이라 하자.}$$

$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ 을 만족하는 점 (x, y) 가 나타내는 도형의 둘레의 길이를 l 이라 할 때, $\left(\frac{l}{\pi}\right)^2$ 의 값을 구하시오.

[3점]

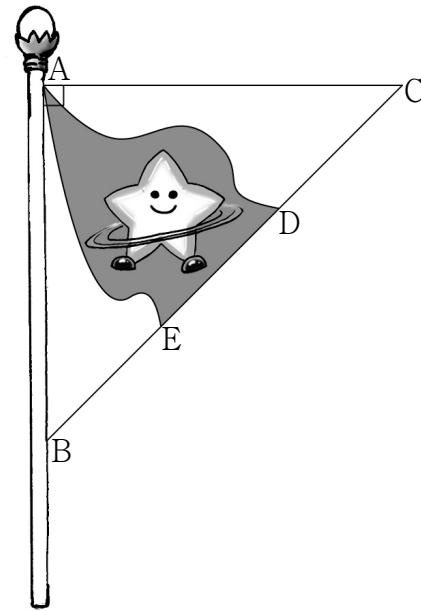
29. 다음 두 조건을 모두 만족하는 자연수 n 의 최댓값을 구하시오.
(단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점]

- (가) $\log n$ 의 지표는 2이다.
(나) $[\log_3 n] = \log_3(n-1)$

30. 다음은 \triangle 천문대의 깃발에 대한 설명이다.

(가) 삼각형 ABC에서 $\angle A = 90^\circ$, $\overline{BC} = 29$ 이다.

(나) \overline{BC} 위의 두 점 D와 E에 대하여 $\overline{AB} = \overline{BD}$, $\overline{AC} = \overline{CE}$ 이고, $\overline{DE} = 12$ 이다.



$\overline{AB} = x$, $\overline{AC} = y$ 라 할 때, xy 의 값을 구하시오. [4점]

※ 확인사항

- 문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.