한양대학교

답안지 (상경계열)

수험번호	성명	페이지
우수답안 1		1 / 2

1. 세 학생이 알고 있는 단어의 집합을 각각 A, B, C 라 하자.

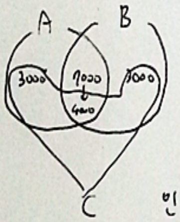
적어도 한 사람이 알고 있는 단어의 집합은 A∪B∪C 로 표현할 수 있다.

$n(A\cup B\cup C) = n(A)+n(B)+n(C) - n(A\cap B) - n(A\cap C) - n(B\cap C) + n(A\cap B\cap C)$

$= n(A\cap B\cap C) + 9000$.

이때,

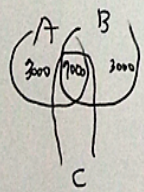
$n(A\cap B\cap C)$이 최소인 경우는,



(단 여기서 숫자는 원소의 개수를 나타낸다.)

인 경우이므로 $n(A\cap B\cap C) \geq 4000$

$n(A\cap B\cap C)$가 최대인 경우는



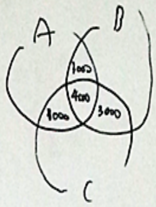
(단 여기서 숫자는 원소의 개수를 의미한다)

인 경우 이므로 $n(A\cap B\cap C) \leq 7000$

$4000 \leq n(A\cap B\cap C) \leq 7000$ 이므로

$13000 \leq V = n(A\cap B\cap C) + 9000 \leq 16000$ 이다.

2. $V=13000$인 경우는



인 경우.

단어 개수가 충분하며 많은 경우의 수가 있으므로 가능하다.

$V=16000$인 경우는

인 경우.

총 단어의 수가 1억개 이상이므로

$n(A\cup B\cup C\cup V\cdots) = 7000 + 3000\times1000$

$= 3007000$ 에서

가능하다.

한양대학교

답안지 (상경계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
우수답안 1		2 / 2

3. $V = 16000$ 인 상황의 확률이 1이 되려면 학생 천명 모두가 공통의 7000개의 단어를 알고 있어야 한다. 이때 ~~모든 학생~~ 적어도 한 명의 학생이 아는 모든 단어의 수는 $7000 + 3000 \times 1000$

$= 300\ 7000$ 개이며 이는 10억개에 한참 모자란다.

따라서 이런 상황은 가능하다.

4. $13000 \le V \le 16000$ 이므로

$P(V \ge 13000) = 1$ 이다.

$P(V \ge 13000) = k \times 3000^2 = 1$

$k = \frac{1}{3000^2}$

$P(V \ge n) = \frac{1}{3000^2}(n - 16000)^2$ 이고

이는 확률밀도함수를 정적분한 값이다.

이 확률밀도함수를 $f(n)$이라 하자.

$P(V \ge n) = \int_{13000}^{n} f(n)\,dn$ 이다.

임의의 $\int f(n)\,dn$ 을 $F(n)$이라 하면

$F(n) - F(13000) = \frac{1}{3000^2}(n - 16000)^2$

미분하면

$f(n) = \frac{1}{3000^2}(2n - 32000)$ (단 $13000 \le n \le 16000$)

$E(V) = \int_{13000}^{16000} n f(n)\,dn = 2\int_{13000}^{16000} (n^2 - 16000n)\,dn \times \frac{1}{3000^2}$

$= \frac{2}{3000^2}\left\{\frac{1}{3}(16000^3 - 13000^3) - 16000 \times \frac{1}{2}(16000^2 - 13000^2)\right\}$

$= \frac{1}{3000^2} \times \left\{\frac{2}{3}(16000 - 13000)(16000^2 + 16000 \cdot 13000 + 13000^2)\right.$

$\left. - 16000\,(16000 + 13000)(16000 - 13000)\right\}$

$= (3000 \times 422000000 - 16000 \times 29000 \times 3000) \times \frac{1}{3000^2}$

$= 3000 \times (-42000000) \times \frac{1}{3000^2} = -14000$

$E(X) = E\left(\frac{V - 13000}{3000}\right) = -9$

![한양대학교]

답안지 (상경계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
우수답안 2		1/ 1

1.

$V = n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)$
$\qquad -n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

$= 30000 - 7000\times 3 + n(A\cap B\cap C)$

$= 9000 + n(A\cap B\cap C)$

이 때 $n(A\cap B\cap C)$이 최대가 될 경우는

A와 B와 C가 모두 공통적으로 아는 단어가 7000개 일 때이다.

반면 $n(A\cap B\cap C)$가 최소가 될 경우,

한 개인이 혼자알고 있는 단어는 없을 때이다.

$\therefore n(A) = n(A\cap B) + n(B\cap C) - n(A\cap B\cap C)$이므로

$10000 = 14000 - n(A\cap B\cap C)$

$\therefore n(A\cap B\cap C) = 4000$

최종적으로

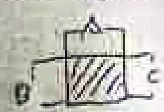
$4000 \leq n(A\cap B\cap C) \leq 7000$

$\therefore 13000 \leq V \leq 16000$

2. 1에서 마찬가지로

$V = 16000$일 때에는 A와 B와 C가 공통으로

알고있는 단어가 7000개이며



$V = 13000$일 때에는 한 개인이 혼자 알고 있는 단어는

없을 때이다

3.

$V = 16000$이기 위해서는

3명의 학생이 7000개의 단어를 공유해야 한다

이 때, A와 B를 임의로 뽑았을 때

두 학생이 공유하는 단어는 항상 7000개

이므로

추가적으로 C를 뽑았을 때, A와 B가

공통적으로 알고있는 7000개의 단어를 C가

알아야한다

즉, 천명의 모든 학생이 7000개를 공유해야

지만 $V = 16000$일 확률이 1이 된다

4.

한양대학교	답안지 (상경계열)	
수 험 번 호	성 명	페 이 지
우수답안 3		1/ 2

1. ① V가 가장 작을 경우와 ② 클 경우를 생각해 보자.

① 먼저, 학생 개개인은 정확히 10000개의 단어를 알고 있고, 두 학생은 언제나 7000개의 단어를 공통적으로 알고 있으므로,

학생 개개인을 임의의 집합 X로 가정하면 $n(X)=10000$

또다른 임의의 집합 (= 임의의 학생) Y도 $n(Y)=10000$ 이고,

$n(X\cap Y)=7000$ 이다.

이 때, $n(X\cup Y)=n(X)+n(Y)-n(X\cap Y)$

$= 20000-7000=13000$ 이다.

이 때, V는 X와 Y 학생에 임의의 학생 Z가 추가될 때의 합집합인데, 이미 $n(X\cup Y)=13000$ 이므로

$n(X\cup Y\cup Z)\geq 13000$ 이 성립한다.

② V가 가장 클 경우는

$n(X\cap Y\cap Z)=7000$ 일 때이므로

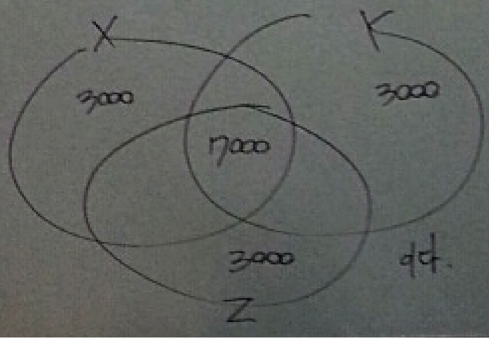
(나)를 이용하면 $V=n(X\cup Y\cup Z)$

$= 10000+10000+10000$

$-7000-7000-7000$

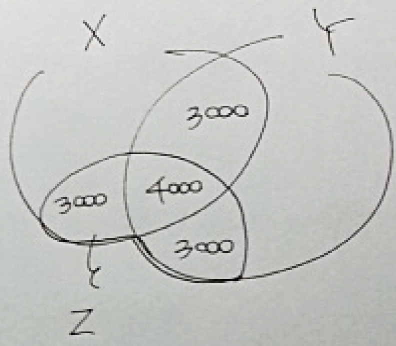
$+7000=16000$ 일 경우이다.

벤 다이어그램으로 나타내면

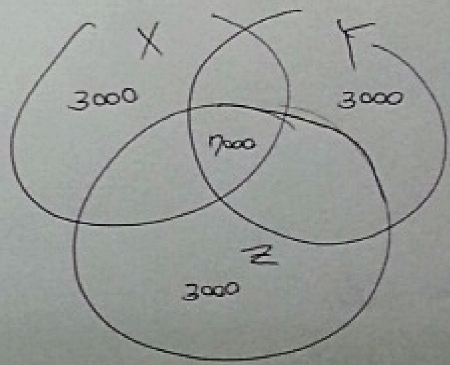


이다. ∴ 따라서, $13000\leq V\leq 16000$ 이다.

2. $V=13000$ 일 경우.



$V=16000$ 일 경우.



한양대학교	답안지 (상경계열)	
수 험 번 호	성 명	페 이 지
우수답안 3		2 / 2

3. 모든 학생들이
같은 단어를 7000개 알고 있고,
서로 다른 단어를 2000개 알고 있다면
$V=16000$일 확률이 1이 된다.

학생전체 집합 $S=\{\underbrace{X, Y, \cdots, Z}_{1000개}\}$ 일 때

$n(X \cap Y \cap \cdots \cap Z)=7000$이고

$\{n(A)=2000 \mid A \in S\}$ 일 때
확률은 1이다.