한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
우수답안 1		1/2

[문제 1-1]

영역 D의 넓이를 S라고 하면

$S = 4zw - zw = 3zw$ 이다.

산술 기하 평균에 의하여

$z+w \geq 2\sqrt{zw}$ 이다.

(등호는 $z=w$ 일 때 성립한다)

$\therefore (z+w)^2 \times \frac{1}{4} \geq zw$

$(z+w)^2 \times \frac{3}{4} \geq 3zw$

$75 \geq 3zw$ 이고

등호는 $z=w$ 일 때 성립하므로

영역 D의 최대 넓이는

$z=w$ 일 때 이고,

그 넓이는 75이다.

[문제 1-2]

가) $c>0, 2w>1$ 인 경우

영역 D는 2부분으로 나누어진다.

나) $c<0, 2w<1, 2^{cz}>w$ 인 경우

영역 D는 2부분으로 나누어진다.

다) $c<0. 2w<1. 2^{cz}<w$ 인 경우

영역 D는 3부분으로 나누어진다.

라) $c<0. 1>w>\frac{1}{2}, 2^{cz}>w$ 인 경우

영역 D는 2부분으로 나누어진다.

마) $c<0. 1>w>\frac{1}{2}. 2^{cz}<w$ 인 경우

영역 D는 3부분으로 나누어진다.

바) $c<0. w<1$ 인 경우

영역 D는 2부분으로 나누어진다.

따라서 영역 D는 다음 조건을 성립할 때 2부분으로 나뉜다.

i) $c>0. 2w>1$

ii) $c<0. w>\frac{1}{2}. 2^{cz}>w$

iii) $c<0. w<1$

또한 다음 조건을 성립할 때 3부분으로 나뉜다.

i) $c<0. w>\frac{1}{2}. 2^{cz}<w$

한양대학교

답안지 (자연계열)

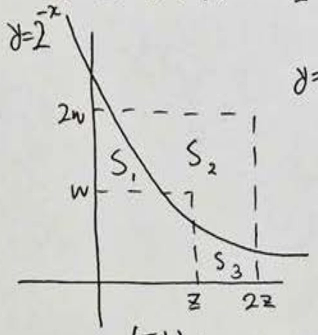
수 험 번 호	성 명	페 이 지
우수답안 1		2/2

[문제 1-3]

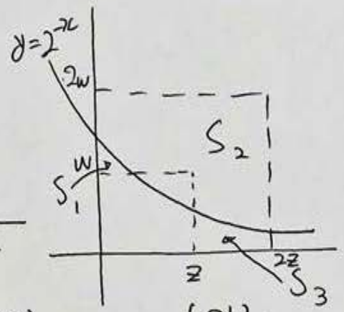
문제 1-2 에서 영역 D가 3부분으로 나누어지는 경우는

다) $c<0$, $2w<1$, $2^{cz}<w$ 인 경우

마) $c<0$, $1>w>\frac{1}{2}$, $2^{cz}<w$ 인 경우 이다.



(다) (c=-1일때)



(마) (c=-1일때)

(다)의 경우

$$S_1=(2w-w)\times\log_2\frac{1}{2w}+\int_{\log_2\frac{1}{2w}}^{\log_2\frac{1}{w}}2^{-x}dx-w\times\left(\log_2\frac{1}{w}-\log_2\frac{1}{2w}\right)$$

$$=\frac{w-w\ln w-2w\ln 2}{\ln 2}$$

$$S_3=\int_z^{2z}2^{-x}dx=\frac{1}{\ln 2}\times\frac{1}{2^z}\times\frac{2^z-1}{2^z}$$

$$S_2=3wz-\frac{w-w\ln w-2w\ln 2}{\ln 2}-\frac{\frac{2^z-1}{2^{2z}}}{\ln 2}$$

(마)의 경우

$$S_1=\int_0^{\log_2\frac{1}{w}}2^{-x}dx-w\cdot\log_2\frac{1}{w}=\frac{w\ln w+1-w}{\ln 2}$$

$$S_3=\int_z^{2z}2^{-x}dx=\frac{\frac{2^z-1}{2^{2z}}}{\ln 2}$$

$$S_2=3wz-\frac{w\ln w+1-w}{\ln 2}-\frac{\frac{2^z-1}{2^{2z}}}{\ln 2}$$

▶ 2번 문항 답안은 3Page 부터 작성

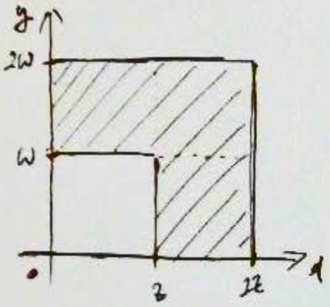
한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
우수답안 2		1/2

[문제 1-1]

제시문 (가) 의 D에 해당되는 영역을 좌표평면에 나타내면 아래와 같다.



이 때, 색칠된 영역 D의 넓이는 색칠되지 않은 사각형의 3배임을 확인할 수 있다.

따라서, 영역 D는 색칠되지 않은 사각형의 넓이가 최대일 때 최대 넓이를 가진다.

산술평균에 의하여, $z+w \geq 2\sqrt{zw}$ 이고 이 값이 10 이므로 $zw = 25$ 이다.

$z+w=10$ 을 만족하면서 $zw=25$ 인 (z, w)의 순서쌍은 $(5, 5)$ 뿐이므로 색칠되지 않은 사각형 넓이 최댓값은 25 이다.

즉, 영역 D의 최대 넓이는 75 이다.

[문제 1-2]

우선 $c>0$ 일 때와 $c<0$ 일 때로 경우를 나눈다.

i) $c>0$ 일 때

$f(x)=2^{cx}$ 는 $(0,1)$을 지나는 단조증가곡선을 그린다.

따라서, $2w \leq 1$ 일 때 $f(x)$가 영역 D를 지나지 않으므로 $2w>1$ 이면 $f(x)$가 영역 D를 이등분한다.

그런데 영역 D를 3등분하기 위해서는 영역 D를 $f(x)$가 2번 지나가야 한다. 위에서 언급한 대로 $f(x)$는 단조증가함수이므로 해당되는 경우가 없다.

즉, $c>0$, $2w>1$, $2z<19$ 일 때 $f(x)$가 영역 D를 이등분한다.

ii) $c<0$ 일 때.

$f(x)=2^{cx}$ 는 $(0,1)$을 지나는 단조감소곡선을 그린다.

$f(x)$가 (z, w)를 지나기 시작할 때 영역 D를 3등분한다. 따라서, $2^{cz} \leq w$ 일 때 $f(x)$가 영역 D를 2번 지나가므로 3등분하게 된다.

$f(x)=2^{cx}$ $(c<0)$ 의 점근선은 x축이다.

즉, 0보다 큰 실수 w에 대하여 $f(x)=w$의 근이 항상 양의 범위에서 존재하므로 $2^{cz}>w$ 의 범위에서 $f(x)$가 영역 D를 항상 이등분한다.

정리하면, $c<0$, $2^{cz} \leq w$ 일 때 삼등분하고 $c<0$, $2^{cz}>w$ 일 때 이등분한다.

한양대학교

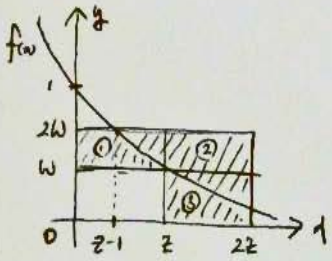
답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
우수답안 2		2/2

[문제 1-3]

$f(x)$가 $c=-1$일 때 □를 3등분하는 경우는 2가지가 있다.

i) $w<\frac{1}{2}$일 때는 다음과 같다.



①의 넓이는

$w(z-1)+\int_{z-1}^{z} f(x)dx - w$

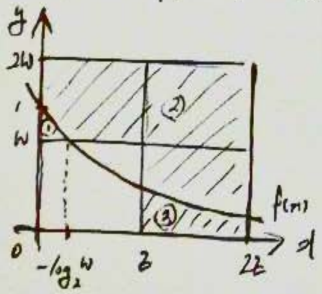
$= w(z-2)+2^{-z}\ln^{2}$ 이다.

③의 넓이는 $\int_{z}^{2z} f(x)dx = \left(\frac{2^{z}-1}{2^{2z}}\right)\ln^{2}$ 이다.

②의 넓이는 $3zw$에서 ①과 ③을 뺀 넓이이므로

$2w(z+1)-\left(\frac{2^{z+1}-1}{2^{2z}}\right)\ln^{2}$ 이다.

ii) $w>\frac{1}{2}$일 때는 다음과 같다.



①의 넓이는

$\int_{0}^{-\log_2 w} f(x)dx + w\log_2 w$

$= (1-w)\ln^{2}$

이 때, $w<1$이므로 이는 항상 양의 값을 가진다.

③의 넓이는 $\int_{z}^{2z} f(x)dx = \left(\frac{2^{z}-1}{2^{2z}}\right)\ln^{2}$ 이다.

②의 넓이는 $3zw$에서 ①과 ③을 뺀 넓이이므로

$3zw - \ln^{2}\left(1-w+\frac{2^{z}-1}{2^{2z}}\right)$ 이다.

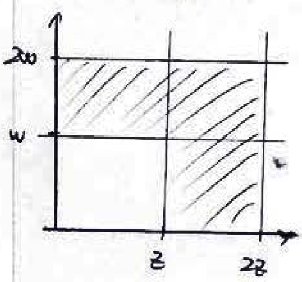
▶ 2번 문항 답안은 3Page 부터 작성

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
우수답안 3		1/2

[문제 1-1]

제시문 (가)에 의한 조건을 그래프로 그리면 다음과 같다.



그래서 영역 D의 넓이는, $3zw$이고,

$z+w=10$ 인 경우

산술-기하 평균을 이용하면,

$z+w \ge 2\sqrt{zw}$. $\therefore 25 \ge zw$. (단, 등호는 $w=z$일때 성립)

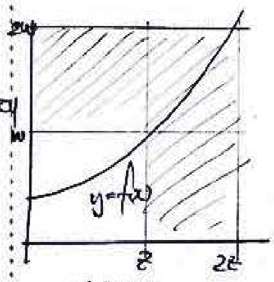
이므로, $z=w=5$ 일 때 영역 D의 넓이는 최대가 된다.

[문제 1-2]

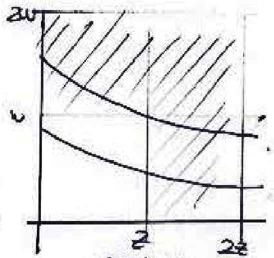
$f(x)=2^x$ 일 때,

영역 D가 두 부분으로 나누어지기 위해서는 영역 D 위의 한 점을 반드시 지나야 한다.

그림으로 표현하면 다음과 같다.



<그림 1>



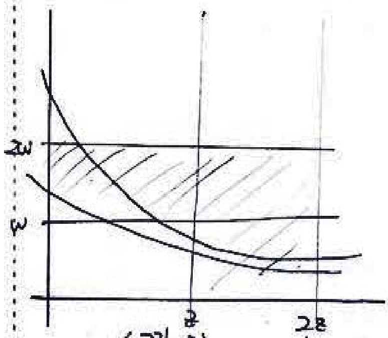
<그림 2>

따라서 <그림 1>에 의하면,

$c>0$ 일 때 $w>\frac{1}{2}$ 이고, $\frac{1}{2}<w<1$, $2^z \le w$

$c<0$ 일 때 $w>1$, 또는 ~~$w<1<2w$~~ 이다.

한편, 영역 D가 세 부분으로 나누어지기 위해서는 (z, w) 아래에 곡선이 존재해야 하므로, 그림으로 표현하면 다음과 같다.



<그림 3>

즉, <그림 3>에 의해

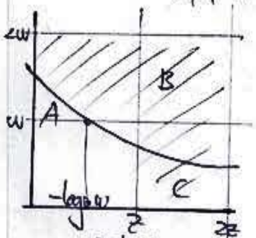
$c<0$ 이고 $1>w$, $2^z<w$ 이다.

한양대학교

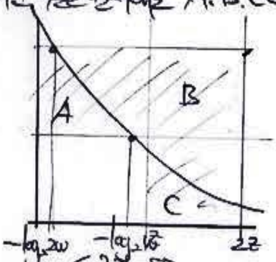
답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
우수답안 3		2/2

[문제 1-3] 각각 나누어진 부분을 순서대로 A, B, C라 하자.



<그림 4>



<그림 5>

<그림 4>와 같이 $\frac{1}{2}<w<1$의 경우,

A는 $\int_0^{-\log_2 w} 2^{-x}-w\,dx$

$= (1-w)\ln 2 + w\log_2 w$ 이고,

C는 $\int_z^{2z} 2^{-x}dx = \ln 2(2^{-z}-2^{-2z})$ 이므로

B는 $3zw - A - C$ 이므로 계산하면,

$B = 3zw - w\log_2 w - \ln 2(1-w-2^{-z}+2^{-2z})$

이다.

<그림 5>와 같이 $w<\frac{1}{2}$의 경우,

A는 $\int_0^{2\log_2 w}(2^{-x}-w)\,dx - \int_0^{-\log_2 2w} 2^{-x}dx$

$= \ln 2(w + w\log_2 w - 2^{2w})$ 이고,

C는 $\int_z^{2z} 2^{-x}dx = \ln 2(2^{-z}-2^{-2z})$ 이므로

B는 $3zw - A - C$ 에서 계산하면

$B = 3zw - \ln 2(w + w\log_2 w + 2^{-z} - 2^{2w} - 2^{-2z})$

이다.

▶ 2번 문항 답안은 3Page 부터 작성

한양대학교

답안지 (상경계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
우수답안 1		1 / 2

[문제 2-1]

$w = 10 - z$

$\{(x, y) : z \le x \le 2z,\ 0 \le y \le 2w\}$

$\Downarrow$

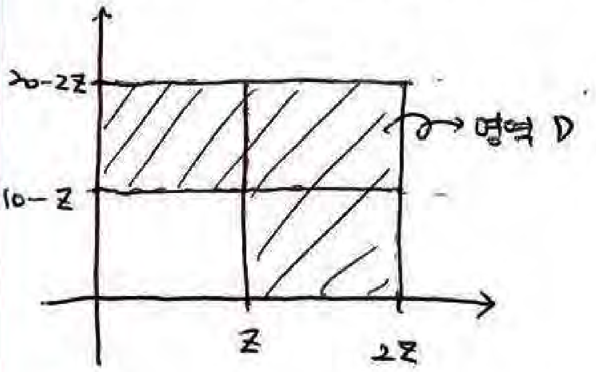
$(z \le x \le 2z,\ 0 \le y \le 20 - 2z)$

$\{(x, y) : 0 \le x \le 2z,\ w \le y \le 2w\}$

$\Downarrow$

$(0 \le x \le 2z,\ 10 - z \le y \le 20 - 2z)$

∴ 영역 D = 두 영역의 합집합이므로



$\Rightarrow 2z(10-z) + z(10-z)$

$= 3z(10-z)$

$= -3z^2 + 30z$

$= -3(z^2 - 10z + 25) + 75$

$= -3(z-5)^2 + 75$

∴ $z = 5$일때 D의 최대넓이는 75

답) 75

[문제 2-2]

$f(x) = c(x-z)^2 + d$

① 영역 D가 두부분으로 나누어질 조건

i) $c > 0$

↳ $0 \le d < w$ → y절편 $\le w$

$w < d < 2w$ 일 때

ii) $c < 0$

↳ $0 < d \le w$ 일때,

$w < d < 2w$ 일때

y절편 $= cz^2 + d$ 이므로

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{답) } c>0,\ 0 \le d < w,\ cz^2+d \le w \text{ 또는} \\ c>0,\ w<d<2w \text{ 또는} \\ c<0,\ 0<d<2w \end{array}}$$

② 영역 D가 3부분으로 나누어질 조건

i) $c > 0$ 일 때

↳ $0 \le d \le w$ 일때 y절편 $> w$

ii) $c < 0$ 일때

↳ $d \ge 2w$ 일때 y절편 $< 2w$

y절편 $= cz^2 + d$ 이므로

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{답) } c>0,\ 0 \le d \le w,\ cz^2+d > w \text{ 또는} \\ c<0,\ d \ge 2w,\ cz^2+d < 2w \end{array}}$$

한양대학교

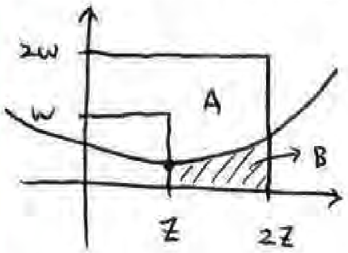
답안지 (상경계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
우수답안 1		2 / 2

[문제 2-3]

C=1일때 2부분으로 나누어진 경우

i) $0 \le d < w$, y절편 $\le w$ 일때



$$B = \int_z^{2z} \{(x-z)^2 + d\} dx$$

$$\int_z^{2z} \{x^2 - 2zx + z^2 + d\} dx$$

$$\left[\frac{1}{3}x^3 - zx^2 + z^2 x + dx\right]_z^{2z}$$

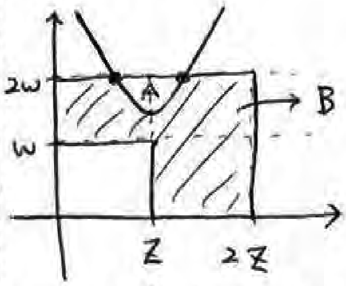
$$= \frac{1}{3}z^3 + dz$$

A = $4wz - wz$ - B영역이므로

$$\therefore A = -\frac{1}{3}z^3 - dz + 3wz$$

$$B = \frac{1}{3}z^3 + dz$$

ii) $w < d < 2w$ 일때



$y=(x-z)^2+d$ 와 $y=2w$의 교점은

$$\Rightarrow (x-z)^2 + d = 2w$$

$$(x-z)^2 = 2w - d$$

$$x - z = \pm\sqrt{2w-d}$$

$$x = z \pm \sqrt{2w-d}$$

A영역 : $\int_{z-\sqrt{2w-d}}^{z+\sqrt{2w-d}} (2w - x^2 + 2zx - z^2 - d)\,dx$

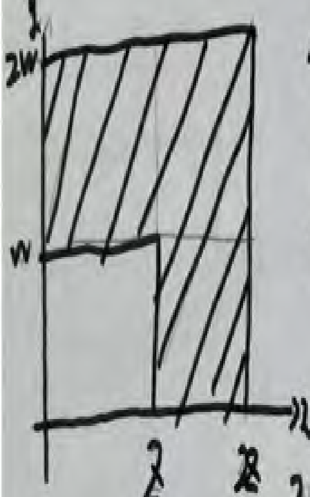
B영역 : $4wz - wz$ - A영역

$= 3wz$ - A영역

$$= 3wz - \int_{z-\sqrt{2w-d}}^{z+\sqrt{2w-d}} (2w - x^2 + 2zx - z^2 - d)\,dx$$

답안지 (상경계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
우수답안 2		1/2



색칠된 부분의 넓이가 D의 넓이이다.

그러므로 영역 D의 넓이는 $4wz - wz = 3wz$가 된다.

이때, $z+w=10$인 경우 $3wz$의 최댓값은 완전제곱식을 이용하여 구한다.

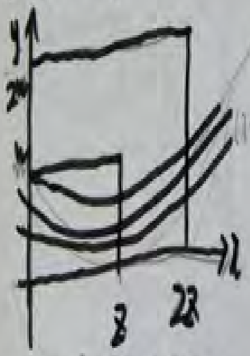
$z=10-w$이므로

$3w(10-w) = -3w^2+30w = -3(w^2-10w+25)+75 = 3wz$이다

결국 D의 최댓값은 75이다.

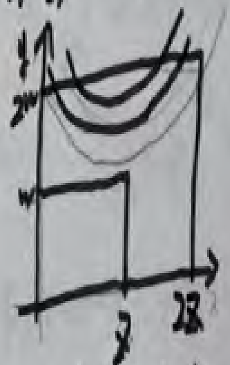
i) 2부분으로 나누어 질 경우

-1) $a<w$인 경우



$0<$ (꼭짓점) $\le w$ 여야 한다

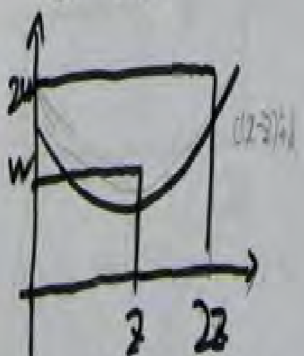
-2) $a>w$ 인 경우



$2w>a>w$ 여야 한다.

ii) 3부분으로 나누어질때

$a<w$인 경우



$w<$ (꼭짓점) $\le 2w$ 여야 한다

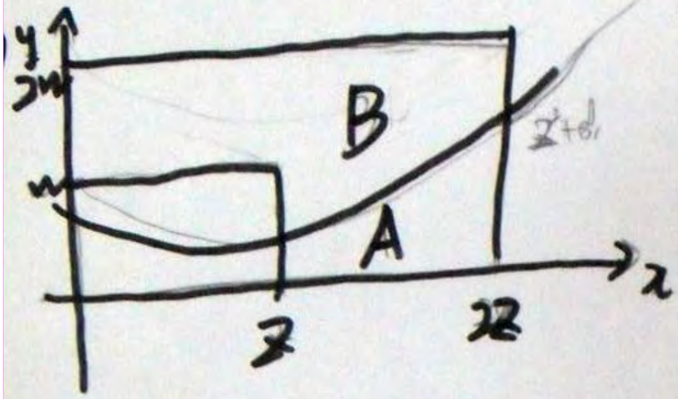
$a>w$

$w<$ (꼭짓점) $\le 2w$ 여야 한다.

한양대학교

답안지 (상경계열)

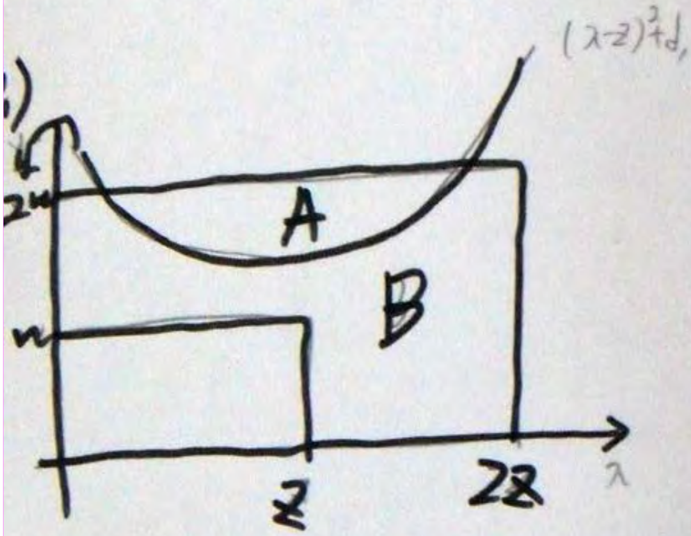
수 험 번 호	성 명	페 이 지
우수답안 2		2/2



$$A = \int_z^{2z} (x-z)^2+d = \int_0^z x^2+d$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3+dx\right]_0^z = \frac{1}{3}z^3+dz = A$$

$$B = 3wz - A = 3wz - \frac{1}{3}z^3 - dz$$



$$2w = (x-z)^2+d \quad \pm\sqrt{2w-d} = x-z$$

$$x = z \pm \sqrt{2w-d}$$

$$A = \frac{1)(z+\sqrt{2w-d}-(z-\sqrt{2w-d}))^3}{6}$$

$$A = \frac{(2\sqrt{2w-d})^3}{6}$$

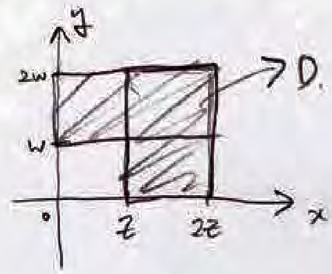
$$B = 3wz - A = 3wz - \frac{(2\sqrt{2w-d})^3}{6}$$

한양대학교

답안지 (상경계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
우수답안 3		1/2

[문제 2-1]



$D = 2w\times 2z - (w\times z)$

$= 3wz$

$w+z=10$.

w, z가 모두 양수이므로

$w+z=10 \geq 2\sqrt{wz}$

↓

$5 \geq \sqrt{wz}$

$25 \geq wz$

$\therefore wz \leq 25$.

wz의 최댓값은 25이다.

문제에서 구하고자 하는 D의 값은 3wz이므로

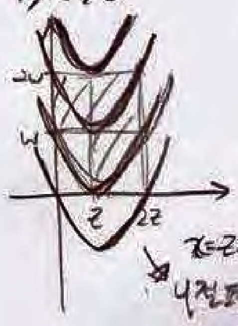
$3wz \leq 75$.

↓

답: 75.

[문제 2-2]

ⅰ) $c>0$.



$f(x) = c(x-z)^2+d$

$= c(x^2-2zx+z^2)+d$

$= cx^2-2czx+cz^2+d$

x=z에 대하여 대칭이므로 → y절편 위치에 따라 구분된다.

y절편 $= cz^2+d$

$c>0$이라면,

$0 < cz^2+d \leq w \rightarrow$ 2부분

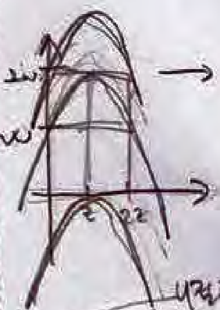
$w < cz^2+d \leq 2w \rightarrow$ 3부분

$2w < cz^2+d <$? $\rightarrow$ 2부분

→ x=z를 축으로 하는 f(x)의 x=z일 때의 값이 2w이면 된다.

$f(z) = d = 2w$ 일 때까지이다.

ⅱ) $c<0$



→ x=z에 대해서 대칭이므로 y절편에 따라 구분

y절편: cz^2+d

$c<0$이라면

$w \leq cz^2+d < 2w \rightarrow$ 3부분

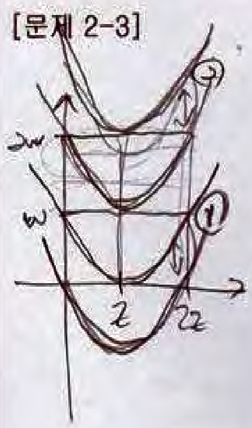
? $< cz^2+d < w \rightarrow$ 2부분

→ f(z)가 0일 때

$f(z) = d = 0$ 일 때까지이다.

수 험 번 호	성 명	페 이 지
우수답안 3		2/2

[문제 2-3]



내접편

① 의 경우 → $0 < z^2+d \le w$

$x=0$에서 $f(x)$는 둘러싸인 넓이가 그 나머지

$f(x) = (x-z)^2+d$

$= x^2 - 2zx + z^2 + d$

근 ⇒ $z \pm \sqrt{z^2 - z^2 - d}$

$= z \pm \sqrt{d}$ → 이 중 더 큰 근이 필요하다

$$\boxed{\int_{z+\sqrt{d}}^{2z} f(x)dx \Big/ 3wz - \int_{z+\sqrt{d}}^{2z} f(x)dx}$$

(단, $0 \le d < z^2$) 이 두 부분으로 나뉘진다

② 의 경우 → $2w < z^2+d <$ ③

$f(z) = d = 2w$ 까지

$x = z \pm \sqrt{d}$ – 이 중 더 큰 근 필요.

$$\boxed{\begin{aligned}&(2w-d)2z - 2\int_{z}^{z+\sqrt{d}} f(x)dx \\ &\overline{} \\ &3wz - \left\{(2w-d)2z - \int_{z}^{z+\sqrt{d}} f(x)dx\right. \\ &= 2dz - wz - \int_{z}^{z+\sqrt{d}} f(x)dx\end{aligned}}$$

(단, $0 < d < z^2$)

이 두 부분으로 나뉘진다