2019학년도 수시모집 논술고사 정답 및 해설
(오후)

한국산업기술대학교
KOREA POLYTECHNIC UNIVERSITY

[문제 1] [총30점]

문제 1-1 **[10점]**

실수 x에 대하여 두 조건 p, q가 다음과 같다.

$p : x^2-2x-3 \neq 0$
$q : ax-2a > 3x-4$

p가 q이기 위한 필요조건이 되도록 하는 모든 정수 a의 합을 구하시오.

[정답 및 해설]

p가 q이기 위한 필요조건이라 가정하자. 그러면 $q \Rightarrow p$이고 대우는 $\sim p \Rightarrow \sim q$이다.
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 진리집합 P, Q의 포함관계는
$P^C \subset Q^C$이다.
$P^C = \{x | x^2-2x-3=0\} = \{-1, 3\}$, $Q^C = \{x | ax-2a \leq 3x-4\}$이므로
(i) $-1 \in Q^C$일 때, $-a-2a \leq -3-4$, $-3a \leq -7$, $a \geq \frac{7}{3}$
(ii) $3 \in Q^C$일 때, $3a-2a \leq 5$, $a \leq 5$
(i), (ii)에 의하여 $\frac{7}{3} \leq a \leq 5$
따라서 구하는 정수 a는 $3, 4, 5$이므로 $3+4+5 = 12$

문제 1-2 [10점]

다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2-nx$와 직선 $y=x+n-\frac{1}{4}$이 만나는 서로 다른 두 점을 $\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n$이라 하자.
(나) 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$을 지름으로 하는 원의 넓이를 T_n이라 할 때, $T_n=\sum_{k=1}^{n}\pi a_k$를 만족시키는 등차수열 $\{a_n\}$이 존재한다.

(1) 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n을 구하시오.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n a_{n+1}}$의 값을 구하시오.

[정답 및 해설]

(1) 곡선 $y=x^2-nx$와 직선 $y=x+n-\frac{1}{4}$이 만나는 서로 다른 두 점 A_n, B_n의 x좌표를 각각 $\alpha, \beta\,(\alpha<\beta)$라 하면 $A_n\left(\alpha, \alpha+n-\frac{1}{4}\right)$, $B_n\left(\beta, \beta+n-\frac{1}{4}\right)$이므로 선분 A_nB_n의 길이는

$$\sqrt{(\beta-\alpha)^2+\left\{(\beta+n-\frac{1}{4})-(\alpha+n-\frac{1}{4})\right\}^2}=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\beta-\alpha)^2}=\sqrt{2(\beta-\alpha)^2}$$

이다. α, β는 곡선과 직선이 만나는 점의 x좌표이므로 $x^2-nx=x+n-\frac{1}{4}$, $x^2-(n+1)x+\frac{1}{4}-n=0$의 두 실근이고, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해서 $\alpha+\beta=n+1$, $\alpha\beta=\frac{1}{4}-n$이다.

$$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(n+1)^2-4\left(\frac{1}{4}-n\right)=n^2+6n$$

이므로

$$\overline{A_nB_n}=\sqrt{2(\beta-\alpha)^2}=\sqrt{2(n^2+6n)}$$

따라서 선분 A_nB_n을 지름으로 하는 원의 넓이 T_n은

$$T_n=\left(\frac{\overline{A_nB_n}}{2}\right)^2\pi=\frac{n^2+6n}{2}\pi$$

제시문에서 $T_n = \sum_{k=1}^{n} \pi a_k$ 이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을

S_n 이라 하면 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n^2+6n}{2}$ 이다. $a_1 = S_1 = \frac{7}{2}$ 이고 $S_2 = \frac{16}{2}$ 이므로

$a_2 = S_2 - S_1 = \frac{9}{2}$ 이다.

따라서 공차 $d = a_2 - a_1 = 1$이고 $a_n = a_1 + (n-1)d = n + \frac{5}{2}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(n+\frac{5}{2}\right)\left(n+\frac{7}{2}\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n+5)(2n+7)}$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{2}\left(\frac{1}{2k+5} - \frac{1}{2k+7}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\left\{\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{13}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n+5}-\frac{1}{2n+7}\right)\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{2n+7}\right) = \frac{2}{7}$$

문제 1-3 [10점]

다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 자연수 n에 대하여 함수 $f_1(x)$를 $f_1(x)=\sqrt{n-x}$라 할 때,

$$f_2(x)=f_1(-x),\ f_3(x)=-2f_1(x),\ f_4(x)=-2f_1(-x)$$

이다.

(나) 곡선 $y=f_1(x)$위의 점 중에서 제1사분면에 있는 점을 P라 할 때, 점 P를 지나고 x축, y축과 각각 평행한 두 직선이 두 곡선 $y=f_2(x)$, $y=f_3(x)$와 만나는 점을 각각 Q, S라 하고, 점 Q를 지나고 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=f_4(x)$와 만나는 점을 R라 하자.

(1) 점 P의 x좌표가 $t\,(0<t<n)$일 때, 직사각형 PQRS의 넓이를 $S_n(t)$라 하자. $S_n(t)$를 구하시오.

(2) $S_n(t)$가 $t=f(n)$에서 최댓값이 $g(n)$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\{g(n)\}^2}{\{f(n)\}^3+n^3+1}$$

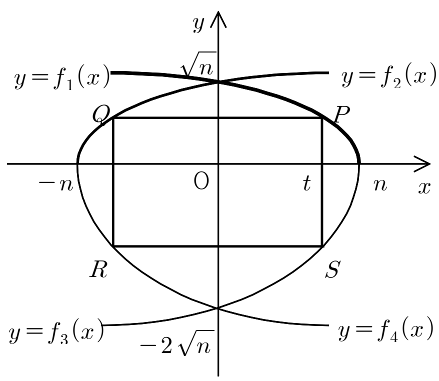
의 값을 구하시오.

[정답 및 해설]

(1) 그림과 같이 실수 $t\,(0<t<n)$에 대하여

$$P(t,\ \sqrt{n-t}),\ Q(-t,\ \sqrt{n-t}),\ R(-t,\ -2\sqrt{n-t}),\ S(t,\ -2\sqrt{n-t})$$

이다. 직사각형 $PQRS$의 넓이는 $\overline{PQ}\times\overline{PS}=2t\times3\sqrt{n-t}$ 이므로 $S_n(t)=6t\sqrt{n-t}$ 이다.



(2) $S_n(t)=6t\sqrt{n-t}=6\sqrt{nt^2-t^3}$ 에서 $T(t)=nt^2-t^3=t^2(n-t)$ 라 하면

$0<t<n$일 때 $T(t)>0$ 이므로 $T(t)$가 최대일 때 $S_n(t)$도 최대이다.

$T'(t)=2nt-3t^2=t(2n-3t)=0$을 만족시키는 t의 값은 $t=0$ 또는 $t=\frac{2}{3}n$

이므로 함수 $T(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	$\frac{2n}{3}$	$\cdots$	(n)
$T'(t)$		$+$	0	$-$	
$T(t)$	0	$\nearrow$	$n\left(\frac{2n}{3}\right)^2-\left(\frac{2n}{3}\right)^3=\frac{4n^3}{27}$	$\searrow$	0

$T(t)=nt^2-t^3$은 $t=\frac{2n}{3}$에서 극대이면서 최대이므로

$S_n(t)$는 $t=\frac{2n}{3}$에서 최댓값 $S_n\left(\frac{2n}{3}\right)=6\sqrt{T\left(\frac{2n}{3}\right)}=6\sqrt{\frac{4n^3}{27}}$ 을 갖는다. 즉

$$f(n)=\frac{2n}{3},\quad g(n)=6\sqrt{\frac{4n^3}{27}}$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\{g(n)\}^2}{\{f(n)\}^3+n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{36\times\frac{4}{27}n^3}{\frac{8}{27}n^3+n^3+1}=\frac{144}{35}$$

[문제 2] [총30점]

문제 2-1 [10점]

자연수 n에 대하여 다항함수 $f_n(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f_1(x)=1$
(나) 2이상의 자연수 n에 대하여 $\int_0^x f_n(t)\,dt = x^{2n-1}\int_0^x f_{n-1}(t)\,dt$

(1) $F_n(x)=\int_0^x f_n(t)dt$라 할 때, $F_n(x)$를 구하시오.

(2) $\sum_{n=2}^{10}\log_2\dfrac{\{f_n(1)\}^2}{f'_n(1)}$의 값을 구하시오.

[정답 및 해설]

(1) 자연수 n에 대하여 $F_n(x)=\int_0^x f_n(t)dt$이고 조건 (가)에서 $f_1(x)=1$이므로

$$F_1(x)=\int_0^x f_1(t)dt=\int_0^x 1dt \;=x$$

조건 (나)에서 $\int_0^x f_n(t)dt=x^{2n-1}\int_0^x f_{n-1}(t)dt$는

$F_n(x)=x^{2n-1}F_{n-1}(x)$ (단, $n\ge 2$인 자연수)이므로

$$\begin{aligned}
F_n(x)&=x^{2n-1}F_{n-1}(x)\\
&=x^{2n-1}\times x^{2n-3}F_{n-2}(x)\\
&=x^{2n-1}\times x^{2n-3}\times x^{2n-5}F_{n-3}(x)\\
&\;\;\vdots\\
&=x^{2n-1}\times x^{2n-3}\times x^{2n-5}\times\cdots\times x^3F_1(x)\\
&=x^{n^2-1}\times F_1(x)
\end{aligned}$$

이때 $F_1(x)=x$이므로 모든 자연수 n에 대하여 $F_n(x)=x^{n^2}$

(2) $F_n(x)=\int_0^x f_n(t)dt$에서 $F'_n(x)=f_n(x)$이므로

$f_n(x)=n^2x^{n^2-1}$이고 $f'_n(x)=n^2(n^2-1)x^{n^2-2}$이다.

따라서 $f_n(1)=n^2$, $f'_n(1)=n^2(n^2-1)$

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{10}\log_2\frac{\{f_n(1)\}^2}{f'_n(1)} &= \sum_{n=2}^{10}\log_2\frac{(n^2)^2}{n^2(n^2-1)} \\ &= \sum_{n=2}^{10}\log_2\frac{n^2}{n^2-1} \\ &= \sum_{n=2}^{10}\log_2\frac{n^2}{(n-1)(n+1)} \\ &= \log_2\frac{2^2}{1\times3}+\log_2\frac{3^2}{2\times4}+\ \cdots\ +\log_2\frac{10^2}{9\times11} \\ &= \log_2\left(\frac{2\times2}{1\times3}\times\frac{3\times3}{2\times4}\times\frac{4\times4}{3\times5}\times\cdots\times\frac{10\times10}{9\times11}\right) \\ &= \log_2\frac{20}{11}\end{aligned}$$

문제 2-2 [10점]

다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 자연수 n에 대하여

$${}_{n}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n}\mathrm{C}_{r} = {}_{n+1}\mathrm{C}_{r} \quad (\text{단}, \ 1 \le r \le n)$$

(나) 음이 아닌 정수 m에 대하여 부등식

$$x+y+z \le m$$

을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 $N(m)$이라 하자.

(1) $N(m) = {}_{m+3}\mathrm{C}_3$ 임을 보이시오.

(2) $\sum_{m=0}^{16} N(m) = {}_{20}\mathrm{C}_k$ 를 만족시키는 자연수 k의 값을 모두 구하시오.

[정답 및 해설]

(1) 부등식 $x+y+z \le m$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)는 $x+y+z$의 값에 따라 각 경우로 나누면 다음과 같다.

(i) $x+y+z=0$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)는 $(0, 0, 0)$이므로 1개

(ii) $x+y+z=1$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 서로 다른 3개에서 1개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_{3}\mathrm{H}_{1} = {}_{3+1-1}\mathrm{C}_{1} = {}_{3}\mathrm{C}_{1}$

(iii) $x+y+z=2$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_{3}\mathrm{H}_{2} = {}_{3+2-1}\mathrm{C}_{2} = {}_{4}\mathrm{C}_{2}$

(iv) $x+y+z=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_{3}\mathrm{H}_{3} = {}_{3+3-1}\mathrm{C}_{3} = {}_{5}\mathrm{C}_{3}$

$$\vdots$$

같은 방법으로 $x+y+z=m$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 서로 다른 3개에서 m개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_{3}\mathrm{H}_{m} = {}_{3+m-1}\mathrm{C}_{m} = {}_{m+2}\mathrm{C}_{m}$

그러므로 부등식 $x+y+z \le m$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수 $N(m)$은

$$
\begin{aligned}
N(m) &= 1+{}_3\mathrm{C}_1+{}_4\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{m+2}\mathrm{C}_m \\
&= {}_3\mathrm{C}_0+{}_3\mathrm{C}_1+{}_4\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{m+2}\mathrm{C}_m \\
&= {}_4\mathrm{C}_1+{}_4\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{m+2}\mathrm{C}_m \\
&= {}_5\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{m+2}\mathrm{C}_m \\
&\qquad\vdots \\
&= {}_{m+2}\mathrm{C}_{m-1}+{}_{m+2}\mathrm{C}_m \\
&= {}_{m+3}\mathrm{C}_m \ = {}_{m+3}\mathrm{C}_3
\end{aligned}
$$

(2) 문제(1)에 의하여

$$
\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{16} N(m) &= \sum_{m=0}^{16} {}_{m+3}\mathrm{C}_3 \\
&= {}_3\mathrm{C}_3+{}_4\mathrm{C}_3+{}_5\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{19}\mathrm{C}_3 \\
&= {}_4\mathrm{C}_4+{}_4\mathrm{C}_3+{}_5\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{19}\mathrm{C}_3 \\
&= {}_5\mathrm{C}_4+{}_5\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{19}\mathrm{C}_3 \\
&= {}_6\mathrm{C}_4+\cdots+{}_{19}\mathrm{C}_3 \\
&\qquad\vdots \\
&= {}_{19}\mathrm{C}_4+{}_{19}\mathrm{C}_3 \\
&= {}_{20}\mathrm{C}_4
\end{aligned}
$$

따라서 $\displaystyle\sum_{m=0}^{16} N(m) = {}_{20}\mathrm{C}_k = {}_{20}\mathrm{C}_4 = {}_{20}\mathrm{C}_{16}$이므로 $k=4$ 또는 $k=16$이다.

(문제 2-3) (10점)

두 상자 A, B에 숫자가 적힌 카드가 각각 6개씩 들어 있다. 상자 A에는 숫자 $1, 2, 3$이 적힌 카드가 각각 1개, 2개, 3개 들어 있고, 상자 B에는 숫자 $1, 2, 3$이 적힌 카드가 각각 a개, b개, c개 들어 있다. (단, $a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0$)

두 학생 창의와 실천이가 창의는 상자 A에서, 실천이는 상자 B에서 각각 임의로 카드를 1장씩 꺼낼 때, 다음과 같은 규칙을 따른다.

(가) 두 학생이 꺼낸 카드에 적힌 두 수가 서로 다르면 창의가, 같으면 실천이가 이기기로 한다.
(나) 이기는 사람은 자신이 꺼낸 카드에 적힌 수만큼 점수를 얻고, 지는 사람은 점수를 얻지 못한다.

창의와 실천이가 얻는 점수를 각각 확률변수 X, Y라 하자. 확률변수 Y의 평균 $E(Y)$가 $E(Y) = \dfrac{13}{18}$일 때, 창의가 이길 확률 p에 대하여 $6p + V(18X+5)$의 값을 구하시오.
(단, $V(X)$는 확률변수 X의 분산이다.)

[정답 및 해설]

상자 B에는 숫자 $1, 2, 3$이 적힌 카드의 개수가 각각 a개, b개, c개 들어있으므로

$$a + b + c = 6 \quad (a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0) \ \cdots\cdots ㉠$$

창의가 이길 확률이 p이므로 실천이가 점수를 얻지 못할 확률이 p이고 실천이가 이기기 위해서는 두 학생이 꺼낸 카드에 적힌 두 수가 서로 같아야 하므로 확률변수 Y의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	0	1	2	3	계
$P(Y=y)$	p	$\frac{a}{6} \times \frac{1}{6}$	$\frac{b}{6} \times \frac{2}{6}$	$\frac{c}{6} \times \frac{3}{6}$	1

$$E(Y) = (0 \times p) + \left(\frac{a}{6} \times \frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{b}{6} \times \frac{2}{6}\right) + 3\left(\frac{c}{6} \times \frac{3}{6}\right) = \frac{a + 4b + 9c}{36} = \frac{13}{18}$$

이므로

$$a + 4b + 9c = 26 \ \cdots\cdots ㉡$$

음이 아닌 정수 a, b, c는 ㉠, ㉡을 만족하므로 $a = 1, b = 4, c = 1$이다.

따라서 창의가 이길 확률은

$$p = 1 - \left\{\left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{4}{6} \times \frac{2}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} \times \frac{3}{6}\right)\right\} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

창의가 이기기 위해서는 두 학생이 꺼낸 카드에 적힌 두 수가 달라야 하므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	계
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}$	$\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}\times\frac{5}{6}$	1

따라서

$$E(X)=\left(0\times\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\right)+2\left(\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}\right)+3\left(\frac{3}{6}\times\frac{5}{6}\right)=\frac{29}{18}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2)-\{E(X)\}^2 \\ &= \left(0\times\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\right)+4\left(\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}\right)+9\left(\frac{3}{6}\times\frac{5}{6}\right)-\left(\frac{29}{18}\right)^2 \\ &= \frac{563}{18^2}=\frac{563}{324} \end{aligned}$$

$$V(18X+5)=18^2\,V(X)=18^2\times\frac{563}{18^2}=563$$

이므로

$$6p+V(18X+5)=4+563=567$$

[문제 3] [총40점]

다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(제시문1) 함수의 극한의 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L$ (L은 실수)이고 $\lim_{x\to a}g(x)=0$ 이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$ 이다.

(제시문2) 정적분

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속일 때, 구간 $[a,b]$를 n등분하여 양 끝점과 각 분점의 x좌표를 차례로 $a=x_0, x_1, \cdots, x_n=b$라 하자. 각 소구간의 길이를 Δx라 하면

$$\Delta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\Delta x\ (k=0, 1, \cdots, n)$$

이때

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}$$

의 값이 항상 존재하는 것이 알려져 있다. 이 극한값을 함수 $f(x)$의 a에서 b까지의 정적분이라 하고 이것을 기호로 $\int_a^b f(x)dx$와 같이 나타낸다. 즉,

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}$$

문제 3-1 [10점]

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to 0+}\left\{x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)-4\right\}=0$

(나) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=12$

(제시문1)을 이용하여 곡선 $y=f(x)$위의 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선의 방정식을 구하시오.

[정답 및 해설]

$y=f(x)$ 위의 점 $(2, f(2))$에서 접선의 방정식은 $y-f(2)=f'(2)(x-2)$이다.

조건 (가)에서 $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to 0+$ 일 때, $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to 0+}\left\{x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)-4\right\}=\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{f(t)}{t^2}-4\right\}=0$$

에서 $\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t^2}=4$이다.

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=4$이므로 $f(x)$는 이차항의 계수가 4인 이차함수이다. …… ㉠

조건 (나)에서 **(제시문1)**을 이용하면 $\lim_{x\to 1}(x-1)=0$이므로

$$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)=0 \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에 의하여 $f(x)=4(x-1)(x-k)$ (k는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{4(x-1)(x-k)}{x-1}=\lim_{x\to 1}4(x-k)=4(1-k)=12$$

에서 $k=-2$ 이다. 따라서 $f(x)=4(x-1)(x+2)=4(x^2+x-2)$이고 $f'(x)=8x+4$이다.

$f(2)=16,\ f'(2)=20$이므로 곡선 $y=f(x)$위의 점 $(2,\ 16)$에서의 접선의 방정식은

$y=20(x-2)+16$, $y=20x-24$

문제 3-2 [15점]

다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$를 구하시오.

(가) $g(0)=0$

(나) $-1 \in \left\{ t \;\middle|\; \dfrac{g(t)-g(1)}{t-1} = g'(t),\ t\text{는 실수} \right\}$

(다) 실수 k에 대하여 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 점의 개수가 2가 되도록 하는 k의 최댓값은 $g\left(\dfrac{-1-\sqrt{7}}{3}\right)$이다.

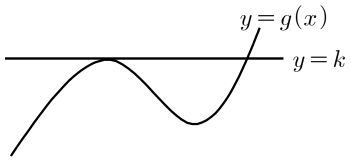
[정답 및 해설]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수를 $g(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (단, a, b, c는 상수)라 하면 $g(0)=0$에서 $c=0$이므로 $g(x)=x^3+ax^2+bx$ 이고 $g'(x)=3x^2+2ax+b$이다. 조건 (나)에서

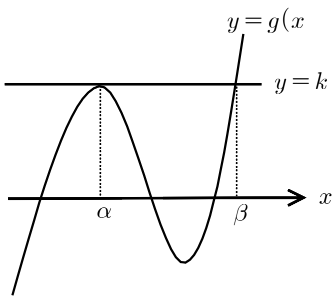
$$\frac{g(-1)-g(1)}{-1-1}=g'(-1)$$

$\dfrac{-1+a-b-(1+a+b)}{-2}=3-2a+b$, $1+b=3-2a+b$이므로 $a=1$.

조건 (다)에서 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$가 두 점에서 만나는 k의 최댓값이 $g\left(\dfrac{-1-\sqrt{7}}{3}\right)$이므로 그림과 같이 직선 $y=k$는 함수 $y=g(x)$의 극대가 되는 점을 지나야 한다.



실수 k의 최댓값이 $g\left(\dfrac{-1-\sqrt{7}}{3}\right)$이므로 방정식 $g(x)=g\left(\dfrac{-1-\sqrt{7}}{3}\right)$의 서로 다른 두 실근을 $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$라 하면 $g(\alpha)=g(\beta)=g\left(\dfrac{-1-\sqrt{7}}{3}\right)$이다.



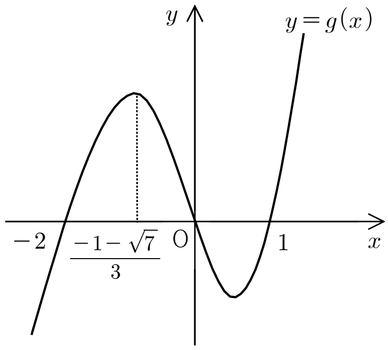
따라서 $\dfrac{-1-\sqrt{7}}{3}$ 은 α 또는 β 이다. 한편 $g(x)$는 최고차항의 계수가 양수이므로 $y=g(x)$는 $x=\alpha$에서 극댓값을 갖는다. 이때

$$g'(x)=3x^2+2x+b=3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+b-\frac{1}{3}$$

이므로 $\alpha<-\dfrac{1}{3}<\beta$ 이다. 즉

$$\alpha=\frac{-1-\sqrt{7}}{3},\ g'\left(\frac{-1-\sqrt{7}}{3}\right)=0 \quad g'\left(\frac{-1-\sqrt{7}}{3}\right)=3\times\left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2+b-\frac{1}{3}=0$$

에서 $b=-2$. 따라서 $g(x)=x^3+x^2-2x$



문제 3-3 [15점]

(문제 3-1)과 (문제 3-2)에서 구한 두 함수 $f(x), g(x)$에 대하여 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}$$

라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) 함수 $h(x)$를 구하시오.

(2) **(제시문2)**를 이용하여 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{n}h\left(2+\frac{3k}{n}\right)$의 값을 구하시오.

(3) 함수 $h(x)$에 대하여

$$4\times\lim_{x\to p+}\frac{h(x)-h(p)}{x-p}=\lim_{x\to p-}\frac{h(x)-h(p)}{x-p}$$

를 만족시키는 실수 p의 값을 모두 구하시오.

[정답 및 해설]

(1) 함수 $h(x)$는

$$h(x)=\frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}=\begin{cases} g(x) & (f(x)\ge g(x)) \\ f(x) & (f(x)<g(x)) \end{cases}$$

(문제 3-1)과 (문제 3-2)에서

$$f(x)=4(x^2+x-2)=4(x-1)(x+2),$$

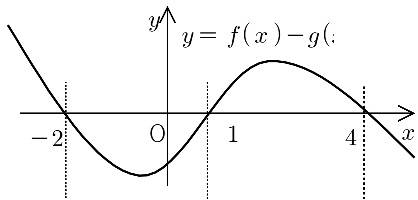
$$g(x)=x^3+x^2-2x=x(x-1)(x+2)$$

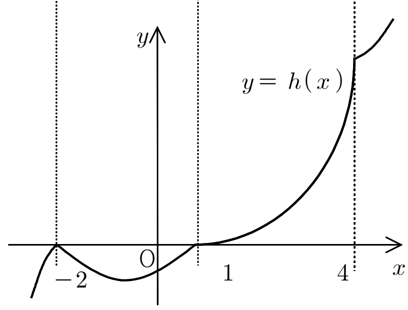
이므로

$$f(x)-g(x)=4(x-1)(x+2)-x(x-1)(x+2)$$
$$=-(x-1)(x+2)(x-4)$$

방정식 $f(x)-g(x)=0$의 근은 $x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=4$이다. 따라서

$$h(x)=\begin{cases} x^3+x^2-2x & (x<-2) \\ 4(x^2+x-2) & (-2\le x<1) \\ x^3+x^2-2x & (1\le x<4) \\ 4(x^2+x-2) & (x\ge 4) \end{cases}$$





<별해>

$f(x)=4(x^2+x-2)=4(x-1)(x+2)$, $g(x)=x^3+x^2-2x=x(x-1)(x+2)$

에서

$$h(x)=\frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}=\frac{x^3+5x^2+2x-8-|-x^3+3x^2+6x|}{2}$$

(2) **(제시문 2)**에 의하여 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{n}h\left(2+\frac{3k}{n}\right)=\int_{2}^{5}h(x)dx$ 이다.

$$h(x)=\begin{cases} x^3+x^2-2x & (x<-2) \\ 4(x^2+x-2) & (-2\le x<1) \\ x^3+x^2-2x & (1\le x<4) \\ 4(x^2+x-2) & (x\ge 4)\end{cases}$$

이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{n}h\left(2+\frac{3k}{n}\right)&=\int_{2}^{5}h(x)dx \\ &=\int_{2}^{4}g(x)dx+\int_{4}^{5}f(x)dx \\ &=\int_{2}^{4}(x^3+x^2-2x)dx+\int_{4}^{5}4(x^2+x-2)dx \\ &=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_2^4+4\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x\right]_4^5 \\ &=48+\frac{56}{3}+4\left(\frac{61}{3}+\frac{5}{2}\right)=158\end{aligned}$$

(3) 함수 $h(x)$에 대하여 $h'(x)$는

$$h(x)=\begin{cases} x^3+x^2-2x & (x<-2) \\ 4(x^2+x-2) & (-2\le x<1) \\ x^3+x^2-2x & (1\le x<4) \\ 4(x^2+x-2) & (x\ge 4)\end{cases},\quad h'(x)=\begin{cases} 3x^2+2x-2 & (x<-2) \\ 8x+4 & (-2<x<1) \\ 3x^2+2x-2 & (1<x<4) \\ 8x+4 & (x>4)\end{cases}$$

이므로 함수 $h(x)$가 $x=p$에서의 미분가능에 대하여 살펴보면 다음과 같다.

(Ⅰ) 함수 $h(x)$가 $x=p$에서 미분가능 할 때에는

$$\lim_{x\to p+}\frac{h(x)-h(p)}{x-p}=\lim_{x\to p-}\frac{h(x)-h(p)}{x-p}=\lim_{x\to p}\frac{h(x)-h(p)}{x-p}=h'(p)$$

이고 주어진 조건에 의해서 $4h'(p)=h'(p)$이므로 $h'(p)=0$이다. 함수 $h(x)$는 구간 $(-\infty,-2)$ 또는 $(1,\infty)$에서 증가하므로 $h'(p)=0$를 만족하는 p는 존재하지 않는다.

$-2<x<1$에서 $h'(x)=8x+4$이므로 $h'(p)=0$에서 $h'(p)=8p+4=0,\ \ p=-\frac{1}{2}$.

(Ⅱ) 함수 $h(x)$에 대하여 $h'(x)$가

$$h'(x)=\begin{cases} 3x^2+2x-2 & (x<-2) \\ 8x+4 & (-2<x<1) \\ 3x^2+2x-2 & (1<x<4) \\ 8x+4 & (x>4) \end{cases}$$

이므로 함수 $h(x)$가 $x=p$에서 미분가능하지 않을 가능성이 있는 부분은 $p=-2$ 또는 $p=1$ 또는 $p=4$일 때이다. 각각의 경우를 살펴보면 다음과 같다.

(i) $p=-2$일 때

$$4\times\lim_{x\to-2+}\frac{h(x)-h(-2)}{x+2}=4\times\lim_{x\to-2+}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=-48$$

$$\lim_{x\to-2-}\frac{h(x)-h(-2)}{x+2}=\lim_{x\to-2-}\frac{g(x)-g(-2)}{x+2}=6$$

이므로 문제의 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $p=4$일 때

$$4\times\lim_{x\to4+}\frac{h(x)-h(4)}{x-4}=4\times\lim_{x\to4+}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=144$$

$$\lim_{x\to4-}\frac{h(x)-h(4)}{x-4}=\lim_{x\to4-}\frac{g(x)-g(4)}{x-4}=54$$

이므로 문제의 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $p=1$일 때

$$4\times\lim_{x\to1+}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=4\times\lim_{x\to1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=12$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=12$$

이므로 $p=1$일 때 문제의 조건을 만족시킨다.

따라서 $p=1,\ -\frac{1}{2}$