2019학년도 한국산업기술대학교 수시모집 논술고사 (오후)

지원학과	수험번호	성 명

【답안 작성 시 유의사항】

1. 휴대폰, 전자계산기 등 전자기기는 소지할 수 없습니다.
2. 시험시간은 90분입니다.
3. 지원학과, 수험번호, 성명을 반드시 기입하십시오.
4. 답안 작성은 검정 펜으로 명확하게 작성하십시오.
5. 각 문항 번호 밑에 있는 공간에 답안을 작성하십시오.
6. 답안은 단계별로 논리적으로 근거와 이유를 설명하여 작성하십시오.
7. 시험이 종료될 때까지 퇴실할 수 없습니다.

감독확인

한국산업기술대학교
KOREA POLYTECHNIC UNIVERSITY

문제 1 (총30점)

문제 1-1 [10점]

실수 x에 대하여 두 조건 p, q가 다음과 같다.

p : $x^2 - 2x - 3 \neq 0$
q : $ax - 2a > 3x - 4$

p가 q이기 위한 필요조건이 되도록 하는 모든 정수 a의 합을 구하시오.

문제 1-2 [10점]

다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2-nx$와 직선 $y=x+n-\frac{1}{4}$이 만나는 서로 다른 두 점을 A_n, B_n이라 하자.

(나) 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$을 지름으로 하는 원의 넓이를 T_n이라 할 때, $T_n=\sum_{k=1}^{n}\pi a_k$를 만족시키는 등차수열 $\{a_n\}$이 존재한다.

(1) 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n을 구하시오.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n a_{n+1}}$의 값을 구하시오.

문제 1-3 [10점]

다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 자연수 n에 대하여 함수 $f_1(x)$를 $f_1(x)=\sqrt{n-x}$라 할 때,

$$f_2(x)=f_1(-x),\ f_3(x)=-2f_1(x),\ f_4(x)=-2f_1(-x)$$

이다.

(나) 곡선 $y=f_1(x)$위의 점 중에서 제1사분면에 있는 점을 P라 할 때, 점 P를 지나고 x축, y축과 각각 평행한 두 직선이 두 곡선 $y=f_2(x)$, $y=f_3(x)$와 만나는 점을 각각 Q, S라 하고, 점 Q를 지나고 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=f_4(x)$와 만나는 점을 R라 하자.

(1) 점 P의 x좌표가 $t\,(0<t<n)$일 때, 직사각형 PQRS의 넓이를 $S_n(t)$라 하자. $S_n(t)$를 구하시오.

(2) $S_n(t)$가 $t=f(n)$에서 최댓값이 $g(n)$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\{g(n)\}^2}{\{f(n)\}^3+n^3+1}$$

의 값을 구하시오.

문제 2 (총30점)

문제 2-1 [10점]

자연수 n에 대하여 다항함수 $f_n(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f_1(x)=1$
(나) 2이상의 자연수 n에 대하여 $\int_0^x f_n(t)\,dt = x^{2n-1}\int_0^x f_{n-1}(t)\,dt$

(1) $F_n(x)=\int_0^x f_n(t)dt$라 할 때, $F_n(x)$를 구하시오.

(2) $\sum_{n=2}^{10}\log_2\frac{\{f_n(1)\}^2}{f'_n(1)}$의 값을 구하시오.

문제 2-2 [10점]

다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 자연수 n에 대하여

$$ {}_{n}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n}\mathrm{C}_{r} = {}_{n+1}\mathrm{C}_{r} \quad (\text{단, } 1 \le r \le n) $$

(나) 음이 아닌 정수 m에 대하여 부등식

$$ x+y+z \le m $$

을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 $N(m)$이라 하자.

(1) $N(m) = {}_{m+3}\mathrm{C}_{3}$ 임을 보이시오.

(2) $\sum_{m=0}^{16} N(m) = {}_{20}\mathrm{C}_{k}$ 를 만족시키는 자연수 k의 값을 모두 구하시오.

문제 2-3 [10점]

두 상자 A, B에 숫자가 적힌 카드가 각각 6개씩 들어 있다. 상자 A에는 숫자 $1, 2, 3$이 적힌 카드가 각각 1개, 2개, 3개 들어 있고, 상자 B에는 숫자 $1, 2, 3$이 적힌 카드가 각각 a개, b개, c개 들어 있다. (단, $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$)

두 학생 창의와 실천이가 다음과 같은 규칙에 따라 창의는 상자 A에서, 실천이는 상자 B에서 각각 임의로 카드를 한 장씩 꺼낸다.

> (규칙1) 두 학생이 꺼낸 카드에 적힌 두 수가 서로 다르면 창의가, 같으면 실천이가 이기기로 한다.
>
> (규칙2) 이기는 사람은 자신이 꺼낸 카드에 적힌 수만큼 점수를 얻고, 지는 사람은 점수를 얻지 못한다.

창의와 실천이가 얻는 점수를 각각 확률변수 X, Y라 하자. 확률변수 Y의 평균 $E(Y)$가 $E(Y)=\dfrac{13}{18}$일 때, 창의가 이길 확률 p에 대하여 $6p+V(18X+5)$의 값을 구하시오.

(단, $V(X)$는 확률변수 X의 분산이다.)

문제 3 (총40점)

다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(제시문1) 함수의 극한의 성질

두 함수 $f(x), g(x)$에 대하여

$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ (L은 실수)이고 $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ 이면 $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ 이다.

(제시문2) 정적분

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 구간 $[a, b]$를 n등분하여 양 끝점과 각 분점의 x좌표를 차례로 $a = x_0, x_1, \cdots, x_n = b$라 하자. 각 소구간의 길이를 Δx라 하면

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, \ x_k = a + k\Delta x \ (k = 0, 1, \cdots, n)$$

이때

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}$$

의 값이 항상 존재하는 것이 알려져 있다. 이 극한값을 함수 $f(x)$의 a에서 b까지의 정적분이라 하고 이것을 기호로 $\int_a^b f(x)dx$와 같이 나타낸다. 즉,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}$$

문제 3-1 **[10점]**

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to 0+} \left\{ x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) - 4 \right\} = 0$

(나) $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = 12$

(제시문1)을 이용하여 곡선 $y = f(x)$위의 점 $(2, f(2))$에서의 접선의 방정식을 구하시오.

문제 3-2 [15점]

다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$를 구하시오.

(가) $g(0)=0$

(나) $-1 \in \left\{ t \;\middle|\; \dfrac{g(t)-g(1)}{t-1}=g'(t),\ t\text{는 실수} \right\}$

(다) 실수 k에 대하여 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 점의 개수가 2가 되도록 하는 k의 최댓값은 $g\left(\dfrac{-1-\sqrt{7}}{3}\right)$이다.

문제 3-3 [15점]

(문제 3-1)과 (문제 3-2)에서 구한 두 함수 $f(x), g(x)$에 대하여 함수 $h(x)$를

$$h(x) = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}$$

라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) 함수 $h(x)$를 구하시오.

(2) **(제시문2)**를 이용하여 $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{n} h\left(2 + \frac{3k}{n}\right)$의 값을 구하시오.

(3) 함수 $h(x)$에 대하여

$$4 \times \lim_{x \to p+} \frac{h(x) - h(p)}{x - p} = \lim_{x \to p-} \frac{h(x) - h(p)}{x - p}$$

를 만족시키는 실수 p의 값을 모두 구하시오.