2019학년도 수시모집 논술고사 정답 및 해설
(오전)

한국산업기술대학교
KOREA POLYTECHNIC UNIVERSITY

[문제 1] [총30점]

문제 1-1 [10점]

실수 x에 대하여 두 조건 p, q가 다음과 같다.

$p : |x-1| \le 5$
$q : x^2+(2-a)x-2a > 0$

$\sim q$가 p이기 위한 충분조건이 되도록 하는 모든 정수 a의 합을 구하시오.

[정답 및 해설]

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $\sim q$가 p이기 위한 충분조건이므로 진리집합의 포함 관계는 $Q^C \subset P$이다.

조건 p에서 $|x-1| \le 5$, $-4 \le x \le 6$이므로 $P=\{x|-4 \le x \le 6\}$이다.

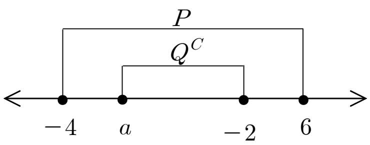
조건 q에서 $(x+2)(x-a) > 0$이므로 $Q^C=\{x|(x+2)(x-a) \le 0\}$

$(x+2)(x-a) \le 0$에서

(i) $a < -2$일 때

$a \le x \le -2$이므로

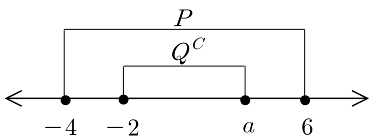
$-4 \le a < -2$



(ii) $a \ge -2$일 때

$-2 \le x \le a$이므로

$-2 \le a \le 6$



따라서 (i), (ii)에 의하여 $-4 \le a \le 6$이므로 정수 a는 $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$이고 모든 정수 a의 합은 11이다.

문제 1-2 [10점]

1을 제외한 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{bx+2a-3b+2}{x-1} & (x<3) \\ x-a & (x\geq 3) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다. (단, a, b는 상수이다.)

(가) $f(4)=3$
(나) 함수 $y=f(x)$의 치역은 $\{y\,|\,y<-1$ 또는 $y\geq 2\}$이다.

(1) a, b의 값을 구하고, $f(-2)+f(5)$의 값을 구하시오.

(2) 실수 k에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 교점의 개수를 $g(k)$라 할 때, $\lim_{k\to 2+} g(k)+\lim_{k\to b-} g(k)$의 값을 구하시오.

[정답 및 해설]

(1) 조건 (가)에서 $f(4)=4-a=3$이므로 $a=1$ …… ㉠

$x\geq 3$에서 $f(x)=x-a=x-1$이다.

$x<3$에서

$$f(x)=\frac{bx+2a-3b+2}{x-1}=\frac{bx-3b+4}{x-1}=b+\frac{-2b+4}{x-1}$$

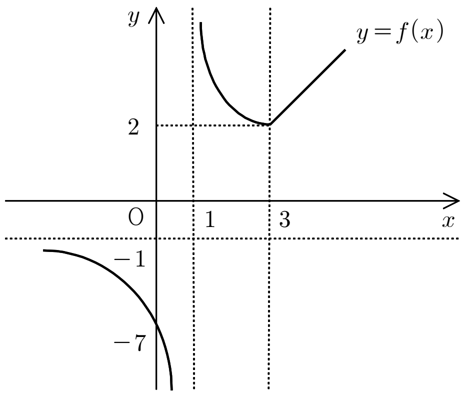
의 점근선의 방정식은 $x=1$, $y=b$이다. 조건 (나)에서 $y=f(x)$의 치역이 $y<-1$이므로 $b=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$$f(x)=\begin{cases} -1+\dfrac{6}{x-1} & (x<3) \\ x-1 & (x\geq 3) \end{cases}$$

$f(-2)=-1+\dfrac{6}{-2-1}=-3$, $f(5)=5-1=4$이므로 $f(-2)+f(5)=1$이다.

(2) $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



(i) $k>2$에서 곡선 $y=f(x)$와

직선 $y=k$가 두 점에서 만나므로

$\lim_{k\to 2+} g(k)=2$ …… ㉢

(ii) $k<-1$에서 곡선 $y=f(x)$와

직선 $y=k$가 한 점에서 만나므로

$\lim_{k\to b-} g(k)=\lim_{k\to -1-} g(k)=1$ …… ㉣

㉢, ㉣에 의하여

$$\lim_{k\to 2+} g(k)+\lim_{k\to b-} g(k)=\lim_{k\to 2+} g(k)+\lim_{k\to -1-} g(k)=2+1=3$$

문제 1-3 [10점]

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=f'(2-x)$이다.

(나) $x=0$에서 $f(x)$의 극댓값이 2이다.

(다) 함수 $y=f'(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 4이다.

$\sum_{k=1}^{5} f(k)$의 값을 구하시오.

[정답 및 해설]

함수 $f'(x)$는 이차함수이므로 $f'(x)=ax^2+bx+c$ ($a>0$, a, b, c는 상수)라 하자.

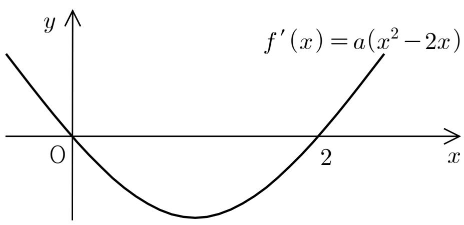
조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)$는 $f'(x)=f'(2-x)$이므로

$$ax^2+bx+c=a(2-x)^2+b(2-x)+c$$

즉, $(4a+2b)x-(4a+2b)=0$에서 $b=-2a$이고 $f'(x)=ax^2-2ax+c$

조건 (나)에서 $f'(0)=0$이므로 $c=0$이다. 따라서 $f'(x)=a(x^2-2x)$

조건 (다)에서 함수 $y=f'(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 4이므로



$$4=-\int_0^2 a(x^2-2x)dx=-a\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_0^2=-a\left(\frac{8}{3}-4\right)=\frac{4}{3}a, \quad a=3$$

$f'(x)=3(x^2-2x)=3x^2-6x$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(3x^2-6x)dx=x^3-3x^2+C$ (단, C는 적분 상수)

이고 조건 (나)에 의해 $f(0)=2$이므로 $C=2$이다. 따라서 $f(x)=x^3-3x^2+2$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5} f(k)&=\sum_{k=1}^{5}(k^3-3k^2+2)\\&=\sum_{k=1}^{5}k^3-3\sum_{k=1}^{5}k^2+\sum_{k=1}^{5}2\\&=\left(\frac{5\times6}{2}\right)^2-3\times\left(\frac{5\times6\times11}{6}\right)+2\times5\\&=225-165+10=70\end{aligned}$$

[문제 2] [총30점]

문제 2-1 [10점]

자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 삼각형 $\mathrm{OP}_k\mathrm{Q}_k$의 넓이를 S_k라 하자.

(가) 곡선 $y=-x^2+4x$와 직선 $y=x$가 만나는 점 중에서 원점 O가 아닌 점을 A라 하자.

(나) 선분 OA를 n등분한 점 중에서 점 O에서 가까운 순서대로 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \cdots, \mathrm{P}_{n-1}$이라 하자. (단, n은 2이상의 자연수이다.)

(다) 점 $\mathrm{P}_k(k=1, 2, 3, \cdots, n-1)$를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=-x^2+4x$와 만나는 점을 Q_k라 하자.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1}S_k$를 정적분으로 나타내고, 그 값을 구하시오.

[정답 및 해설]

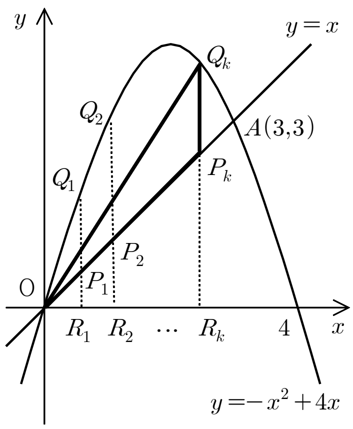
$-x^2+4x=x$에서 $x=3$이므로 점 A의 좌표는 $(3,3)$이다.

점 $\mathrm{P}_k(k=1, 2, 3, \cdots, n-1)$에서 x축에 내린 수선의 발을 R_k라 하면 $\mathrm{R}_k\left(\frac{3k}{n}, 0\right)$

이므로 $\mathrm{P}_k\left(\frac{3k}{n}, \frac{3k}{n}\right)$, $\mathrm{Q}_k\left(\frac{3k}{n}, -\left(\frac{3k}{n}\right)^2+4\left(\frac{3k}{n}\right)\right)$이다.

삼각형 $\mathrm{OP}_k\mathrm{Q}_k$의 넓이 S_k는

$$S_k=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k}\times\overline{\mathrm{OR}_k}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{-\left(\frac{3k}{n}\right)^2+4\left(\frac{3k}{n}\right)-\frac{3k}{n}\right\}\times\frac{3k}{n}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{-\left(\frac{3k}{n}\right)^2+3\left(\frac{3k}{n}\right)\right\}\frac{3k}{n}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{-\left(\frac{3k}{n}\right)^3+3\left(\frac{3k}{n}\right)^2\right\}$$



$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S_k=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left\{-\left(\frac{3k}{n}\right)^3+3\left(\frac{3k}{n}\right)^2\right\}\frac{1}{n}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{-\left(\frac{3k}{n}\right)^3+3\left(\frac{3k}{n}\right)^2\right\}\frac{1}{n}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{-\left(\frac{3k}{n}\right)^3+3\left(\frac{3k}{n}\right)^2\right\}\frac{3}{n}$$
$$=\frac{1}{6}\int_0^3(-x^3+3x^2)dx$$
$$=\frac{1}{6}\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3\right]_0^3=\frac{9}{8}$$

문제 2-2 [10점]

다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 자연수 n에 대하여

$$_n\mathrm{C}_{r-1} + {}_n\mathrm{C}_r = {}_{n+1}\mathrm{C}_r \quad (\text{단}, \ 1 \le r \le n)$$

(나) 6 이상의 자연수 k에 대하여 방정식

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = k$$

를 만족시키는 자연수 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$의 모든 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$의 개수를 $N(k)$라 하자.

(1) $N(k) = {}_6\mathrm{H}_{k-6}$임을 보이시오.

(2) $\displaystyle\sum_{k=6}^{20} N(k) = {}_{20}\mathrm{C}_r$를 만족시키는 자연수 r의 값을 모두 구하시오.

[정답 및 해설]

(1) 6 이상의 자연수 k에 대하여 방정식 $x_1 + x_2 + \cdots + x_6 = k$을 만족시키는 자연수 $x_1, x_2, \cdots, x_6$의 모든 순서쌍 $(x_1, x_2, \cdots, x_6)$의 개수는 음이 아닌 정수 $x_1{}', x_2{}', \cdots, x_6{}'$에 대하여 $x_1 = 1 + x_1{}', x_2 = 1 + x_2{}', \cdots, x_6 = 1 + x_6{}'$

라 하고 $x_1 + x_2 + \cdots + x_6 = k$에 대입하면 $x_1{}' + x_2{}' + \cdots + x_6{}' = k - 6$

이므로 방정식 $x_1{}' + x_2{}' + \cdots + x_6{}' = k-6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $x_1{}', x_2{}', \cdots, x_6{}'$의 모든 순서쌍 $(x_1{}', x_2{}', \cdots, x_6{}')$의 개수와 같다.

따라서 $N(k)$는 서로 다른 6개에서 중복을 허락하여 $(k-6)$개를 택하는 중복조합의 수 ${}_6H_{k-6}$이다. 그러므로 $N(k) = {}_6H_{k-6} = {}_{k-1}C_5$

(2) $N(k) = {}_6H_{k-6} = {}_{k-1}C_{k-6} = {}_{k-1}C_5$ 이므로

$N(6) = {}_6H_0 = {}_5C_0 = {}_5C_5, \ N(7) = {}_6H_1 = {}_6C_1 = {}_6C_5,$

$N(8) = {}_6H_2 = {}_7C_2 = {}_7C_5, \cdots, \ N(20) = {}_6H_{14} = {}_{19}C_{14} = {}_{19}C_5$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=6}^{20} N(k) &= N(6) + N(7) + N(8) + \cdots + N(20) \\
&= {}_5C_0 + {}_6C_1 + {}_7C_2 + \cdots + {}_{19}C_{14} \\
&= {}_6C_0 + {}_6C_1 + {}_7C_2 + \cdots + {}_{19}C_{14} \\
&= {}_7C_1 + {}_7C_2 + {}_8C_3 + \cdots + {}_{19}C_{14} \qquad (\text{제시문 (가)에 의하여}) \\
&= {}_8C_2 + {}_8C_3 + \cdots + {}_{19}C_{14} \\
&\ \ \vdots \\
&= {}_{19}C_{13} + {}_{19}C_{14} \\
&= {}_{20}C_{14} = {}_{20}C_6
\end{aligned}$$

<별해> $\sum_{k=6}^{20} N(k) = N(6)+N(7)+N(8)+\cdots+N(20)$

$= {}_5C_5 + {}_6C_5 + {}_7C_5 + \cdots + {}_{19}C_5$

$= {}_6C_6 + {}_6C_5 + {}_7C_5 + \cdots + {}_{19}C_5$

$= {}_7C_6 + {}_7C_5 + {}_8C_5 + \cdots + {}_{19}C_5$ (제시문 (가)에 의하여)

$= {}_8C_6 + {}_8C_5 + \cdots + {}_{19}C_5$

$\vdots$

$= {}_{19}C_6 + {}_{19}C_5$

$= {}_{20}C_6 = {}_{20}C_{14}$

${}_{20}C_{14} = {}_{20}C_6$ 이므로 $r=14$ 또는 $r=6$ 이다.

문제 2-3 [10점]

다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 일반항이 분수의 꼴이고 분모가 서로 다른 두 일차식의 곱이면

$$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$$

임을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있다.

(나) 한 개의 주사위를 n번 던지는 시행에 대하여 n번째에서 처음으로 주사위의 눈의 수가 6의 약수가 나오는 사건의 확률을 P_n이라 하자.

(1) 제시문 (나)의 확률 P_n을 구하시오.

(2) 제시문 (가)를 이용하여 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3(2n+3)}{2n(n+1)}P_n$의 값을 구하시오.

[정답 및 해설]

(1) 6의 약수는 $1, 2, 3, 6$이므로 한 개의 주사위를 던져서 6의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$이고, 6의 약수의 눈이 나오지 않을 확률은 $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$이다. 한 개의 주사위를 n번 던지는 시행에서 $(n-1)$번째까지 6의 약수의 눈이 나오지 않고 n번째 처음으로 6의 약수의 눈이 나와야 하므로 $P_n=\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ 이다.

(2)
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{3(2k+3)}{2k(k+1)}P_k &=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{3(2k+3)}{2k(k+1)}\times\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right\}\\ &=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2k+3}{k(k+1)}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right\}\\ &=\sum_{k=1}^{n}\left[\left\{\frac{2k}{k(k+1)}+\frac{3}{k(k+1)}\right\}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right]\\ &=\sum_{k=1}^{n}\left[\left\{\frac{2}{k+1}+3\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\right\}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right] \quad \text{(제시문 (가)에 의하여)}\\ &=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\\ &=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k\times 3^{k-2}}-\frac{1}{(k+1)\times 3^{k-1}}\right\}\end{aligned}$$

$$=\left(3-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3\times3}\right)+\left(\frac{1}{3\times3}-\frac{1}{4\times3^2}\right)+\cdots$$

$$+\left\{\frac{1}{n\times3^{n-2}}-\frac{1}{(n+1)\times3^{n-1}}\right\}$$

$$=3-\frac{1}{(n+1)\times3^{n-1}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3(2n+3)}{2n(n+1)}P_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{3(2k+3)}{2k(k+1)}P_k=\lim_{n\to\infty}\left\{3-\frac{1}{(n+1)\times3^{n-1}}\right\}=3$$

[문제 3] [총40점]

다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(제시문1) 일대일 대응

함수 $f: X \to Y$에서 정의역 X의 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$가 성립하고 치역과 공역이 서로 같을 때, 함수 f를 일대일 대응이라 한다.

(제시문2) 함수의 연속

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라 한다.

① $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있다.

② 극한값 $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재한다.

($\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = L$ 일 때, $\lim_{x \to a} f(x) = L$이다.)

③ $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

(제시문3) 평균값 정리

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린 구간 (a, b)에서 미분가능할 때,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

인 c가 열린 구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

(제시문4) 거듭제곱근

실수 a에 대하여 n이 2이상의 자연수일 때, n제곱하여 a가 되는 수, 즉 방정식

$$x^n = a$$

를 만족시키는 수 x를 a의 n제곱근이라 한다. 또한 $a>0$일 때, a의 n제곱근 중에서 양의 실수인 것을 $\sqrt[n]{a}$라고 한다.

문제 3-1 [10점]

집합 $X=\{x|1\le x\le a,\, a>1\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 $f(x)=(x-1)^3+b$가 일대일 대응일 때, 다음 물음에 답하시오. (단, a, b는 상수이다.)

(1) a, b의 값을 구하고, 함수 $f(x)$를 구하시오.

(2) 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[1, a]$에서 **(제시문3)**의 평균값 정리를 만족시키는 상수 c의 값을 구하시오.

[정답 및 해설]

(1) 함수 $f(x)=(x-1)^3+b$가 닫힌 구간 $[1, a]$에서 증가하고 함수 $f(x)$가 일대일대응이므로 **(제시문1)**에 의하여 $f(1)=1$이고 $f(a)=a$이다. $f(1)=1$에서 $b=1$이고, $f(a)=a$에서

$$(a-1)^3+1=a,\ \ a(a-1)(a-2)=0,\ \ a=0,\ 1,\ 2$$

이때 $a>1$이므로 $a=2$이다.

따라서 함수 $f(x)$는 $f(x)=(x-1)^3+1\ (1\le x\le 2)$이다.

(2) 함수 $f(x)=(x-1)^3+1$이 닫힌 구간 $[1, 2]$에서 연속이고 열린 구간 $(1, 2)$에서 미분가능하므로 **(제시문3)** 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=f'(c),\ \ \frac{2-1}{2-1}=3c^2-6c+3$$

$$c=\frac{3-\sqrt{3}}{3}\ \ \text{또는}\ \ c=\frac{3+\sqrt{3}}{3}$$

$1<c<2$이므로 $c=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$이다.

문제 3-2 [15점]

(문제 3-1)에서 구한 상수 a, b에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수를 $g(x)$라 할 때, 물음에 답하시오.

(가) $g(x)=(x-1)^3+b \quad (1 \le x \le a)$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=g(x-1)+2p$인 상수 p가 존재한다.

(1) 상수 p의 값을 구하시오.

(2) 닫힌 구간 $[-1, 3]$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프를 그리시오.

(3) 함수 $g(x)$의 역함수를 $u(x)$라 할 때, $\int_{-1}^{3} u(x)\,dx$의 값을 구하시오.

[정답 및 해설]

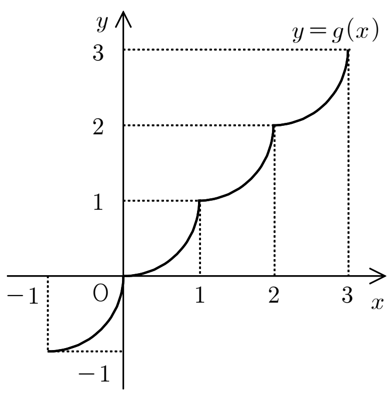
(1) (문제3-1)에서 구한 a, b를 대입하면 $g(x)=(x-1)^3+1 \ (1 \le x \le 2)$이다.

조건 (나)에서 $x=2$이면 $g(2)=g(1)+2p$이므로 $2=1+2p$에서 $p=\frac{1}{2}$이다.

(2) 함수 $g(x)=(x-1)^3+1 \ (1 \le x \le 2)$는 조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=g(x-1)+1$을 만족시키므로 $2 \le x \le 3$에서 $g(x)$의 그래프는 $g(x)=(x-1)^3+1 \ (1 \le x \le 2)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다. 즉, $g(x)=(x-2)^2+2 \ (2 \le x \le 3)$

함수 $g(x)=(x-1)^3+1 \ (1 \le x \le 2)$는 조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=g(x+1)-1$을 만족시키므로 $0 \le x \le 1$에서 $g(x)$의 그래프는 $g(x)=(x-1)^3+1 \ (1 \le x \le 2)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다. 즉, $g(x)=x^3 \ (0 \le x \le 1)$

함수 $g(x)=x^3 \ (0 \le x \le 1)$는 조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=g(x+1)-1$을 만족시키므로 $-1 \le x \le 0$에서 $g(x)$의 그래프는 $g(x)=x^3 \ (0 \le x \le 1)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다. 즉, $g(x)=(x+1)^3-1 \ (-1 \le x \le 0)$



(3) $\int_{-1}^{3} u(x)\,dx = \int_{-1}^{0} u(x)dx + \int_{0}^{3} u(x)dx$

두 곡선 $y=g(x)$와 $y=u(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

(i) $\int_{-1}^{0} u(x)dx = -\int_{-1}^{0} \{g(x)-(-1)\}dx = -\int_{-1}^{0} \{(x+1)^3-1+1\}dx$

$$= -\int_{-1}^{0} (x^3+3x^2+3x+1)dx$$

$$= -\left[\frac{x^4}{4}+x^3+\frac{3}{2}x^2+x\right]_{-1}^{0} = -\frac{1}{4}$$

(ii) $\int_{0}^{3} u(x)dx = 3\times 3 - \int_{0}^{3} g(x)\,dx = 9-\left(1+2+3\int_{0}^{1} x^3 dx\right) = 6-3\int_{0}^{1} x^3\,dx = \frac{21}{4}$

따라서 (i), (ii)에 의하여

$$\int_{-1}^{3} u(x)\,dx = \int_{-1}^{0} u(x)dx + \int_{0}^{3} u(x)dx = -\frac{1}{4}+\frac{21}{4} = 5$$

문제 3-3 [15점]

(문제 3-2)에서 구한 함수 $g(x)$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 자연수 n에 대하여 $G(n)$을

$$G(n)=\int_{n}^{n+1} g(x)\,dx$$

라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\frac{45}{G(n)G(n+1)}$ 의 값을 구하시오.

(2) 함수

$$H(x)=\begin{cases} g(x) & (x<d) \\ \frac{5}{2}x^3-1 & (x\ge d)\end{cases}$$

에 대하여 $x=d$에서 함수 $H(x)$는 불연속이고, 함수 $|H(x)|$는 연속이 되도록 하는 상수 d의 값을 구하시오.

[정답 및 해설]

(1) 자연수 n에 대하여 닫힌 구간 $[n, n+1]$에서 함수 $y=g(x)$는 $g(x)=(x-n)^3+n$ 이므로

$$G(n)=\int_{n}^{n+1} g(x)dx=\int_{n}^{n+1}\{(x-n)^3+n\}dx=n+\int_0^1 x^3\,dx=n+\frac{1}{4}$$

$G(n)=n+\dfrac{1}{4}$ 이므로

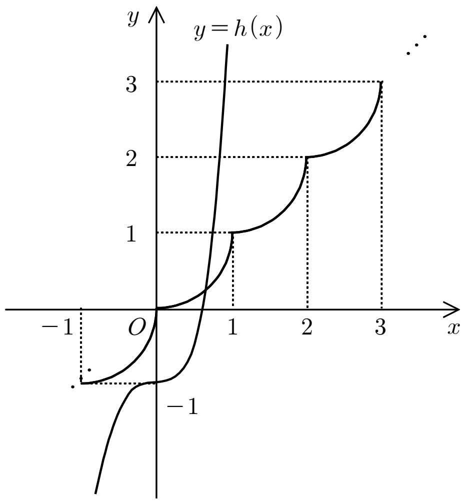
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{10}\frac{45}{G(n)G(n+1)} &= \sum_{n=1}^{10}\frac{45}{\left(n+\frac{1}{4}\right)\left(n+\frac{5}{4}\right)}\\ &=45\sum_{n=1}^{10}\frac{16}{(4n+1)(4n+5)}=180\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n+5}\right)\\ &=180\left\{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{13}\right)+\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{17}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{41}-\frac{1}{45}\right)\right\}\\ &=180\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{45}\right)=32\end{aligned}$$

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\frac{45}{G(n)G(n+1)}=32$

(2) (Ⅰ) 함수 $h(x)$를 $h(x)=\dfrac{5}{2}x^3-1$라 하면 두 곡선 $y=g(x)$와 $y=h(x)$의 그래프는 다음과 같다. 두 곡선 $y=g(x)$와 $y=h(x)$는 구간 $[0,1]$에서 만나므로

$x^3=\dfrac{5}{2}x^3-1$, $x^3=\dfrac{2}{3}$, $x=\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}$

따라서 $H(x)$는 $x=d\left(d\neq\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)$에서 불연속이므로 $d\in\left\{x \,\middle|\, x\neq\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \text{ 인 실수 }\right\}$이다.



(Ⅱ) 함수 $|H(x)|$가 $x=d$에서 연속이 되려면 **(제시문2)**에 의하여

$$|H(d)| = \lim_{x\to d-}|H(x)| = \lim_{x\to d+}|H(x)|,\quad |g(d)|=|h(d)|$$

(ⅰ) $g(d)=h(d)$ 일 때

(Ⅰ)에 의하여 함수 $|H(x)|$는 $x=\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ 에서 연속이다.

(ⅱ) $g(d)=-h(d)$일 때

함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 증가한다. 그리고 함수 $y=-h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 감소한다.

$g(0)=0,\ -h(0)=1,\ g(1)=1,\ -h(1)=-\frac{3}{2}$ 이므로 구간 $[0,1]$에서

함수 $g(x)=x^3$의 그래프와 곡선 $y=-h(x)$가 만난다.

$d^3=-\left(\frac{5}{2}d^3-1\right),\ d^3=\frac{2}{7}$. **(제시문4)**에 의하여 $d=\sqrt[3]{\frac{2}{7}}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 함수 $|H(x)|$는 $d=\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ 와 $d=\sqrt[3]{\frac{2}{7}}$ 일 때만 연속이 된다.

따라서 (Ⅰ), (Ⅱ)에 의하여 함수 $H(x)$가 $x=d$에서 불연속이고, 함수 $|H(x)|$가 연속이 되는 d의 값은 $d=\sqrt[3]{\frac{2}{7}}$ 이다.