

2019학년도 한국산업기술대학교 수시모집 논술고사 (오전)

지원학과	성명	수험번호	소속고등학교

【답안 작성 시 유의사항】

1. 휴대폰 등 통신기기는 소지할 수 없습니다.
2. 시험시간은 90분입니다.
3. 지원학과, 성명, 수험번호, 소속고등학교명을 반드시 기입하십시오.
4. 답안 작성은 연필 또는 검정 펜으로 명확하게 작성하십시오.
5. 각 문항 번호 밑에 있는 공간에 답안을 작성하십시오.
6. 답안은 단계별로 논리적으로 근거와 이유를 설명하여 작성하십시오.
7. 시험이 종료될 때까지 퇴실할 수 없습니다.

감독확인

문제 1 (총30점)

문제 1-1 [10점]

실수 x 에 대하여 두 조건 p, q 가 다음과 같다.

$$p : |x-1| \leq 5$$

$$q : x^2 + (2-a)x - 2a > 0$$

$\sim q$ 가 p 이기 위한 충분조건이 되도록 하는 모든 정수 a 의 합을 구하시오.

문제 1-2 [10점]

1을 제외한 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x) = \begin{cases} \frac{bx+2a-3b+2}{x-1} & (x < 3) \\ x-a & (x \geq 3) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다. (단, a, b 는 상수이다.)

(가) $f(4) = 3$

(나) 함수 $y = f(x)$ 의 치역은 $\{y \mid y < -1 \text{ 또는 } y \geq 2\}$ 이다.

(1) a, b 의 값을 구하고, $f(-2) + f(5)$ 의 값을 구하시오.

(2) 실수 k 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = k$ 가 만나는 교점의 개수를 $g(k)$ 라 할 때,

$\lim_{k \rightarrow 2^+} g(k) + \lim_{k \rightarrow b^-} g(k)$ 의 값을 구하시오.

문제 1-3 [10점]

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) = f'(2-x)$ 이다.
- (나) $x=0$ 에서 $f(x)$ 의 극댓값이 2이다.
- (다) 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 4이다.

$\sum_{k=1}^5 f(k)$ 의 값을 구하시오.

문제 2 (총30점)

문제 2-1 [10점]

자연수 k 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 삼각형 OP_kQ_k 의 넓이를 S_k 라 하자.

- (가) 곡선 $y = -x^2 + 4x$ 와 직선 $y = x$ 가 만나는 점 중에서 원점 O 가 아닌 점을 A 라 하자.
- (나) 선분 OA 를 n 등분한 점 중에서 점 O 에서 가까운 순서대로 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}$ 이라 하자. (단, n 은 2이상의 자연수이다.)
- (다) 점 $P_k(k=1, 2, 3, \dots, n-1)$ 를 지나고 y 축에 평행한 직선이 곡선 $y = -x^2 + 4x$ 와 만나는 점을 Q_k 라 하자.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} S_k$ 를 정적분으로 나타내고, 그 값을 구하시오.

문제 2-2 [10점]

다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 자연수 n 에 대하여

$${}_n C_{r-1} + {}_n C_r = {}_{n+1} C_r \quad (\text{단, } 1 \leq r \leq n)$$

(나) 6 이상의 자연수 k 에 대하여 방정식

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = k$$

를 만족시키는 자연수 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ 의 모든 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ 의 개수를 $N(k)$ 라 하자.

(1) $N(k) = {}_6 H_{k-6}$ 임을 보이시오.

(2) $\sum_{k=6}^{20} N(k) = {}_{20} C_r$ 를 만족시키는 자연수 r 의 값을 모두 구하시오.

문제 2-3 [10점]

다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 일반항이 분수의 꼴이고 분모가 서로 다른 두 일차식의 곱이면

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{B-A} \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right)$$

임을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있다.

(나) 한 개의 주사위를 n 번 던지는 시행에 대하여 n 번째에서 처음으로 주사위의 눈의 수가 6의 약수가 나오는 사건의 확률을 P_n 이라 하자.

(1) 제시문 (나)의 확률 P_n 을 구하시오.

(2) 제시문 (가)를 이용하여 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(2n+3)}{2n(n+1)} P_n$ 의 값을 구하시오.

문제 3 (총40점)

다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(제시문1) 일대일 대응

함수 $f: X \rightarrow Y$ 에서 정의역 X 의 원소 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 가 성립하고 치역과 공역이 서로 같을 때, 함수 f 를 일대일 대응이라 한다.

(제시문2) 함수의 연속

함수 $f(x)$ 가 실수 a 에 대하여 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 연속이라 한다.

① $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 정의되어 있다.

② 극한값 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 가 존재한다.

($\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = L$ 일 때, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 이다.)

③ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

(제시문3) 평균값 정리

함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린 구간 (a, b) 에서 미분가능할 때,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

인 c 가 열린 구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다.

(제시문4) 거듭제곱근

실수 a 에 대하여 n 이 2이상의 자연수일 때, n 제곱하여 a 가 되는 수, 즉 방정식

$$x^n = a$$

를 만족시키는 수 x 를 a 의 n 제곱근이라 한다. 또한 $a > 0$ 일 때, a 의 n 제곱근 중에서 양의 실수인 것을 $\sqrt[n]{a}$ 라고 한다.

문제 3-1 [10점]

집합 $X = \{x | 1 \leq x \leq a, a > 1\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 $f(x) = (x-1)^3 + b$ 가 일대일 대응일 때, 다음 물음에 답하시오. (단, a, b 는 상수이다.)

- (1) a, b 의 값을 구하고, 함수 $f(x)$ 를 구하시오.
- (2) 함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[1, a]$ 에서 **(제시문3)**의 평균값 정리를 만족시키는 상수 c 의 값을 구하시오.

문제 3-2 [15점]

(문제 3-1)에서 구한 상수 a, b 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수를 $g(x)$ 라 할 때, 물음에 답하시오.

$$(가) \quad g(x) = (x-1)^3 + b \quad (1 \leq x \leq a)$$

(나) 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) = g(x-1) + 2p$ 인 상수 p 가 존재한다.

- (1) 상수 p 의 값을 구하시오.
- (2) 닫힌 구간 $[-1, 3]$ 에서 함수 $y = g(x)$ 의 그래프를 그리시오.
- (3) 함수 $g(x)$ 의 역함수를 $u(x)$ 라 할 때, $\int_{-1}^3 u(x) dx$ 의 값을 구하시오.

문제 3-3 [15점]

(문제 3-2)에서 구한 함수 $g(x)$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 자연수 n 에 대하여 $G(n)$ 을

$$G(n) = \int_n^{n+1} g(x) dx$$

라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} \frac{45}{G(n)G(n+1)}$ 의 값을 구하시오.

(2) 함수

$$H(x) = \begin{cases} g(x) & (x < d) \\ \frac{5}{2}x^3 - 1 & (x \geq d) \end{cases}$$

에 대하여 $x=d$ 에서 함수 $H(x)$ 는 불연속이고, 함수 $|H(x)|$ 는 연속이 되도록 하는 상수 d 의 값을 구하시오.