2019학년도 한국산업기술대학교 모의 논술고사

지원학과	성명	수험번호	소속고등학교

【답안 작성 시 유의사항】

- 휴대폰 등 통신기기는 소지할 수 없습니다.
- 시험시간은 90분입니다.
- 지원학과, 성명, 수험번호, 소속고등학교명을 반드시 기입하십시오.
- 답안 작성은 연필 또는 펜으로 명확하게 작성하십시오.
- 각 문항 번호 밑에 있는 공간에 답을 작성하십시오.
- 답안은 단계별로 논리적으로 근거와 이유를 설명하여 작성하십시오.
- 시험이 종료될 때까지 퇴실할 수 없습니다.

감독확인

한국산업기술대학교
KOREA POLYTECHNIC UNIVERSITY

문제 1 [총30점]

[문제 1-1] [10점]

전체집합 $U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$의 세 부분집합 X, Y, Z가 다음 조건을 만족시킬 때 집합 X중에서 원소들의 합이 최소가 되는 것을 구하시오.

(단, $n(A)$는 집합 A의 원소의 개수이다.)

(가) $X\cup\{2,3,4,6\}=Y$, $Y-\{2,4\}=Z$, $Z\cap\{1,2,3,5,7\}=\{1,3,5,7\}$
(나) $n(X)=4$, $n(Z)=5$

<정답 및 해설>

(i) $Z\cap\{1,2,3,5,7\}=\{1,3,5,7\}$이므로 $\{1,3,5,7\}\subset Z$이고 $2\not\in Z$이다. 따라서 집합 Z는

$$\{1,3,5,7\},\ \{1,3,4,5,7\},\ \{1,3,5,6,7\},\ \{1,3,4,5,6,7\}\ \cdots\cdots ㉠$$

중 하나이다. 한편 $Y-\{2,4\}=Z$에서 $4\not\in Z$이고, $n(Z)=5$이므로 ㉠중에서 $Z=\{1,3,5,6,7\}$이다.

(ii) $Z=\{1,3,5,6,7\}$이고 $Y-\{2,4\}=Z$이므로 $\{1,3,5,6,7\}\subset Y$이다.

$Y\subset U$이므로 집합 Y는

$$\{1,3,5,6,7\},\ \{1,2,3,5,6,7\},\ \{1,3,4,5,6,7\},\ \{1,2,3,4,5,6,7\}\cdots\cdots ㉡$$

중 하나이다. 한편 $X\cup\{2,3,4,6\}=Y$이므로 $\{2,3,4,6\}\subset Y$이다. 따라서 ㉡중에서 $Y=\{1,2,3,4,5,6,7\}$이다.

(iii) $Y=\{1,2,3,4,5,6,7\}$이고 $X\cup\{2,3,4,6\}=Y$이므로 집합 X는 $1,5,7$을 반드시 포함하여야하고, $n(X)=4$이므로

$$\{1,2,5,7\}, \{1,3,5,7\}, \{1,4,5,7\}, \{1,5,6,7\}\cdots\cdots ㉢$$

중 하나이다. 따라서 ㉢중 원소의 합이 최소인 것은 $\{1,2,5,7\}$이다.

[문제 1-2] [10점]

세 집합

$$N=\{n \mid n\text{은 자연수}\},\ X=\{x \mid x\text{는 정수}\},\ Y=\{y \mid 0 \le y < 1\text{인 실수}\}$$

에 대하여 두 함수

$$f: N \to X,\ g: N \to Y\text{를 } \log_2 n = f(n) + g(n)$$

으로 정의하자. 다음 조건을 만족시키는 자연수 m, n의 순서쌍 (m, n)을 모두 구하시오.

(가) $1 \le m \le 4,\ 1 \le n \le 4$
(나) $f(m) = f(n) + 1$
(다) $g(m^2) = g(n)$

<정답 및 해설>

함수 $f: N \to X,\ g: N \to Y$를 $\log_2 n = f(n) + g(n)$이라 정의하면

함수 $f(n)$는 $\log_2 n$의 정수부분이고, 함수 $g(n)$는 $\log_2 n$의 소수부분이다.

(i) 조건 (가)의 $1 \le m \le 4,\ 1 \le n \le 4$에서

$$0 \le \log_2 m \le 2,\ \ 0 \le \log_2 n \le 2$$

이므로 $f(m) = 0, 1, 2$이고 $f(n) = 0, 1, 2$이다.

(ii) 조건 (나)에서 $f(m) = f(n) + 1$이므로

$f(n) = 0,\ \ f(m) = 1$인 경우와 $f(n) = 1,\ f(m) = 2$인 경우가 된다.

① $f(n) = 0,\ f(m) = 1$일 때 $n = 1,\ m = 2, 3$이므로 (m, n)의 순서쌍은 $(2, 1), (3, 1)$이다.

② $f(n) = 1,\ f(m) = 2$일 때 $n = 2, 3,\ m = 4$이므로 (m, n)의 순서쌍은 $(4, 2), (4, 3)$이다.

따라서 ①, ②에 의해 (m, n)의 순서쌍은 $(2, 1), (3.1), (4, 2), (4, 3)$이다.

(iii) 조건 (다)에서 $g(m^2) = g(n)$이므로 $\log_2 m^2$과 $\log_2 n$의 소수부분은 같다.

따라서 $\log_2 m^2 - \log_2 n$은 정수 값을 갖는다. 즉,

$$\log_2 m^2 - \log_2 n = \log_2 \frac{m^2}{n}$$

은 정수이므로 $\dfrac{m^2}{n} = 2^k$ (k는 정수)을 만족하는 (m, n)의 순서쌍은 $(2, 1), (4, 2)$이다.

그러므로 (i), (ii), (iii)에 의해 조건 (가), (나), (다)를 만족하는 (m, n)의 순서쌍은 $(2, 1), (4, 2)$이다.

[문제 1-3] [10점] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

(가) 자연수 n에 대하여 열린 구간 $(0,1)$에서 함수 $g(x)$를 $g(x)=[n\sqrt{x}\,]$라 하자.
(단, 실수 x에 대하여 $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

(나) 함수 $f(x)$는 다음 두 조건을 만족시키는 가장 낮은 차수의 다항함수이다.
(1) $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이다.
(2) $f(x)g(x)$는 열린 구간 $(0,1)$에서 연속이다.

제시문 (나)의 다항함수 $f(x)$를 구하고 방정식 $f(x)=0$의 모든 해의 합을 S_n라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$의 값을 구하시오.

<정답 및 해설>

$g(x)=[n\sqrt{x}\,]$는 $n\sqrt{x}=k$ (단, k는 정수)를 만족시키는 x에서 불연속이다. 즉

$$n\sqrt{x}=k,\ \sqrt{x}=\frac{k}{n},\ x=\frac{k^2}{n^2}$$

일 때 불연속이다. 따라서 $g(x)$가 불연속인 x는 $0<x<1$이므로

$$x=\frac{k^2}{n^2}\quad(k=1,2,\cdots,n-1)$$

이다. $f(x)g(x)$가 열린 구간 $(0,1)$에서 연속이기 위해서는 $f\left(\frac{k^2}{n^2}\right)=0\ \ (k=1,2,\cdots,n-1)$ 이어야 하고 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$$f(x)=\left(x-\frac{1}{n^2}\right)\left(x-\frac{2^2}{n^2}\right)\cdots\left(x-\frac{(n-1)^2}{n^2}\right)$$

이 된다. 방정식 $f(x)=0$의 해의 합 S_n은

$$S_n=\frac{1^2}{n^2}+\frac{2^2}{n^2}+\ \cdots\ +\frac{(n-1)^2}{n^2}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k^2}{n^2}=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^2}$$

이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}=\frac{1}{3}$$

이다.

문제 2 [총30점]

[문제 2-1] [10점] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

자연수 n에 대하여 곡선 $y=\sqrt{2x}$ 위의 점 A_n과 x축 위의 점 B_n은 다음과 같이 정의한다. (가) 점 B_1은 원점이고 $\overline{B_1B_n}=\frac{1}{2}n(n-1)$이다. (단, $n\geq 2$이다.) (나) 점 B_n을 지나면서 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\sqrt{2x}$와 만나는 점이 A_n이다.

삼각형 $A_nB_nB_{n+1}$의 넓이를 S_n, 선분 B_nB_{n+1}의 길이를 l_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{{l_n}^2}{S_n}$의 값을 구하시오. (단, $n\geq 2$이다.)

<정답 및 해설>

제시문 (가)에 의하여 점 B_n의 x좌표는 $\frac{1}{2}n(n-1)$이고, 점 B_{n+1}의 x좌표는 $\frac{1}{2}(n+1)n$이므로 선분 B_nB_{n+1}의 길이 l_n은

$$l_n=\frac{1}{2}(n+1)n-\frac{1}{2}n(n-1)=n$$

이다. 한편 점 B_n을 지나면서 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\sqrt{2x}$와 만나는 점이 A_n이므로 점 A_n의 y좌표는 $\sqrt{2\times\frac{1}{2}n(n-1)}=\sqrt{n(n-1)}$이고, 이 때

점 A_n의 좌표는 $A_n\left(\frac{1}{2}n(n-1),\ \sqrt{n(n-1)}\right)$이다.

따라서 삼각형 $A_nB_nB_{n+1}$ 의 넓이 S_n는

$$S_n=\frac{1}{2}\times l_n\times\sqrt{n(n-1)}=\frac{1}{2}n\sqrt{n(n-1)}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{{l_n}^2}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\frac{1}{2}n\sqrt{n(n-1)}}=2$$

이다.

[문제 2-2] [10점]

정수 a, b, c에 대하여 함수 $f(x)=x^4+ax^3-bx+c$가 다음 세 조건을 만족시키게 되는 상수 a, b, c, p, q, r을 구하시오.

(가) p, q, r는 $-2<p<-1<q<0<r$을 만족하는 실수이다.
(나) 함수 $f(x)$는 x의 값이 p, q, r에서 극값을 갖는다.
(다) $f(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 갖는다.

<정답 및 해설>

(i) 조건 (가), (나)에 의하여

p, q, r는 $f'(x)=4x^3+3ax^2-b=0$의 근이고, $-2<p<-1<q<0<r$이므로

$$f'(-2)=-32+12a-b<0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$f'(-1)=-4+3a-b>0 \quad \cdots\cdots ㉡$$

$$f'(0)=-b<0 \quad \cdots\cdots ㉢$$

이다. ㉠, ㉡, ㉢에서

$$b>0,\ \ 4b+16<12a<32+b \quad \cdots\cdots ㉣$$

이고, $4b+16<32+b$에서 $0<b<\frac{16}{3}$이다.

한편 b는 정수이므로 b의 값은 $1, 2, 3, 4, 5$중의 하나가 된다.

$b=1$일 때 ㉣에서 $20<12a<33$이고, 이 때 정수 a의 값은 2가 된다.

$b=2, 3, 4, 5$일 때 ㉣을 만족하는 정수 a의 값은 없다.

(ii) $f'(x)=4x^3+6x^2-1=(2x+1)(2x^2+2x-1)=0$의 근은 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$ 이므로

조건 (가), (나)에 의하여

$$p=\frac{-1-\sqrt{3}}{2},\ \ q=-\frac{1}{2},\ \ r=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

이 된다.

(iii) p, r는 방정식 $2x^2+2x-1=0$의 근이고

$$f(x)=x^4+2x^3-x+c=(2x^2+2x-1)\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)+c-\frac{1}{4}$$

이므로 극솟값 $f(p)=f(r)=c-\frac{1}{4}$이고, 극댓값 $f(q)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=c+\frac{5}{16}$이다.

조건 (다)에 의하여 극솟값은 음수이고 극댓값은 양수가 된다. 즉

$$c-\frac{1}{4}<0,\ \ c+\frac{5}{16}>0 \text{ 에서 } -\frac{5}{16}<c<\frac{1}{4}$$

이고, c가 정수이므로 $c=0$이다. 따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여

$$a=2,\ \ b=1,\ \ c=0,\ \ p=\frac{-1-\sqrt{3}}{2},\ \ q=-\frac{1}{2},\ \ r=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

이다.

[문제 2-3] [10점]

실수 x에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \int_{-a}^{a} |u - x| du$$

라 정의하자. 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위가 $-1 \le X \le 1$이고 확률변수 X의 확률밀도 함수가 $g(x)$일 때, $a^3 + 3a$의 값을 구하시오. (단, $a > 0$이다.)

<정답 및 해설>

실수 x의 범위에 따라 $g(x)$를 구하면, 다음과 같다.

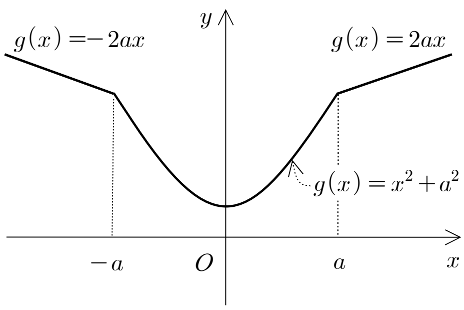
(i) $x < -a$일 때, $g(x) = \int_{-a}^{a} (u - x)du = -2ax$

(ii) $-a \le x < a$일 때, $g(x) = \int_{-a}^{x} (-u + x)du + \int_{x}^{a} (u - x)du$

$$= \frac{1}{2}(x + a)^2 + \frac{1}{2}(a - x)^2 = a^2 + x^2$$

(iii) $x \ge a$ 일 때, $g(x) = \int_{-a}^{a} (-u + x)du = 2ax$

(i), (ii), (iii)에 의하여 함수 $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



한편 $a \ge 1$이면

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx = 2\int_{0}^{1} a^2 + x^2 dx = 2\left[a^2 x + \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = 2a^2 + \frac{2}{3} \ge \frac{8}{3}$$

이므로 $g(x)$는 닫힌 구간 $[-1, 1]$에서 확률밀도함수가 될 수 없다. 따라서 $a < 1$이다.

$$\therefore \int_{-1}^{1} g(x)dx = 2\left\{\int_{0}^{a} (a^2 + x^2)dx + \int_{a}^{1} 2ax\, dx\right\}$$

$$= 2\left\{\left[a^2 x + \frac{1}{3}x^3\right]_0^a + \left[ax^2\right]_a^1\right\} = \frac{2}{3}a^3 + 2a$$

이다. $\int_{-1}^{1} g(x)dx = 1$이므로 $\frac{2}{3}a^3 + 2a = 1$이 되어 $a^3 + 3a = \frac{3}{2}$이다.

문제 3 [총40점]

다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

(가) **평균값 정리**

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 열린 구간 (a,b)에서 미분가능하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인 c가 a와 b사이에 적어도 하나 존재한다.

(나) **적분과 미분의 관계**

닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_a^x f(t)dt \quad (\text{단, } a\le x\le b)$$

로 정의하면 함수 $g(x)$는 미분가능하고 $g'(x)=f(x)$이다.

(다) 모든 실수 x에서 미분가능한 함수 f가 다음을 만족시킨다.

(i) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이다.

(ii) 모든 실수 x에 대하여 $\int_0^x \{f(t)+f(-t)\}dt=0$이다.

[문제 3-1] [10점]

제시문 (다)의 함수 f에 대하여 $\frac{f(\alpha)}{\alpha}=f'(\gamma)$인 γ가 적어도 하나 존재함을 제시문(가), (나)를 이용하여 보이시오. (단, $\alpha\ne 0$)

<정답 및 해설>

모든 실수 x에 대하여 $\int_0^x \{f(t)+f(-t)\}dt=0$이므로 양변을 x로 미분하면 제시문(나)에 의해서 $f(x)+f(-x)=0$을 만족한다. 이 때 $f(-x)=-f(x)$이므로 함수 $f(x)$는 원점 대칭인 함수이고 $f(0)+f(0)=0$이므로 $f(0)=0$이다.

(i) $\alpha>0$ 인 경우

닫힌 구간 $[0,\alpha]$에서 제시문(가)의 평균값 정리를 이용하면

$$\frac{f(\alpha)-f(0)}{\alpha-0}=f'(\gamma),\quad \frac{f(\alpha)}{\alpha}=f'(\gamma)\ (0<\gamma<\alpha)$$

인 γ가 적어도 하나 존재한다.

(ii) $\alpha<0$인 경우

닫힌 구간 $[\alpha, 0]$에서 제시문(가)의 평균값 정리를 이용하면

$$\frac{f(0)-f(\alpha)}{0-\alpha}=\frac{-f(\alpha)}{-\alpha}=\frac{f(\alpha)}{\alpha}=f'(\gamma) \quad (\alpha<\gamma<0)$$

인 γ가 적어도 하나 존재한다.

따라서 (i), (ii)에 의해서 $\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}=f'(\gamma)$인 γ가 적어도 하나 존재한다.

[문제 3-2] [10점]

제시문(다)의 함수 f가 $f(p)=1\,(p>0)$을 만족한다고 하자. 원점 O와 점 $A(0,1)$에 대하여 선분 OA를 n등분한 후 양 끝점을 포함한 각 분점을 차례로

$$y_0(=0),\ y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_{n-1},\ y_n(=1)$$

이라 하고, 직선 $y=y_k$가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점을 $B_k(x_k, y_k)\,(k=0,1,2,\cdots,n)$라 하자. 함수 $f(x)$에 대하여 각 구간 $[x_{k-1}, x_k]$에서 평균값 정리를 만족하는 실수를 $c_k\,(k=1,2,\cdots,n)$라 할 때,

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{1+m^2}\sum_{n=1}^{m}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f'(c_k)}\right\}=\frac{1}{1+p^2}$$

을 만족하는 p의 값을 구하시오.

<정답 및 해설>

선분 OA를 n등분하였으므로 $y_k=\dfrac{k}{n}$이고, $k=1,2,\cdots,n$에 대하여 각 구간 $[x_{k-1}, x_k]$에서 함수 f가 연속이고 (x_{k-1}, x_k)에서 미분가능하다. 함수 f는 $f'>0$이므로 $f(x_{k-1})=\dfrac{k-1}{n}$, $f(x_k)=\dfrac{k}{n}$이고 평균값 정리에 의해

$$\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}=\frac{\frac{1}{n}}{x_k-x_{k-1}}=\frac{1}{n(x_k-x_{k-1})}=f'(c_k)$$

인 실수 $c_k\ (x_{k-1}<c_k<x_k)$가 오직 한 개 존재한다. (단, $k=1,2,\cdots,n$)

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f'(c_k)}=\sum_{k=1}^{n}n(x_k-x_{k-1})=n\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})=n(x_n-x_0)=n(p-0)=np$$

이다. 또한 $\displaystyle\sum_{n=1}^{m}n=\frac{m(m+1)}{2}$ 이므로

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{1+m^2}\sum_{n=1}^{m}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f'(c_k)}\right\}=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{1+m^2}\sum_{n=1}^{m}np=p\lim_{m\to\infty}\frac{m(m+1)}{2(1+m^2)}=\frac{p}{2}$$

이다. 따라서 방정식 $\dfrac{p}{2}=\dfrac{1}{1+p^2}$에서 $p^3+p-2=(p-1)(p^2+p+2)=0$이므로 $p=1$이다.

[문제 3-3] [20점]

[문제3-2]에서 원점 O 와 점 $A(0,1)$에 대하여 선분 OA를 $n=2^m$ 등분하였을 때, $S(m)$과 $T(m)$을 다음과 같이 정의하자. (단, m은 자연수이다.)

(가) $S(m)=\sum_{k=1}^{2^m} f'(c_k)\triangle x_k \quad (\triangle x_k = x_k - x_{k-1},\ k=1,2,3,\ \cdots,\ 2^m-1,\ 2^m)$

(나) x축 위의 반열린 구간 $[p,\infty)$에서의 점 a_i를

$$a_0=p,\quad a_{i+1}=a_i+2^i\ \ (i=0,1,2,3,\cdots)$$

라 할 때, 구간 $[a_i,\ a_{i+1}]$에서 평균값 정리를 만족시키는 실수 d_i에 대하여 $T(m)$을

$$T(m)=\sum_{i=0}^{2^m-1} 2^i f'(d_i)$$

라 하자.

$\lim_{m\to\infty}\{S(m)T(m)\}=2018$일 때, $\lim_{x\to\infty} f(x)$를 구하시오.

<정답 및 해설>

닫힌 구간 $[x_k,\ x_{k+1}]$에서 평균값 정리를 만족시키는 실수가 c_k이므로

$$f'(c_k)=\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$$

이고

$$(x_k-x_{k-1})f'(c_k)=f(x_k)-f(x_{k-1})$$

에서

$$f'(c_k)\triangle x_k=f(x_k)-f(x_{k-1})$$

이다.

$$S(m)=\sum_{k=1}^{2^m} f'(c_k)\triangle x_k=\sum_{k=1}^{2^m}\{f(x_k)-f(x_{k-1})\}$$
$$=f(x_{2^m})-f(x_0)=f(p)=1$$

이다. 또한 닫힌 구간 $[a_i, a_{i+1}]$에서 평균값 정리를 만족시키는 실수가 d_i이므로

$$f'(d_i)=\frac{f(a_{i+1})-f(a_i)}{a_{i+1}-a_i}=\frac{f(a_{i+1})-f(a_i)}{2^i}$$

$$\therefore\ 2^i f'(d_i)=f(a_{i+1})-f(a_i)$$

$f(a_0)=f(p)=1$ 이므로

$$T(m)=\sum_{i=0}^{2^m-1}2^i f'(d_i)=\sum_{i=0}^{2^m-1}\{f(a_{i+1})-f(a_i)\}$$

$$=\{f(a_1)-f(a_0)RIGHT+\ \cdots\ +\{f(a_{2^m})-f(a_{2^m-1})\}$$

$$=f(a_{2^m})-f(a_0)=f(a_{2^m})-f(p)$$

$$\therefore\ \ S(m)T(m)=1\times\{f(a_{2^m})-f(p)\}=f(a_{2^m})-1$$

$$\lim_{m\to\infty}\{S(m)T(m)\}=\lim_{m\to\infty}\{f(a_{2^m})-1\}=2018$$

이므로 $\lim\limits_{m\to\infty}f(a_{2^m})=2019$ 이다. 따라서 함수 f가 연속이고 $m\to\infty$ 일 때 $a_{2^m}\to\infty$ 이므로 $\lim\limits_{m\to\infty}f(a_{2^m})=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 가 되어 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{m\to\infty}f(a_{2^m})=2019$ 이다.